

MMF 10 / 1. *Mecànica*

5. Dinàmica del sòlid rígid: tensor d'inèrcia

S. Xambó

- Preliminars matemàtics
- Tensor d'inèrcia
 - *Teorema d'Steiner*
- Moment angular
- Energia cinètica
- Moments d'inèrcia
- Moments i eixos principals d'inèrcia
- Resum de les relacions cinemàtiques per al sòlid rígid

Preliminars matemàtics

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in V_3$, posem $\hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{b} \in \text{End}(V_3)$ per indicar l'endomorfisme de V_3 definit per la relació

$$(\hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b}$$

En una base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$,

$$\hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix},$$

ja que $(\hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{u}_i) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_i)\mathbf{b} = a_i \mathbf{b} \equiv (a_i b_1, a_i b_2, a_i b_3)$.

També definim

$$I_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^2 Id - \hat{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{a},$$

és a dir,

$$I_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{x} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}.$$

En una base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$,

$$I_{\mathbf{a}} \equiv \begin{pmatrix} a_2^2 + a_3^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 \\ -a_2 a_1 & a_1^2 + a_3^2 & -a_2 a_3 \\ -a_3 a_1 & -a_3 a_2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}$$

Remarca. També ens convé definir, més generalment,

$$I_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{x} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b} .$$

Velocitat angular. Donat un sòlid en moviment, la seva *velocitat angular*, que denotem $\boldsymbol{\omega}$, és la velocitat angular d'una referència $[O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ fixa respecte del sòlid. Donat un punt $P = O + \mathbf{x}$ del sòlid, la seva velocitat relativa a O , $\dot{\mathbf{x}}$, ve donada per

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} .$$

Tensor d'inèrcia

El tensor d'inèrcia d'un sòlid respecte d'un punt O (possiblement mòbil), denotat I_O , es defineix per la relació

$$I_O = \sum_i m_i I_{x_i}, \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O.$$

En una base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$,

$$I_O \equiv \sum m_i \begin{pmatrix} x_{i2}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i1}x_{i2} & -x_{i1}x_{i3} \\ -x_{i2}x_{i1} & x_{i1}^2 + x_{i3}^2 & -x_{i2}x_{i3} \\ -x_{i3}x_{i1} & -x_{i3}x_{i2} & x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \end{pmatrix}.$$

Remarca. En cas d'un cos continu K , amb densitat $\rho(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} I_O &\equiv \int_K \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^2 Id - \hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\equiv \int_K \rho(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Moment angular

Es defineix el *moment angular* del sòlid respecte del punt O (possiblement mòbil), L_O , per l'expressió

$$L_O = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_O) = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i .$$

Teorema. Sigui O un punt del sòlid. Llavors $L_O = I_O \boldsymbol{\omega}$.

Prova. Com que m_i és immòbil respecte del sòlid, $\dot{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i$ i per tant

$$L_O = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i) .$$

Però per la fórmula del producte mixt tenim que

$$\mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}_i = I_{\mathbf{x}_i}(\boldsymbol{\omega}) ,$$

de manera que

$$L_O = \sum_i m_i I_{\mathbf{x}_i}(\boldsymbol{\omega}) = \left(\sum_i m_i I_{\mathbf{x}_i} \right) (\boldsymbol{\omega}) = I_O(\boldsymbol{\omega}) .$$

La prova és similar en el cas continu, canviant $\sum_i$ per $\int_K$.

Energia cinètica

Posem $V = \dot{\mathbf{r}}_O$, $\mathbf{P} = m\mathbf{V}$, m la massa total del sòlid.

També posem $I = I_G$.

Teorema. $T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_O \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_G)$.

Diem que $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_O \boldsymbol{\omega}$ és l'*energia cinètica de rotació respecte de O*.

Corol·lari. En el cas $O = G$, $T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I\boldsymbol{\omega}$.

Diem que $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I\boldsymbol{\omega}$ *energia cinètica de rotació*.

Corol·lari. Si O és un punt immòbil del sòlid, $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_O \boldsymbol{\omega}$.

Prova del teorema. Si $\mathbf{r}$ és el vector de posició d'un punt del sòlid, llavors $\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \mathbf{x}$, on $\mathbf{x}$ és el vector de posició del mateix punt respecte de O .

