

MMF 10 / 1. *Mecànica*

4. Lleis de conservació. Equacions de Hamilton.

S. Xambó

Petit glossari

Observable. Funció $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ de l'espai d'estats. Si f no depèn de $\dot{\mathbf{q}}$, diem que és un *observable de configuració*.

Integral primera o quantitat conservada: observable f que és constant en el decurs de l'evolució temporal del sistema, és a dir, tal que $\dot{f} = 0$.

En un sistema lagrangià definit per la lagrangiana L , de l'observable $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ en diem *moment conjugat de q_k* .

Notem que en coordenades cartesianes rectangulars $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} = m_k \dot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{p}_k$.

Una coordenada q_k es diu que és *ignorable* (o *cíclica*) si L no depèn de q_k .

Exemple. $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$ és la lagrangiana d'una partícula de massa m sotmesa a un potencial central $V(r)$. Com que aquesta L no depèn de φ , φ és ignorable.

Proposició. Si en un sistema lagrangià la coordenada q_k és ignorable, llavors el seu moment conjugat p_k és una quantitat conservada.

Prova.
$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

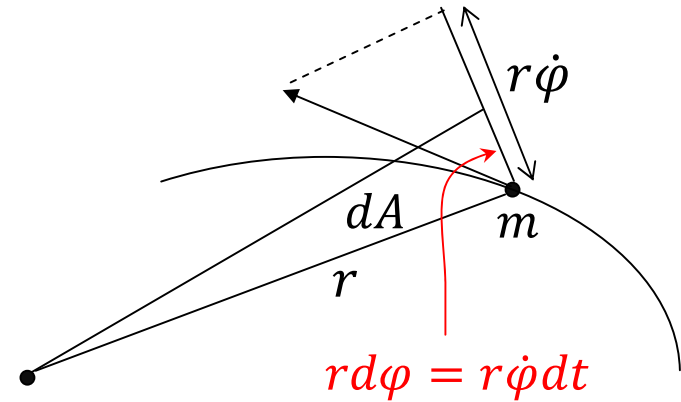
Exemple. El moment conjugat corresponent a la coordenada cíclica φ de la lagrangiana $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$ d'una partícula en un potencial central és $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$.

Com que φ és ignorable, p_φ és una quantitat conservada.

En ser $r\dot{\phi}$ la velocitat transversal de m ,

$$mr^2\dot{\phi} = r(mr\dot{\phi}) = h$$

és el moment angular de m respecte de l'origen. Així, doncs, h és una quantitat conservada.



Per altra banda,

$$2dA = r(r d\phi) = r^2 d\phi,$$

on A és l'àrea escombrada pel radi r , amb la qual cosa veiem que

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = h/2m$$

és una constant.

Aquest fet és la *segona llei de Kepler* (per una massa puntual movent-se en un potencial central), que se son enunciar dient que la *velocitat areolar* (és a dir, $\dot{A}$) és una constant.

Variació de l'energia i condicions per a la seva conservació

Considerem un sistema de N partícules amb lligadures holònomes. Sigui V un potencial per a les forces conservatives que actuen sobre les partícules del sistema i T l'energia cinètica. Recordem que

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

on T_i és homogeni de grau i en les $\dot{q}_k$. Sigui $E = T + V$ (direm que és l'energia mecànica del sistema) i $L = T - V$ (direm que és la funció lagrangiana).

Posarem $Q'_1, \dots, Q'_n$ per indicar les forces generalitzades de les forces no conservatives $\mathbf{F}'_i$ (així, doncs, $\mathbf{F}'_i - \partial V / \partial \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i$, la força total que actua sobre m_i). També posarem $W' = \sum_{k=1}^n Q'_k \dot{q}_k$ i direm que és la potència (generalitzada) de les forces no conservatives.

Lema (Euler). Si $f = f(x_1, \dots, x_n)$ és una funció homogènia de grau m en les variables $x_1, \dots, x_n$, llavors $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = mf$.

