

## MMF 10 / 1. *Mecànica*

### 3. Formalisme Lagrangià

S. Xambó



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

*Mécanique analytique* (1788)

- Sistemes mecànics
- Espai d'estats
- Equacions de Lagrange
- Lligadures ideals
- Equacions d'Euler—Lagrange
- Exemples sense lligadures
- Exemples amb lligadures

Escriu les equacions del moviment d'un sistema mecànic en termes «coordenades generalitzades» arbitràries.

Ha estat una de les influències importants del desenvolupament de la geometria de les varietats diferenciables.

El «mètode lagrangià» ha tingut i té un paper principal en la teoria (clàssica i quàntica) de camps.

## Sistemes mecànics

$m_1, \dots, m_N$  *masses puntuals* (nombres reals positius).

$\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  *posicions* de les masses (vectors)

$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i$  *velocitat* de  $m_i$

$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  *moment* (lineal) de  $m_i$

$\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  *forces* (vectors)

$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$  (2a llei de Newton:  $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$ )

$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \alpha = 1, \dots, m, m \geq 0$  *lligadures*<sup>1</sup>

$X_t$  *espai de configuració* en l'instant  $t$

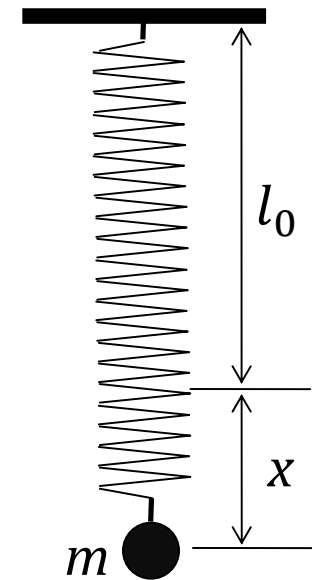
$$X_t = \{(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in E_3^N \mid f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \alpha = 1, \dots, m\}$$

(si no depèn de  $t$ , el denotarem simplement  $X$ )

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$  expressió de les posicions en funció de paràmetres  $q_1, \dots, q_n$  i  $t$ . Suposem que aquestes expressions parametritzen (localment)  $X_t$ , fet que expressem dient que les lligadures són **holònomes** i que  $q_1, \dots, q_N$  són **coordenades generalitzades**.

### Oscil·lador harmònic

$N = 1$ , i no hi ha lligadures;  $X = \mathbb{R}$ ;  $q = x$  és una coordenada generalitzada;  $F = -kx$  (usualment  $x$  és la diferència entre una elongació  $l$ , posem per cas d'una molla com la de la figura, i una elongació  $l_0$  d'equilibri). En lloc de  $X = \mathbb{R}$ , és més realista prendre  $X = (l_0 - a, l_0 + a)$ , on  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .



## ***Pèndol simple oscil·lant en un pla vertical***

$$N = 1, \mathbf{F} = m\mathbf{g};$$

Una lligadura independent del temps:

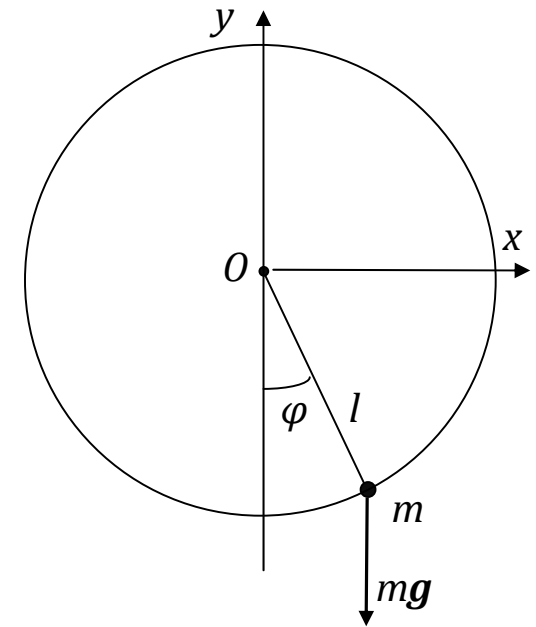
$$\mathbf{r}^2 - l^2 = 0$$

(origen en el punt de suspensió);

