

MMF 10 / 1. *Mecànica*

6. Dinàmica del sòlid rígid: equacions fonamentals

S. Xambó

- Notacions
- Equació del moment lineal
- Equació del moment angular
- Equacions d'Euler
- Exemples
 - *Rotor, pèndol físic*
 - *Esfera rodolant sobre un pla*
 - *Esfera sobre plataforma horitzontal giratòria*

Notacions

$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}_G$ *velocitat del centre de masses*

$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m \dot{\mathbf{r}}_G = m \mathbf{V}$ *moment lineal del sòlid*

$\mathbf{F}_i$ *força que actua sobre m_i (no inclou $\mathbf{R}_i$)*

$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ *resultant de les forces*

$\mathbf{M}_O = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_O) = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i$

$= \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i)$

$= I_O \boldsymbol{\omega}$ *moment angular (respecte de O)*

$\mathbf{N}_O = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{F}_i$

$= \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i$ *moment de les forces (respecte de O)*

Equació del moment lineal

Teorema. $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$

Prova. $\dot{\mathbf{P}} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$, on $\mathbf{a}_i$ és l'acceleració de m_i . Per la segona llei de Newton, $m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}$, on $\mathbf{F}_{ij}$ és la força que la partícula m_j exerceix sobre m_i (amb la convenció $\mathbf{F}_{ii} = 0$). Per tant

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F},$$

ja que $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, per la tercera llei de Newton, i així $\sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} = 0$.

Equació del moment angular

Teorema. $\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O - \mathbf{x}_G \times (m\ddot{\mathbf{r}}_O) = \mathbf{N}_O - \mathbf{x}_G \times \mathbf{F}$.

En particular, $\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O$ si O és un punt fix o si $O = G$ (en aquest cas escrivim $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$).

Prova. En efecte,

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_O),$$

ja que $(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_O) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_O) = 0$.

Però d'una banda

$$\Sigma_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \Sigma_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times (\mathbf{F}_i + \Sigma_j \mathbf{F}_{ij}) = \mathbf{N}_O,$$

ja que

$$\Sigma_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times (\Sigma_j \mathbf{F}_{ij}) = \Sigma_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{r}_O \times \Sigma_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = 0$$

(notem que $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$ per a tot parell d'índexs i, j , ja que $\mathbf{F}_{ij}$ i $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ són proporcionals).

I d'altra banda és clar que

$$-\Sigma_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times \ddot{\mathbf{r}}_O = -m(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \times \ddot{\mathbf{r}}_O = -m\mathbf{x}_G \times \ddot{\mathbf{r}}_O.$$

Equacions d'Euler

Teorema (Euler). Si en el moviment d'un sòlid rígid hi ha un punt fix O , aleshores $\mathbf{N}_O = I_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I_O \boldsymbol{\omega}$

Independentment de si hi ha un punt fix o no, aquesta fórmula val per a $O = G$, és a dir, $\mathbf{N} = I \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I \boldsymbol{\omega}$.

Prova. Sigui O un punt fix del moviment o el centre de masses. Si posem $I = I_O$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_O$, sabem que es compleixen les relacions $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{M}}$ (segona equació fonamental) i $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$. Sabem, a més, que

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}.$$

Substituint l'expressió de $\mathbf{M}$ en la relació anterior, obtenim que

$$\dot{\mathbf{M}} = (I\boldsymbol{\omega})' + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega}.$$

Però és clar que $(I\boldsymbol{\omega})' = I\boldsymbol{\omega}'$, ja que I és invariable relativament al sòlid, i sabem que $\boldsymbol{\omega}' = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, de manera que finalment obtenim $\mathbf{N} = I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega}$, que és la relació de l'enunciat.

Corol·lari (Equacions d'Euler). Si I_1, I_2, I_3 són els moments principals d'inèrcia respecte de O , on O és un punt fix o el centre de masses, i (N_1, N_2, N_3) i $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ són les components de $\mathbf{N}$ i $\boldsymbol{\omega}$ respecte d'una referència principal d'inèrcia, aleshores són vàlides les equacions següents:

$$N_1 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + I_1\dot{\omega}_1$$

$$N_2 = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 + I_2\dot{\omega}_2$$

$$N_3 = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 + I_3\dot{\omega}_3$$

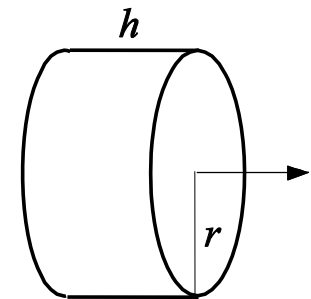
Corol·lari. $\dot{T}_{\text{rot}} = \mathbf{N}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Prova. Com $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$, $\dot{T}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}$ (hem usat que $\mathbf{I}$ és simètric i que $\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) = 0$).