Prova. Basta derivar la relació $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, \dots, x_n)$ respecte de t i posar $t = 1$.

Corol·lari. $\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T_2 + T_1$.

Teorema. $\dot{E} = W' - \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0)$.

Prova.
$$\begin{aligned} \dot{T} &= \sum_k \frac{\partial T}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \sum_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \sum_k \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) + \sum_k \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} - Q'_k \right) \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= 2\dot{T} - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} - W' + \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \dot{T} + \dot{E} + \frac{\partial L}{\partial t} - W' - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0), \end{aligned}$$

d'on l'enunciat en resulta immediatament.

Corol·lari. Si les lligadures no depenen del temps, $\dot{E} = \frac{\partial V}{\partial t} + W'$.

Si a més V no depèn del temps, $\dot{E} = W'$.

Finalment, *l'energia mecànica es conserva per a sistemes conservatius amb lligadures i potencial independents del temps.*

Remarca. Les forces no conservatives per a les quals $W' < 0$ es diuen *dissipatives*, i si $W' = 0$, *giroscòpiques* (les forces de Coriolis ho són, ja que són perpendiculars a les velocitats).

Equacions de Hamilton

L'observable $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$ s'anomena *hamiltonià* (o *hamiltoniana*).

Transformació de Legendre:

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}.$$

Si la transformació de Legendre és un difeomorfisme, diem que el sistema mecànic és un *sistema hamiltonià*.

Exemple. Un multioscil·lador harmònic és un sistema hamiltonià, ja que si

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k_i q_i^2,$$

llavors $(p_1, \dots, p_n) = (m_1 \dot{q}_1, \dots, m_n \dot{q}_n)$.

Proposició. $H = T_2 - T_0 + V = E - (T_1 + 2T_0)$.

Prova. Tenim que $\sum_k p_k \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T_2 + T_1$ (hem usat el lema d'Euler), de manera que

$$H = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V) = T_2 - T_0 + V .$$

Finalment és clar que $T_2 - T_0 = T - (T_1 + 2T_0)$ i d'aquí la segona expressió en resulta immediatament.

Corol·lari. Si $T = T_2$ (la qual cosa passa si les lligadures són independents del temps), llavors $H = E$.

Teorema (Equacions de Hamilton). L'evolució d'un sistema hamiltonià ve regit per les equacions

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} .$$

A més, es compleixen les relacions

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} .$$

Prova. D'una banda tenim que

$$dH = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt .$$

Per l'altra, $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$, per definició, i

$$\begin{aligned} dH &= \sum_k \dot{q}_k dp_k + \sum_k p_k d\dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \end{aligned}$$

En el darrer pas hem usat la definició $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ i el fet que, per les equacions d'Euler–Lagrange, $\dot{p}_k = \partial L / \partial q_k$. Ara les equacions de Hamilton s'obtenen directament comparant les dues expressions de dH . Igualant els coeficients de dt , obtenim $\partial H / \partial t = -\partial L / \partial t$. Finalment

$$\dot{H} = \sum_k (\partial H / \partial q_k) \dot{q}_k + \sum_k (\partial H / \partial p_k) \dot{p}_k + \partial H / \partial t ,$$

d'on $dH/dt = \partial H/\partial t$, ja que les equacions de Hamilton ens donen

$$\sum_k (\partial H/\partial q_k) \dot{q}_k + \sum_k (\partial H/\partial p_k) \dot{p}_k = \sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k - \sum_k \dot{q}_k \dot{p}_k = 0,$$

i això acaba la prova.

Corol·lari. Si L no depèn de t , H és una quantitat conservada.