$X = S^1(O, l)$ , circumferència de radi  $l$  i centre  $O$ ;

$$q = \varphi;$$

$$\mathbf{r}(\varphi) \equiv (l \sin(\varphi), -l \cos(\varphi))$$



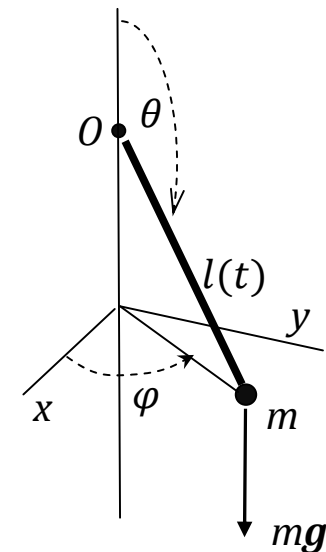
## ***Pèndol simple esfèric de longitud variable***

$$N = 1, \mathbf{F} = m\mathbf{g};$$

Una lligadura dependent del temps:

$$f(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r}^2 - l(t)^2 = 0$$

(origen en el punt de suspensió,  $l(t)$  funció donada);



$X_t = S^2(O, l(t))$ , esfera de centre  $O$  i radi  $l(t)$ ;

$(q_1, q_2) = (\varphi, \theta)$ ;

$\mathbf{r}(\varphi, \theta) \equiv (l(t) \sin(\theta) \cos(\varphi), l(t) \sin(\theta) \sin(\varphi), -l(t) \cos(\theta))$ ;

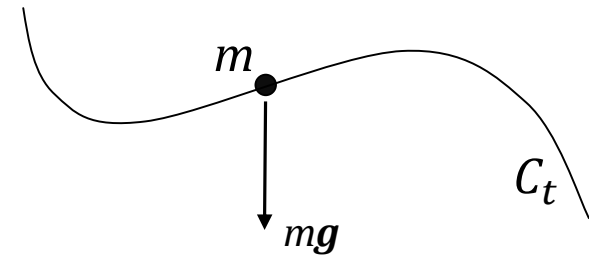
### ***Boleta que llisca sobre una corba***

$N = 1, \mathbf{F} = m\mathbf{g}$ ;

Dues lligadures (equacions locals de  $C_t$ ):

$f_1(\mathbf{r}, t) = 0, f_2(\mathbf{r}, t) = 0$ ;

$q = s$  (distància sobre  $C_t$ );  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ .



### ***Pèndol doble oscil·lant en un pla***

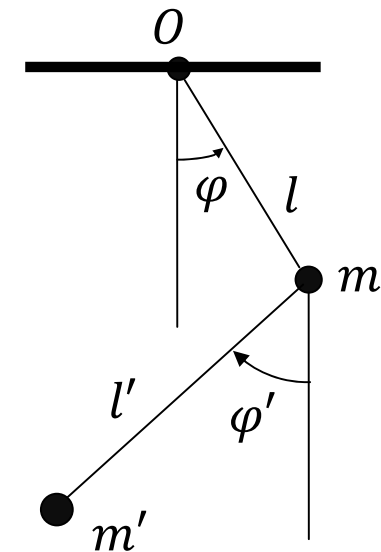
$N = 2, \mathbf{F} = m\mathbf{g}, \mathbf{F}' = m'\mathbf{g}$ ;

Dues lligadures:  $\mathbf{r}^2 - l^2 = 0, (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - l'^2 = 0$ ;

$X = S^1(l) \times S^1(l')$ ;  $(q, q') = (\varphi, \varphi')$ ;

$\mathbf{r}(\varphi, \varphi') = (l \sin(\varphi), -l \cos(\varphi))$

$\mathbf{r}'(\varphi, \varphi') = (l \sin(\varphi) + l' \sin(\varphi'), -l \cos(\varphi) - l' \cos(\varphi'))$