Remarca. L'equació anterior és anàloga a la relació $\dot{T}_{\text{trans}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$, que s'obté derivant $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2$.

Exemples

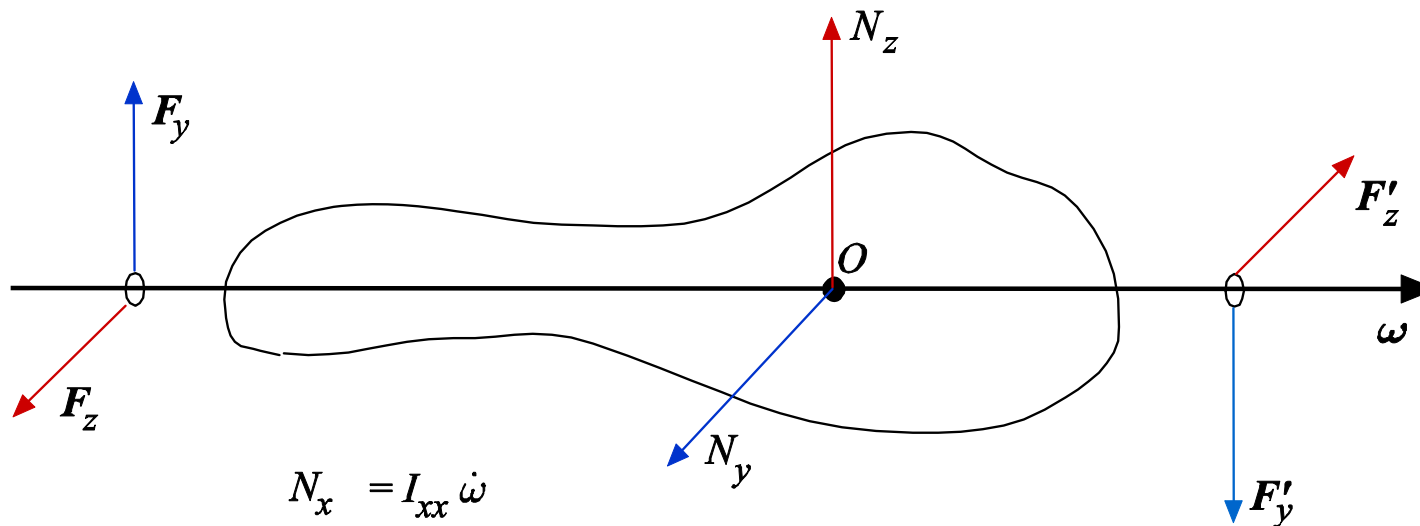
Exemple. Si no hi ha forces externes, $\boldsymbol{\omega}$ pot ser constant només si l'eix de rotació és un eix principal d'inèrcia (la constància de $\boldsymbol{\omega}$ i la no existència de forces externes fan que l'equació d'Euler quedi $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = 0$, és a dir, $\boldsymbol{\omega}$ ha de ser un vector propi de $\mathbf{I}$).



Estable

Remarca. Aquí és oportú comentar que dels eixos principals, només els de moment principal d'inèrcia màxim i mínim són estables (en el cas d'un giroscopi, només ho és l'eix). En presència d'alguna forma de dissipació d'energia, com sol ser el cas per als satèl·lits artificials, només és estable l'eix de màxim moment d'inèrcia (energia mínima). En el cas d'un cilindre circular recte homogeni, l'eix del cilindre és estable si no hi ha dissipació d'energia; altrament ho és si i només si $h < \sqrt{3}r$.