Remarca. Les equacions de Hamilton formen un sistema de $2n$ equacions diferencials ordinàries de primer ordre en les variables $q_1, \dots, q_n$ i $p_1, \dots, p_n$, mentre que les de Lagrange formen un sistema de n equacions diferencials ordinàries de segon ordre en els q_k . Així, doncs, les equacions de Hamilton es poden pensar com un exemple de la transformació d'un sistema de n equacions diferencials ordinàries de segon ordre a un d'equivalent de $2n$ equacions de primer ordre, prenent $p_1, \dots, p_n$ com a “variables auxiliars” (en lloc de $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$).

Parèntesi de Poisson

Es defineix el *parèntesi de Poisson* $\{f, g\}$ de dos observables f i g per la fórmula

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

Remarca. A l'exercici M.4.1 s'inclouen algunes de les seves propietats.

Teorema (Llei de Poisson). Per a tot observable f d'un sistema hamiltonià,

$$\dot{f} = \{f, H\} + \partial_t f .$$

En particular, $\dot{f} = \{f, H\}$ si f no depèn del temps.

Prova. En efecte,

$$\dot{f} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \partial_t f = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \partial_t f .$$

Teorema de Noether

Sigui X l'espai de configuració (l'espai de les $\mathbf{q}$) d'un sistema lagrangià amb lagrangiana L . Una *simetria* del sistema (X, L) és un difeomorfisme

$$\varphi: X \rightarrow X$$

tal que

$$L(\varphi \mathbf{q}, d\varphi \cdot \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

on $d\varphi$ és la diferencial ordinària de φ .

Exemple. En un sistema isolat de partícules lliures, amb forces d'interacció donades per un potencial V que només depèn de les distàncies entre aquestes partícules, les translacions i les rotacions (o, més en general, els desplaçaments) són simetries del sistema.

Això és així perquè els desplaçaments conserven les distàncies (de manera que deixen invariant V) i, a més, perquè si φ és un desplaçament, aleshores $d\varphi = \tilde{\varphi}$ (la transformació lineal associada, que és una

isometria), amb la qual cosa $(d\varphi)(\dot{\mathbf{r}}) = \tilde{\varphi}(\dot{\mathbf{r}})$ i, com a conseqüència, l'energia cinètica també és invariant per l'acció de φ .

Una *família de simetries* (uniparamètrica) del sistema (X, L) és un conjunt $\varphi_s: X \rightarrow X$ ($s \in (-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$) de simetries del sistema tal que $\varphi_0 = Id$ i de manera que l'aplicació

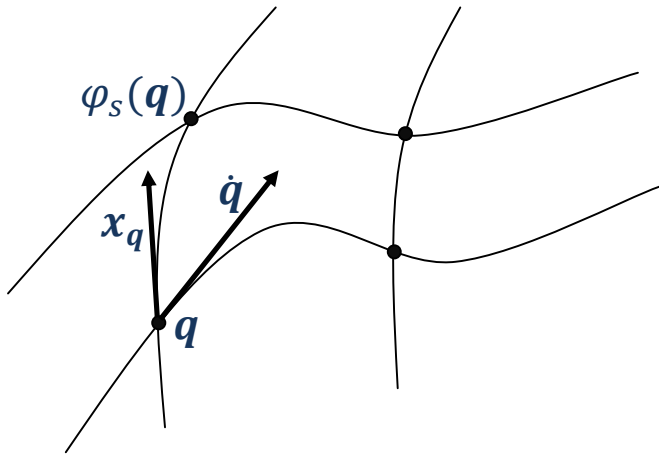
$$(-\alpha, \alpha) \times X \rightarrow X, \quad (s, \mathbf{q}) \mapsto \varphi_s(\mathbf{q})$$

és diferenciable.

Si a més es compleix que $\varphi_{s'} \circ \varphi_s = \varphi_{s+s'}$ sempre que $s, s', s + s' \in (-\alpha, \alpha)$, es diu que la família és un *grup uniparamètric de simetries*.