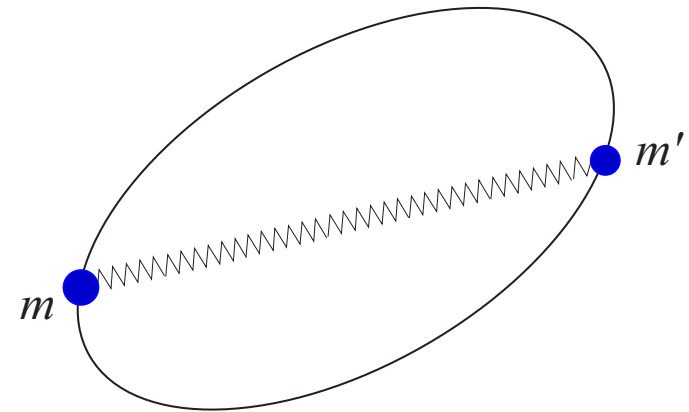


## *Dues masses connectades per una molla que llisquen sobre una corba $C$*

$$N = 2;$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + k(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{F}' = m'\mathbf{g} + k(\mathbf{r} - \mathbf{r}');$$



## *Model newtonià de la gravitació*

$N$  arbitrari;

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N m}^2 \text{Kg}^{-2};$$

No hi ha lligadures i com a coordenades podem usar les  $3N$  coordenades cartesianes dels punts.

## Espai d'estats

$S \subseteq E_3^N \times E_3^N \times \mathbb{R}$ , format pels punts  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$  tals que  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \in X_t$  i amb  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  velocitats possibles segons les lligatures.

Notem que  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  han de complir les relacions

$$\sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Per altra banda,

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad [*]$$

**Coordenades de l'espai d'estats:**  $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ .

**Lema.**  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}.$

**Prova.** La primera relació resulta de  $[*]$  i la segona de la regla de la cadena i el teorema d'Schwarz (sobre les segones derivades).

## Equacions de Lagrange

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \text{ (*energia cinètica*)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

$T_i$  = part de  $T$  homogènia de grau  $i$  en les  $\dot{q}_k$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2$$

$T = T_2$  si les lligadures no depenen del temps.

**Teorema** (Lagrange). L'evolució d'un sistema mecànic amb lligadures holònomes es regeix per les equacions

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

on  $Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$  (*forces generalitzades*).

**Prova.** Si en l'interval  $dt$  el vector  $\mathbf{r}_i$  varia  $d\mathbf{r}_i$ , el treball  $W$  produït per les forces en aquest interval és

$$\begin{aligned} W &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt \right) \\ &= \sum_k \left( \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) dq_k + \left( \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) dt \\ &= \sum_k Q_k dq_k + Q_t dt \end{aligned}$$

on hem posat  $Q_t = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$ .

Com que per la segona llei de Newton tenim

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i,$$

també podem escriure:

$$\begin{aligned} W &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{r}_i \\ &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt \right) \\ &= \sum_{i,k} m_i \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) dq_k + Q_t dt \\ &= \sum_{i,k} m_i \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) dq_k + Q_t dt \\ &= \sum_{i,k} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right) dq_k + Q_t dt \\ &= \sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) dq_k + Q_t dt, \end{aligned}$$

on en el tercer pas hem usat la relació  $\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$  (primera igualtat del lema) i en el quart la relació  $\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k}$  (segona igualtat del lema). Ara les equacions de l'enunciat resulten de comparar els coeficients de  $dq_k$  en les dues expressions de  $W$ .

**Remarca.** Si no hi ha lligadures, i usem les coordenades cartesianes originals, les equacions de Lagrange equivalen a les equacions de Newton.

**Exemple** (Expressió del moviment d'una partícula en un pla usant coordenades polars). Tenim  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ . Per expressar  $T$  en les coordenades polars  $r$  i  $\varphi$ , derivem respecte de  $t$  les relacions

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi :$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Substituint en l'expressió de  $T$ , resulta

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2).$$

Calculem ara les forces generalitzades  $Q_r$  i  $Q_\varphi$ :