Exemple (Rotor) $\omega = (\omega, 0, 0)$



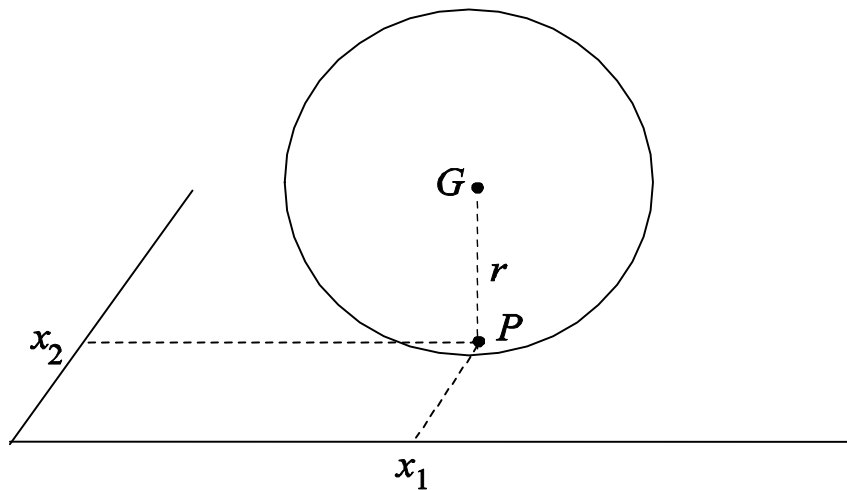
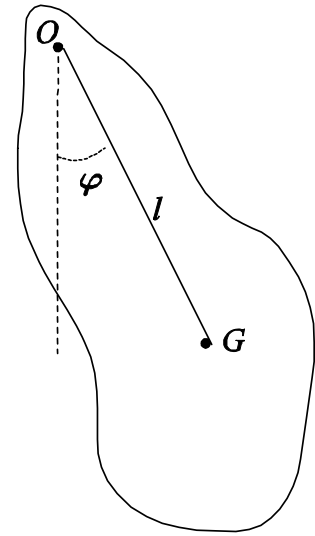
$$(N_x, N_y, N_z) = \dot{\omega}(I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}) + \omega^2(0, -I_{xz}, I_{xy})$$

$$N_x = I_{xx}\dot{\omega}, N_y = N_x \frac{I_{xy}}{I_{xx}} - \omega^2 I_{xz}, N_z = N_x \frac{I_{xz}}{I_{xx}} - \omega^2 I_{xy}$$

Exemple (Pèndol físic)

$$N = -mgl \sin(\varphi), \omega = \dot{\varphi}$$

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin(\varphi)$$



Exemple (esfera rodolant sobre un pla)

Velocitat de G : $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, 0)$

Velocitat de P com a punt material de l'esfera:

$$\begin{aligned} &(\dot{x}_1, \dot{x}_2, 0) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (0, 0, -r) \\ &= (\dot{x}_1 - r\omega_2, \dot{x}_2 + r\omega_1, 0) \end{aligned}$$

La condició de rodolar (sense lliscament) ens dóna

$$\dot{x}_1 = r\omega_2, \dot{x}_2 = -r\omega_1.$$

La resultant de les forces que actuen sobre l'esfera és

$$(F_1, F_2, 0) = (mr\dot{\omega}_2, -mr\dot{\omega}_1, 0),$$

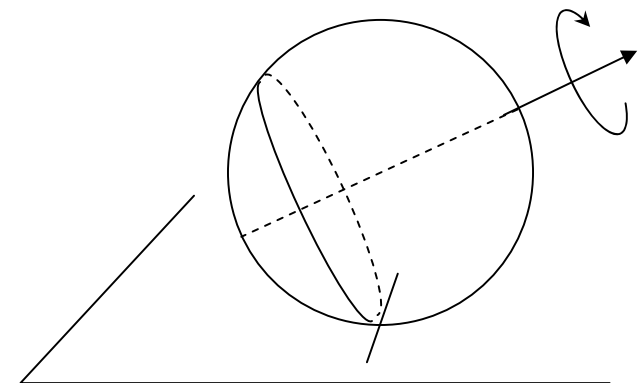
i el corresponent moment és

$$(0, 0, -r) \times (mr\dot{\omega}_2, -mr\dot{\omega}_1, 0) = (-mr^2\dot{\omega}_1, -mr^2\dot{\omega}_2, 0).$$

Si μ és el moment d'inèrcia de l'esfera respecte d'un dels seus diàmetres, les equacions d'Euler ens donen (v. **Remarca**)

$$\mu\dot{\omega}_1 = -mr^2\dot{\omega}_1, \mu\dot{\omega}_2 = -mr^2\dot{\omega}_2, \mu\dot{\omega}_3 = 0.$$

En resulta que $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ és constant, que la resultant de les forces és nul·la, i que G es mou amb velocitat constant $(r\omega_2, -r\omega_1, 0)$. Notem que aquesta velocitat és perpendicular a $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, però que ω_3 pot ser no nul·la.