Exemple. Per al sistema Σ de l'exemple de la pàgina anterior, si $\mathbf{a}$ és un vector i posem $\varphi_s = t_{s\mathbf{a}}$ (la translació de vector $s\mathbf{a}$, $s \in \mathbb{R}$), aleshores φ_s és una grup uniparamètric de simetries de Σ .

Anàlogament, si posem $\varphi_s = \rho_{sa}$ ($s \in \mathbb{R}$) per denotar la rotació d'eix $\langle \mathbf{a} \rangle$ i amplitud $sa = s|\mathbf{a}|$, aleshores φ_s és un grup uniparamètric de simetries de Σ .



Si φ_s és una família de simetries, li podem associar el camp vectorial $\mathbf{x}$ sobre X definit per la relació

$$\mathbf{x}_q = \left. \frac{d}{ds} (\varphi_s(\mathbf{q})) \right|_{s=0}.$$

En altres termes, $\mathbf{x}_q$ és el vector tangent en el punt $\mathbf{q}$ a la corba $s \mapsto \varphi_s(\mathbf{q})$.

Exemple. Amb les notacions de l'exemple de la pàgina anterior, i posant $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, el camp vectorial $\mathbf{x}$ associat al grup uniparamètric de translacions $\{t_{sa}\}$ ve donat per la relació

$$\mathbf{x}_q = (\mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}).$$

Exemple. Amb les notacions de l'exemple de la pàgina anterior, el camp vectorial $\mathbf{x}$ associat al grup uniparamètric de rotacions $\{\rho_{sa}\}$ ve donat per la fórmula

$$\mathbf{x}_q = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{a} \times \mathbf{r}_N).$$

En efecte, prenent coordenades rectangulars apropiades, podem suposar que $\mathbf{a} = (0, 0, a)$, amb $a = |\mathbf{a}| > 0$. D'aquesta manera la matriu de ρ_{sa} és igual a

$$\begin{pmatrix} \cos(sa) & -\sin(sa) & 0 \\ \sin(sa) & \cos(sa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultat d'aplicar-la a un vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$, seguit de la seva derivada respecte de s per $s = 0$, ens dóna el vector $(-ay, ax, 0)$, que és igual al producte vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$, i d'aquí resulta immediatament l'afirmació.

Teorema (E. Noether). Si φ_s és una família de simetries d'un sistema mecànic lagrangià i $\mathbf{x}$ és el camp vectorial associat, llavors

$$I = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

és una quantitat conservada, on $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$.

Prova. Per definició de simetria tenim que

$$L(\varphi_s \mathbf{q}, \varphi_s \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

és independent de s , de manera que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} L(\varphi_s \mathbf{q}, \varphi_s \dot{\mathbf{q}}, t) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} L \left(\varphi_s \mathbf{q}, \frac{d}{dt} \varphi_s \mathbf{q}, t \right) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} L(\mathbf{q} + s\mathbf{x} + \dots, \dot{\mathbf{q}} + s\dot{\mathbf{x}} + \dots, t) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \left(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + s \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) + \dots \right) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \mathbf{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Remarca. Useu el teorema de Noether per obtenir de nou, d'una altra manera, el fet que el moment conjugat d'una variable cíclica és una quantitat conservada.

Exemple (Conservació del moment lineal). Considerem un sistema mecànic Σ . Considerem un vector unitari $\mathbf{a}$ i suposem que les translacions $t_{s\mathbf{a}}$ són simetries de Σ . Sabem que el moment conjugat de $\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i$ és $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$, de manera que $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$. Per altra banda sabem que el camp vectorial $\mathbf{x}$ associat a aquest grup uniparamètric és $\mathbf{x}_{\mathbf{q}} = (\mathbf{a}, \dots, \mathbf{a})$. Per tant, l'observable I que s'obté aplicant el teorema de Noether és

$$I = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right) \cdot \mathbf{a},$$

que és la component del *moment lineal* $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$ de Σ en la direcció $\mathbf{a}$. En particular resulta que $\mathbf{P}$ és una quantitat conservada si les

translacions són simetries de Σ (com és el cas per al sistema de l'exemple de la pàgina 13).