Així $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ i per tant

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}^2 &= \mathbf{V}^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 + 2\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\
&= \mathbf{V}^2 + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})^2 + 2\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\
&= \mathbf{V}^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{x}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}) + 2\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\
&= \mathbf{V}^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot I_x \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Posant $\mathbf{r}_i$ en lloc de $\mathbf{r}$ (amb la qual cosa hem de posar $\mathbf{x}_i$ en lloc de $\mathbf{x}$), multiplicant per $\frac{1}{2} m_i$, i sumant respecte de i , ens queda

$$\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\sum_i m_i I_{\mathbf{x}_i} \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \sum_i m_i \mathbf{x}_i) \\
&= \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I_O \boldsymbol{\omega}) + m \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_G) \\
&= \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (I_O \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_G).
\end{aligned}$$

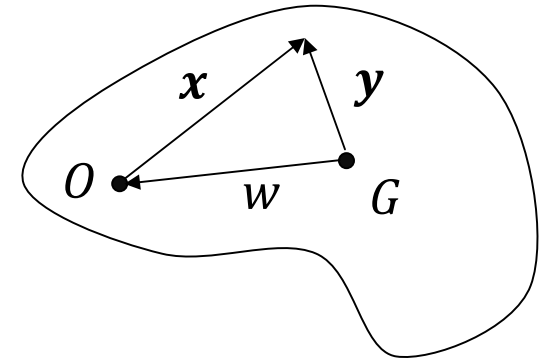
El cas continu es demostra canviant m_i per $\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ i $\sum_i$ per $\int_K$.

Teorema (Steiner). Si G és el baricentre d'un sòlid, i $\mathbf{w} = \mathbf{O} - G$, llavors

$$I_O = I_G + mI_{\mathbf{w}},$$

on m és la massa del sòlid.

Prova. Si posem $\mathbf{x}$ per denotar el vector de posició d'un punt del sòlid respecte de O , llavors $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}$ és el vector de posició del mateix punt respecte de G . Així $\mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^2 + \mathbf{w}^2 - 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{y}$,



$\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}} \otimes \mathbf{y} + \hat{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \otimes \mathbf{w}$, d'on

$\mathbf{x}^2 Id - \hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{x} = (\mathbf{y}^2 Id - \hat{\mathbf{y}} \otimes \mathbf{y}) + (\mathbf{w}^2 Id - \hat{\mathbf{w}} \otimes \mathbf{w}) + L(\mathbf{y})$, on L és una funció lineal de $\mathbf{y}$. Ara el resultat s'obté multiplicant per m_i en el cas discret (per $\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ en el cas continu), sumant respecte de i (integrant en el cas continu), i tenint en compte que $\sum m_i \mathbf{y}_i = 0$ (ja que el vector de posició de G respecte de G és nul).

Moments d'inèrcia

Sigui O un punt del sòlid i $\mathbf{u}$ un vector unitari. Si imprimim una velocitat angular $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}$ al voltant de l'eix $O + \langle \mathbf{u} \rangle$, l'energia cinètica de rotació és

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_O \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\omega \mathbf{u}) \cdot I_O (\omega \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot I_O \mathbf{u}) \omega^2.$$

Direm que

$$\mu_{O,\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot I_O \mathbf{u}$$

és el *moment d'inèrcia* respecte de l'eix $O + \langle \mathbf{u} \rangle$.

Exemple. La component I_{ii} de la matriu del tensor d'inèrcia I_O , en base ortonormal, és el moment d'inèrcia respecte de l'eix i -èsim de coordenades, ja que $\mathbf{u}_i \cdot I_O \mathbf{u}_i$ és la component i -èsima de $I_O \mathbf{u}_i$.

Remarca. El moment d'inèrcia es pot calcular també per la fórmula

$$\mu_{O,\mathbf{u}} = \sum_i m_i d_i^2 ,$$

on la suma s'estén a totes les partícules del sòlid i on d_i és la distància de la partícula i -èsima a l'eix $O + \langle \mathbf{u} \rangle$.

En efecte, $I_O \mathbf{u} = \sum_i m_i I_{x_i}(\mathbf{u}) = \sum_i m_i (\mathbf{x}_i^2 \mathbf{u} - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}) \mathbf{x}_i)$. Per tant,

$$\mathbf{u} \cdot I_O \mathbf{u} = \sum_i m_i (\mathbf{x}_i^2 - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u})^2) = \sum_i m_i d_i^2 .$$

Remarca (Teorema d'Steiner per al moment d'inèrcia). El teorema d'Steiner ens diu que $I_O = I_G + m I_w$ ($\mathbf{w} = O - G$). Per tant

$$\mu_{O,\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot I_O \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot I_G \mathbf{u} + m \mathbf{u} \cdot I_w \mathbf{u} = \mu_{G,\mathbf{u}} + m d^2 ,$$

on d és la distància de O a $G + \langle \mathbf{u} \rangle$, ja que

$$\mathbf{u} \cdot I_w \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w}^2 \mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{w}) = \mathbf{w}^2 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 = d^2 .$$

Moments i eixos principals d'inèrcia

El tensor d'inèrcia diagonalitza en una base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$,

$$I_O \equiv \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

I_1, I_2, I_3 *moments principals d'inèrcia*

$O + \langle \mathbf{u}_i \rangle$ *eixos principals d'inèrcia*

Si $I_1 = I_2$, diem que el sòlid és un *giroscopi* respecte de l'eix $O + \langle \mathbf{u}_3 \rangle$.