Remarca. Per un giroscopi esfèric, les equacions d'Euler es redueixen a $\mathbf{N} = \mu \dot{\boldsymbol{\omega}}$, ja que $I = \mu \cdot \text{Id}$ i $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$. Si a més el moment de les forces és 0, llavors veiem que la velocitat angular és constant. És a dir, el moviment d'una esfera no sotmesa a forces es compon d'un moviment rectilini uniforme del seu centre i una rotació de velocitat angular constant al voltant d'un eix fix (rotació uniforme).

Exemple (Esfera sobre plataforma horitzontal giratòria)

La plataforma gira amb velocitat angular constant α . L'esfera té de radi r , amb una distribució de massa amb simetria radial, i rodola sense lliscament sobre la superfície de la plataforma. Com es mou?

Prenem coordenades (x_1, x_2, x_3) respecte d'un sistema rectangular d'eixos inercials, amb origen el centre de gir de la plataforma i essent x_1x_2 el pla horitzontal.

Si $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ és la velocitat angular de l'esfera, i G el seu centre, la velocitat del punt $P(x_1, x_2, x_3)$ en què l'esfera toca la plataforma és

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}) &= (\dot{x}_1, \dot{x}_2, 0) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (0, 0, -r) \\ &= (\dot{x}_1 - r\omega_2, \dot{x}_2 + r\omega_1, 0).\end{aligned}$$

Com que la velocitat de P , considerat com a punt de la plataforma, és

$$(0, 0, \alpha) \times (x_1, x_2, 0) = (-\alpha x_2, \alpha x_1, 0),$$

la condició que no hi hagi lliscament ens dóna

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_2 + r\omega_2, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_1 - r\omega_1.$$

Així, doncs,

$$\ddot{x}_1 = -\alpha \dot{x}_2 + r\dot{\omega}_2, \quad \ddot{x}_2 = \alpha \dot{x}_1 - r\dot{\omega}_1,$$

o bé,

$$r\dot{\omega}_1 = \alpha \dot{x}_1 - \ddot{x}_2, \quad r\dot{\omega}_2 = \alpha \dot{x}_2 + \ddot{x}_1. \quad [1]$$

Les equacions d'Euler ens donen, en aquest cas,

$$\mu(\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3) = (N_1, N_2, N_3), \quad [2]$$

on μ és el moment d'inèrcia de l'esfera respecte d'un dels seus diàmetres i

$$(N_1, N_2, N_3) = (0, 0, -r) \times (m\ddot{x}_1, m\ddot{x}_2, 0) = mr(\ddot{x}_2, -\ddot{x}_1, 0). \quad [3]$$

Multiplicant [2] per r i fent les substitucions [1] i [3] obtenim

$$\mu(\alpha\dot{x}_1 - \ddot{x}_2, \alpha\dot{x}_2 + \ddot{x}_1, 0) = mr^2(\ddot{x}_2, -\ddot{x}_1, 0).$$

Posant $k = \mu/mr^2$, resulten les equacions

$$(1 + k)\ddot{x}_1 = -k\alpha\dot{x}_2, \quad (1 + k)\ddot{x}_2 = k\alpha\dot{x}_1,$$

que escriurem en la forma

$$\ddot{x}_1 = -\beta\dot{x}_2, \quad \ddot{x}_2 = \beta\dot{x}_1, \quad \beta = \frac{k\alpha}{1+k} \text{ (notem que } \beta < \alpha).$$

Derivant aquestes expressions, s'obté

$$\ddot{x}_i = -\beta^2\dot{x}_i, \quad i = 1, 2. \quad [5]$$

Per tant,

$$\dot{x}_1 = A \cos(\beta t + \phi), \quad \dot{x}_2 = A \sin(\beta t + \phi), \quad [6]$$

on A i ϕ són constants dependents de les condicions inicials. Per tant

$$x_1 = \frac{A}{\beta} \sin(\beta t + \phi) + c_1, \quad x_2 = -\frac{A}{\beta} \cos(\beta t + \phi) + c_2, \quad [7]$$

amb c_1 i c_2 constants d'integració.