Exemple. El centre de masses $\mathbf{R}$ d'un sistema mecànic format per masses m_i situades en els punts $\mathbf{r}_i$ es defineix per la fórmula $\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i / m$, on $m = \sum m_i$ (equivalentment, $m\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i$). Per un sistema mecànic com el de l'exemple de la pàgina 14, $\mathbf{R}$ es mou amb velocitat constant. Més generalment, es compleix

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F},$$

on $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ (es diu que $\mathbf{F}$ és la *resultant* de totes les forces aplicades).

Conservació del moment angular

Considerem un sistema mecànic Σ i usem les notacions de l'exemple de la pàgina 17. Considerem un vector unitari $\mathbf{a}$ i suposem que les rotacions $\rho_{s\mathbf{a}}$ són simetries de Σ . Sabem que el camp vectorial $\mathbf{x}$ associat a aquest grup uniparamètric és

$$\mathbf{x}_{\mathbf{q}} = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{a} \times \mathbf{r}_N).$$

Tenint en compte que el moment conjugat de $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ és $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$, veiem que l'observable I que s'obté aplicant el teorema de Noether és

$$I = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{a} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right)$$

(hem aplicat la fórmula del producte mixt), que és la component del *moment angular* (o *cinètic*) $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ de Σ en la direcció $\mathbf{a}$. En particular resulta que $\mathbf{L}$ es conserva per a un sistema com el de l'exemple de la pàgina 13.

M.4.1. El parèntesi de Poisson és bilineal, antisimètric i que satisfà la relació

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

i l'anomenada identitat de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

M.4.2 (Una generalització del teorema de Noether). Es diu que una Lagrangiana $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ és *invariant gauge* per un grup uniparamètric de transformacions φ_s de l'espai de configuració X si existeix una funció $f(\mathbf{q}, t, s)$ tal que

$$L(\varphi_s \mathbf{q}, \varphi_s \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + df(\mathbf{q}, t, s)/ds.$$

Demostreu que si $\mathbf{x}$ és el camp vectorial associat a φ_s i $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$, aleshores $I = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \partial f / \partial s|_{s=0}$ és una quantitat conservada.

M.4.3. Considerem la lagrangiana unidimensional

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq.$$

Proveu que $L(q, \dot{q})$ és invariant gauge (v. l'exercici precedent) pel grup uniparamètric $\varphi_s(q) = q + s$ i que la corresponent quantitat conservada és

$$I = m\dot{q} - mgt$$

(així $v_0 = I/m$ és la velocitat en l'instant inicial). Notem que l'invariant I ens permet obtenir, amb una única integració, l'equació d'evolució:

$$q = q_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

M.4.4. Una partícula de massa m es pot moure lliurement per l'espai E_3 sota un potencial que en coordenades cilíndriques (r, φ, z) té la forma

$$V = V(r, k\varphi + z),$$

on k és una constant. Comproveu que $(r, \varphi, z) \mapsto (r, \varphi + s, z - ks)$ és un grup uniparamètric de simetries de L i obtingueu que la corresponent quantitat conservada és

$$p_\varphi - kp_z = mr^2\dot{\varphi} - km\dot{z}.$$

[També podeu resoldre el problema usant les coordenades (r, φ, ξ) , amb $\xi = k\varphi + z$, i el fet que en aquestes coordenades φ és ignorable].

M.4.5. Una partícula es mou en absència de gravetat per l'hèlix $x = \cos \phi$, $y = \sin \phi$, $z = \lambda \phi$ (λ és un nombre real no nul donat). Demostreu que la quantitat conservada associada a la simetria helicoidal és $\lambda P_z + M_z$, on P_z i M_z són els moments lineal i angular en la direcció z , respectivament.