Tenim:

$$\mathbf{M} = (I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3),$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3}.$$

De l'el·lipsoide $I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 1$ en diem *el·lipsoide d'inèrcia*.

Proposició. (1) El vector perpendicular a un pla de simetria² que passa per O és un eix principal d'inèrcia.

(2) El vector director d'un eix de simetria axial és un eix principal d'inèrcia.

(3) Si existeix un eix de simetria d'ordre $n > 2$, el sòlid és un giroscopi respecte d'aquest eix.

Prova. Sigui $\mathbf{u}_1$ un vector unitari perpendicular al pla de la simetria en el primer cas i paral·lel a l'eix de la simetria axial en el segon. Escollim $\mathbf{u}_2$ i $\mathbf{u}_3$ de manera que formin una base ortonormal de $\mathbf{u}_1^\perp$. Fixem-nos ara en la component I_{12} de la matriu de I_O respecte de la base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, és a dir, en l'expressió $-\sum_i m_i x_{i1} x_{i2}$. Com que la simetria respecte del pla és

$$(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \mapsto (-x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}),$$

i la simetria respecte de l'eix és $(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \mapsto (x_{i1}, -x_{i2}, -x_{i3})$,

és clar que el sumand $m_i x_{i1} x_{i2}$ i el que li correspon per qualsevol de les dues simetries són iguals, però de signes contraris. Això prova que $I_{12} = 0$. Anàlogament es prova que $I_{13} = 0$, i així és clar que $\mathbf{u}_1$ és un vector propi de I_O .

Pel que fa a la tercera part, de la mateixa definició de I_O resulta que si el sòlid té un eix de simetria d'ordre n , aleshores el seu el·lipsoide d'inèrcia també té un eix de simetria d'ordre n . Si $n > 2$, l'el·lipsoide d'inèrcia ha de ser de revolució, amb eix de revolució l'eix de simetria, ja que un el·lipsoide de tres eixos distints només té eixos de simetria d'ordre 2.

Exemples (Sòlids homogenis) . Els eixos d'un ortoedre (és a dir, les tres rectes pel centre perpendiculars a les tres parelles de cares paral·leles) són eixos principals d'inèrcia (els corresponents moments principals d'inèrcia s'han consignat a l'exemple de la pàgina 16).

El mateix passa amb els eixos d'un el·lipsoide.

Els eixos principals d'inèrcia d'un cilindre el·líptic recte són l'eix del cilindre (la recta que uneix els centres de les dues cares laterals) i els eixos principals de la secció del cilindre pel pla perpendicular a l'eix que passa pel centre.

L'eix d'un con el·líptic recte és un eix principal d'inèrcia.

Un prisma regular recte és un giroscopi, i l'eix del giroscopi coincideix amb l'eix del prisma. El mateix passa amb una piràmide regular recte.

Els poliedres regulars són giroscopis esfèrics. La diagonal d'un cub és un eix principal d'inèrcia respecte de qualsevol dels vèrtexs d'aquesta diagonal, ja que la diagonal d'un cub és un eix de simetria d'ordre 3.

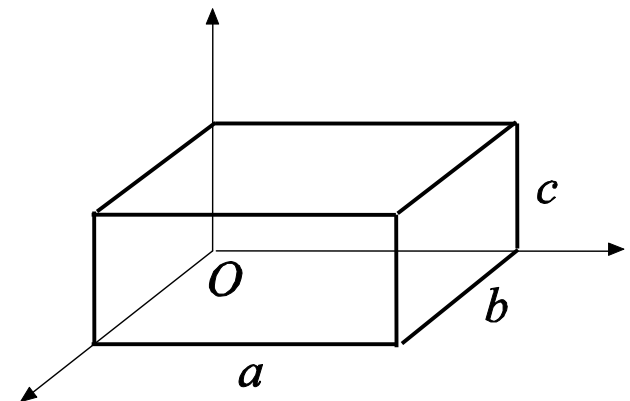
Moments d'inèrcia d'alguns sòlids homogenis