Conclusió. G descriu una circumferència de centre $c = (c_1, c_2)$ i radi A/β , amb velocitat angular β i en el mateix sentit que el de rotació de la plataforma. La determinació de A, ϕ, c_1, c_2 en funció de la posició inicial (a_1, a_2) i de la velocitat inicial (v_1, v_2) de G és com segueix:

$$v_1 = A \cos(\phi), \quad v_2 = A \sin(\phi),$$

$$\tan(\phi) = v_2/v_1, \quad A = \frac{v_1}{\cos(\phi)} = \frac{v_2}{\sin(\phi)}.$$

Per altra banda,

$$a_1 = \frac{A}{\beta} \sin(\phi) + c_1 = \frac{v_2}{\beta} + c_1, \quad a_2 = -\frac{A}{\beta} \cos(\phi) + c_2 = -\frac{v_1}{\beta} + c_2,$$

$$\text{d'on} \quad c_1 = a_1 - \frac{v_2}{\beta}, \quad c_2 = a_2 + \frac{v_1}{\beta}.$$

Finalment,

$$r\omega_1 = \alpha x_1 - \dot{x}_2 = \alpha \frac{A}{\beta} \sin(\beta t + \phi) - A \sin(\beta t + \phi) + \alpha c_1 = \frac{A}{k} \sin(\beta t + \phi) + \alpha c_1$$

$$r\omega_2 = \alpha x_2 + \dot{x}_1 = -\alpha \frac{A}{\beta} \cos(\beta t + \phi) + A \cos(\beta t + \phi) + \alpha c_2 = -\frac{A}{k} \cos(\beta t + \phi) + \alpha c_2$$

La component ω_3 és constant, per l'equació d'Euler, però altrament pot tenir un valor arbitrari.

Cas particular. Suposem que l'esfera és homogènia, que la posició inicial de G és $(a, 0)$ i que la velocitat és (v, v) . Llavors

$$k = \frac{\mu}{mr^2} = \frac{2}{5}, \quad \beta = \frac{2}{7}\alpha; \quad \phi = \frac{\pi}{4}, \quad A = \sqrt{2}v$$

$$c_1 = a - \frac{7v}{2\alpha}, \quad c_2 = \frac{7v}{2\alpha}.$$

La velocitat angular inicial és

$$\omega_1 = (\alpha a - v)/r, \quad \omega_2 = v/r.$$

Cas especial. Per tal que el centre de la circumferència recorreguda per G sigui el centre de gir de la plataforma és necessari i suficient que

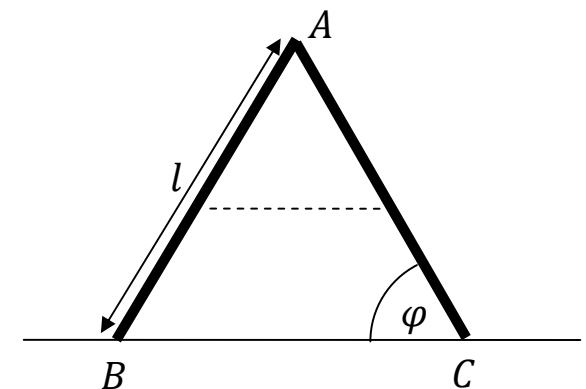
$$(v_1, v_2) = \beta(-a_2, a_1),$$

és a dir, que la velocitat inicial ha de ser perpendicular al vector (a_1, a_2) que dóna la posició inicial de G , dirigida en el sentit de la rotació de la plataforma, i amb un mòdul igual a βa , on $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Exercicis M.6 (Dinàmica del sòlid: equacions fonamentals)

M.6.1. Considereu una escala doble els dos braços de la qual són homogenis de longitud l i massa m . L'escala es manté en repòs sobre un pla horitzontal, tal com indica la figura, i formant un triangle equilàter gràcies a una corda de massa negligible que uneix els dos braços. En l'instant $t = 0$ es talla la corda i volem estudiar quina serà l'evolució de l'escala suposant que els seu peus llisquen sense fricció.

1. Raoneu que el sistema té un sol grau de llibertat.



2. Usant com a coordenada generalitzada l'angle intern φ que els braços formen amb el pla horitzontal, calculeu la lagrangiana del sistema i trobeu l'equació del moviment.
3. Amb quina velocitat arribarà a terra el punt A ?
4. Proveu que el centre instantani de rotació del braç AC és la intersecció de la recta vertical per C i la recta horitzontal per A .

M.6.2. Un cub homogeni d'aresta a es troba inicialment en posició d'equilibri (inestable) amb una aresta en contacte amb un pla horitzontal. Una petita pertorbació fa que comenci a caure. Suposant que l'aresta no pot relliscar sobre el pla, proveu que la velocitat angular del cub quan una de les cares arriba a terra

$$\text{és } \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\sqrt{2} - 1)}.$$