M.4.6 (Teorema de Noether per a sistemes hamiltonians). 1) Per analogia amb la definició de simetria d'un sistema lagrangià, definim una simetria (infinitesimal) d'un sistema hamiltonià Σ , amb hamiltoniana $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ independent del temps, com un camp $X = X(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ definit a l'espai de fases tal que $H(\varphi_s(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, on φ_s és el grup uniparamètric generat per X (és a dir, $X(q, p) = \left. \frac{d}{ds} (\varphi_s(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \right|_{s=0}$). Demostreu que X és una simetria de Σ si, i només si,

$$\frac{d}{ds} H(\varphi_s(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = 0.$$

2) Sigui X un camp de simetries de Σ i suposem que $X = (\partial I / \partial \mathbf{p}, -\partial I / \partial \mathbf{q})$ per una certa funció $I = I(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Proveu que I és una integral primera de Σ .

M.4.7. En relació a l'exemple de la pàgina 35 del capítol 3 (Formalisme lagrangià):

- 1) Comproveu que és un sistema hamiltonià i trobeu la seva hamiltoniana H .
- 2) Investigueu si H és una quantitat conservada o no, i si coincideix amb l'energia.

M.4.8. Una partícula de massa m es mou sense fricció sobre la superfície del cilindre d'equació $x^2 + y^2 = R^2$. Sobre m actua una força del tipus $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, on $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és el vector de posició de la partícula i k és una constant.

- 1) Comproveu que es tracta d'un sistema conservatiu i calculeu-ne el potencial.
- 2) Calculeu la lagrangiana en coordenades cilíndriques.
- 3) Comproveu que és un sistema hamiltonià, calculeu-ne la hamiltoniana i escriviu les corresponents equacions de Hamilton.
- 4) Identifiqueu, si existeixen, quantitats conservades.
- 5) Comproveu que, verticalment, el moviment de la partícula és harmònic simple de freqüència angular $\omega = k/m$.

M.4.9. Una partícula de massa m es mou en una dimensió x sota l'acció d'una força del tipus

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-t/\tau},$$

on k i τ són constants positives.

- 1) Calculeu la lagrangiana i la hamiltoniana del sistema.
- 2) Determineu si la hamiltoniana coincideix amb l'energia i si l'energia és una quantitat conservada.

M.4.10. Una partícula de massa m es mou sense fricció sobre la superfície de revolució

$$x^2 + y^2 = \left(a \cosh^{-1} \left(\frac{z}{a} \right) \right)^2, \quad a > 0.$$

La partícula està sotmesa a un potencial que depèn de la posició segons la fórmula $V = \frac{1}{2}ks^2$, on s és la distància sobre la superfície al punt $P(0,0,a)$.

Considereu com a coordenades generalitzades la distància ρ a l'eix de revolució i l'angle de rotació φ mesurat des de l'eix Ox .

- 1) Trobeu la lagangiana en les coordenades ρ, φ .
- 2) Calculeu la força de lligadura que manté la partícula sobre la superfície.
- 3) Trobeu la hamiltoniana i determineu, si existeixen, quantitats conservades.
- 4) Si inicialment es col·loca la partícula en un punt de la superfície a distància ρ de l'eix de revolució i amb velocitat nul·la, justifiqueu que la partícula caurà recorrent el meridià corresponent i arribant al punt P . Calculeu també amb quina velocitat arribarà en aquest punt.

Referències

Tant les equacions de Lagrange i de Hamilton com la teoria de Noether es poden formular d'una manera intrínseca (sense usar coordenades) en el marc de la geometria diferencial. Per a una bona presentació d'aquestes qüestions, i d'altres de relacionades, es poden recomanar els textos

I. Agricola, T. Friedrich: *Global Analysis: Differential Forms in Analysis, Geometry and Physics*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 12. AMS, 2002 (Chapter 7: Symplectic Geometry and Mechanics).

V.I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. GTM 60, Springer, 1989. L'edició russa és de 1974, i la traducció francesa de la MIR de 1976.