Sòlid	Eix	Fórmula
Barra prima de longitud l	Mediatriu	$\frac{1}{12} ml^2$
Placa rectangular	Perpendicular pel centre	$\frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
	Paral·lela al costat b pel centre	$\frac{1}{12} ma^2$
Disc	Diàmetre	$\frac{1}{4} mr^2$
Anella	Perpendicular pel centre	mr^2
	Diàmetre	$\frac{1}{2} mr^2$
Cilindre circular recte	Eix del cilindre	$\frac{1}{2} mr^2$
	Perpendicular a l'eix per G	$\frac{1}{12} m(h^2 + 3r^2)$
Esfera	Diàmetre	$\frac{2}{5} mr^2$
	Tangent	$\frac{7}{5} mr^2$
Esfera buida	Diàmetre	$\frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
	Tangent	$m \frac{7R^5 + 5R^2r^3 - 2r^5}{5(R^3 - r^3)}$

El·lipsoide	Eix Oz	$\frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$
Con circular recte	Eix del con	$\frac{3}{10}mr^2$
	Perpendicular a l'eix per G	$\frac{3}{80}m(h^2 + 3r^2)$

Exemple. (a) Si G és el baricentre d'un ortoedre homogeni de massa m i de costats a, b, c , llavors, en la referència d'origen G i eixos paral·lels als costats,

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(c^2+a^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$



Si O designa el vèrtex $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$, i prenem els eixos paral·lels als anteriors, llavors podem aplicar el teorema d'Steiner per obtenir

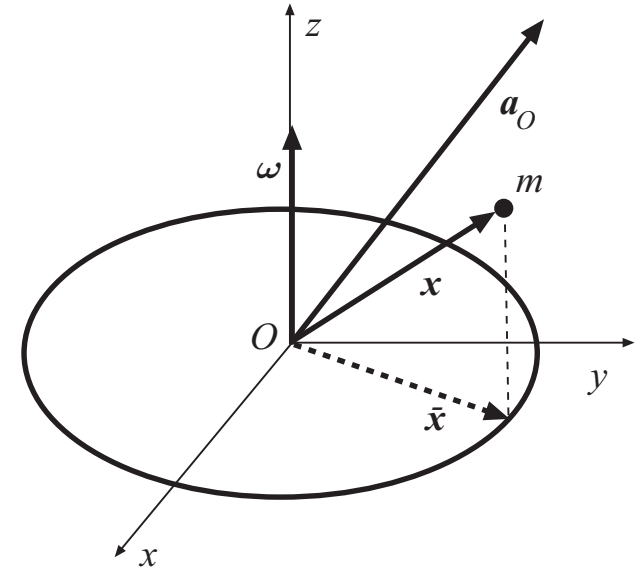
$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{3} & -\frac{mab}{4} & -\frac{mac}{4} \\ -\frac{mab}{4} & \frac{m(c^2+a^2)}{3} & -\frac{mbc}{4} \\ -\frac{mac}{4} & -\frac{mbc}{4} & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) L'energia cinètica de l'ortoeidre quan gira al voltant d'una de les seves diagonals amb velocitat angular ω és

$$\frac{\omega^2}{a^2+b^2+c^2} (a, b, c) \begin{pmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{3} & -\frac{mab}{4} & -\frac{mac}{4} \\ -\frac{mab}{4} & \frac{m(c^2+a^2)}{3} & -\frac{mbc}{4} \\ -\frac{mac}{4} & -\frac{mbc}{4} & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Resum de les relacions cinemàtiques per al sòlid rígid

Velocitat. La velocitat $\mathbf{v}$ (respecte del sistema fix) d'un punt $\mathbf{r}$ d'un sòlid en moviment ve donada per la relació $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, on $\mathbf{v}_O$ és la velocitat de O , $\boldsymbol{\omega}$ la velocitat angular, $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_O$. Si $\mathbf{r}$ es mou respecte del sòlid, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'$ la velocitat de $\mathbf{r}$ respecte del sòlid.



Acceleració

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x},$$

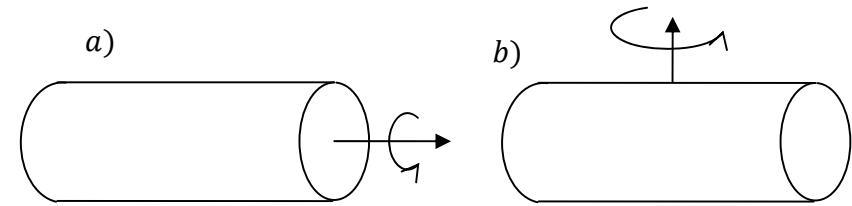
on $\mathbf{a}_O$ és l'acceleració de O . Si $\mathbf{r}$ es mou respecte del sòlid,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \mathbf{x}'' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'.$$

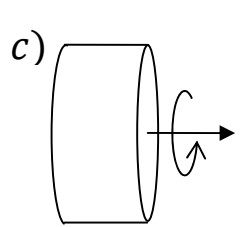
Remarca. Els vectors són objectes independents del sistema de referència. Donat un vector, el que depèn del sistema de referència són les seves coordenades.

Notes

1. L'expressió $T_{\text{rot}} = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3}$



mostra que T_{rot} és mínima quan la velocitat angular és paral·lela a l'eix principal que té el màxim moment d'inèrcia, com en la figura b). Aquesta observació explica perquè un cilindre circular llarg que gira al voltant del seu eix, com a la figura a), i com de fet foren els primers satèl·lits artificials, acaba girant, per petita que sigui la dissipació d'energia, al voltant d'un eix com a la figura b). Aques-



ta situació no es dona en cilindres com el de la figura c), ja que el moment d'inèrcia respecte de l'eix del cilindre és superior al moment d'inèrcia respecte d'un eix perpendicular. De fet, segons la taula de la pàgina 15, el moment d'inèrcia d'un cilindre homogeni res-

pecte del seu eix és $\frac{1}{2}mr^2$ i respecte d'un eix perpendicular pel seu centre és $\frac{1}{12}m(h^2 + 3r^2)$, de manera que aquest és el major si i només si $h > \sqrt{3}r$.

2. Per simetria cal entendre simetria geomètrica amb la propietat addicional que la massa situada en un punt i la situada en el punt "simètric" són iguals.

Exercicis M.5 (Tensor d'inèrcia)

M.5.1. Es defineix el *radi de gir* d'un sòlid al voltant d'un eix com $\sqrt{\mu/m}$, on μ és el moment d'inèrcia del sòlid respecte de l'eix i m la seva massa. Proveu que el radi de gir d'una barra rectilínia homogènia de longitud l respecte d'una perpendicular per un dels seus extrems és $l/\sqrt{3}$.

M.5.2. Proveu que l'energia cinètica d'una barra homogènia de massa m ve donada per $T = \frac{1}{6}m(\mathbf{u}^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2)$, on $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ són les velocitats dels seus extrems.

M.5.3. Proveu que qualsevol moment principal d'inèrcia no pot ser superior a la suma dels altres dos.

M.5.4. Suposem que un sòlid rígida té dos plans de simetria que passen per O i que aquests plans no són ortogonals. Mostreu que aleshores el sòlid és un giroscopi i que l'eix d'aquest giroscopi és la recta intersecció dels dos plans.

M.5.5. Trobeu el moment d'inèrcia d'un cub homogeni respecte d'una de les seves diagonals.

M.5.6. 1) Proveu que l'estat d'un sòlid rígid en un instant t està totalment determinat per les velocitats en aquest instant de tres punts no alineats A, B, C qualssevol del sòlid.

2) Si $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$ són les velocitats d'aquests tres punts, proveu que es compleix $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \cdot (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_C) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_C) = 0$, on $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C$ són els vectors de posició dels tres punts A, B, C , respectivament.

M.5.7. Considereu un sòlid rígid i suposem que el seu moviment és pla (és a dir, que cada punt del sòlid es manté en un pla paral·lel a un pla de referència).

1) Proveu que en aquest cas l'estat del sòlid en un instant de temps donat està totalment determinat per les velocitats en aquest instant de dos qualssevol dels seus punts, llevat quan aquests punts estan situats sobre una mateixa perpendicular al pla de referència (com en el cas general, però, les velocitats dels dos punts no poden ser arbitràries).

2) Proveu que si $\omega \neq 0$, en tot moment existeix almenys un punt (no necessàriament del sòlid) amb velocitat instantània nul·la (en aquest cas, de la recta per aquest punt perpendicular al pla de referència també en diem *eix instantani de rotació* del sòlid; el context sol ser suficient per discernir, quan emprem aquesta locució, si ens referim a aquest concepte o a la definició general, és a dir, a l'eix pel centre de masses amb vector director ω). És això cert en el cas d'un moviment arbitrari del sòlid?

M.5.8. Una placa rígida es mou sobre el pla xy . Si en un cert instant les velocitats dels punts $A(0,4)$ i $B(3,2)$ són $\mathbf{v}_A = (6,6)$ i $\mathbf{v}_B = (2,0)$, respectivament, quina és la velocitat en aquest instant del punt $C(2,4)$? Com és el moviment de la placa en aquest instant?