$$Q_r = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{r}} = F_r,$$

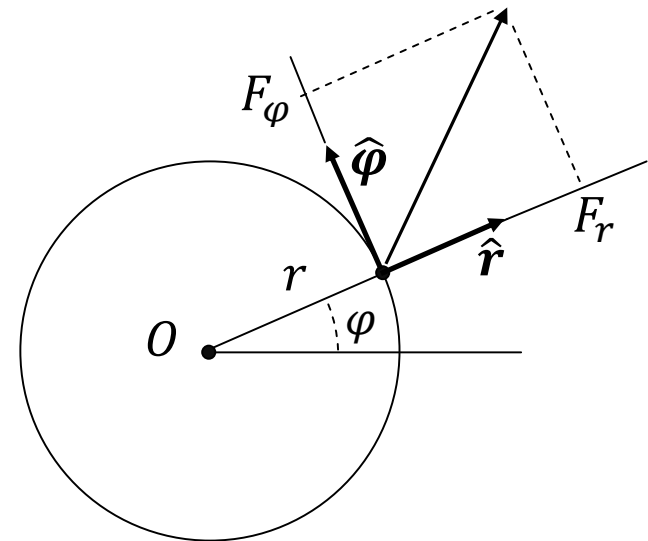
$$Q_\varphi = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \mathbf{F} \cdot (-r \sin \varphi, r \cos \varphi) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}^\perp = rF_\varphi,$$

on  $F_r$  i  $F_\varphi$  són les projeccions ortogonals de  $\mathbf{F}$  sobre la direcció  $\mathbf{r}$  i sobre la perpendicular a aquesta direcció.

Finalment, a partir de l'expressió de  $T$  en termes de  $r$  i  $\varphi$  és immediat calcular les expressions  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r}$ ,  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}$ , i obtenim

que, en aquest exemple, les equacions de Lagrange són

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = F_r, \quad mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{\varphi}\dot{r} = rF_\varphi.$$



## Lligadures ideals

Considerem un sistema mecànic amb lligadures holònomes

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Direm que aquestes lligadures són *ideals* si per a qualsevol configuració existeixen  $\lambda_{\alpha} \in \mathbb{R}$  tals que

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (\text{en notació compacta: } \mathbf{R} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{\partial} f_{\alpha})$$

on  $\mathbf{R}_i$  és la resultant de les forces de lligadura sobre la  $i$ -èsima partícula (observem que les  $\lambda_{\alpha}$  generalment depenen de les  $\mathbf{r}_i$  en el seu conjunt, i possiblement de  $t$ , però que no depenen de  $i$ ).

La utilitat del concepte de lligadura ideal prové, d'una banda, del fet que es compleix en moltes circumstàncies (almenys en primera aproximació) i, de l'altra, que la contribució de les forces de lligadura en el càlcul de les forces generalitzades és 0 per a lligadures ideals.

**Exemple.** La lligadura d'un pèndol simple és ideal. En efecte, la lligadura té la forma

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - l^2 = 0,$$

on  $l$  és la longitud del pèndol i  $\mathbf{r}$  el vector de posició de la massa del pèndol respecte del punt de suspensió. Per altra banda, la força de lligadura  $\mathbf{R}$  és paral·lela al pèndol, és a dir,  $\mathbf{R} = \mu \mathbf{r}$  per algun  $\mu \in \mathbb{R}$ . Ara només cal observar que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 2\mathbf{r},$$

de manera que

$$\mathbf{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}, \quad \lambda = \mu/2.$$

**Exemple.** Les lligadures d'un pèndol doble són ideals.

En efecte, si  $O$  és el punt de suspensió del primer pèndol i  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r}'$  són els vectors de posició respecte de  $O$  de les corresponents masses  $m$  i  $m'$ , aleshores les forces de lligadura  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{R}'$  tenen la forma següent:

$$\mathbf{R} = \mu \mathbf{r} + \mu'(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{R}' = \mu'(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

on  $\mu, \mu'$  són nombres reals (hem usat la tercera llei de Newton, segons la qual la força que  $m$  exerceix sobre  $m'$  és igual, però de signe contrari, a la que  $m'$  exerceix sobre  $m$ ). Per altra banda les lligadures són

$$f = \mathbf{r}^2 - l^2 = 0, \quad f' = (\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - l'^2 = 0,$$

de manera que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 2\mathbf{r}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}'} = 0;$$

$$\frac{\partial f'}{\partial \mathbf{r}} = 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{r}'} = 2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

|               | $\partial_{\mathbf{r}}$                           | $\partial_{\mathbf{r}'}$         |
|---------------|---------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\partial f$  | $2\mathbf{r}$                                     | 0                                |
| $\partial f'$ | $2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$                     | $2(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$    |
| $\mathbf{R}$  | $\mu \mathbf{r} + \mu'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ | $\mu'(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ |

d'on resulta que

$$\mathbf{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \lambda' \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{R}' = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}'} + \lambda' \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{r}'}$$

amb  $\lambda = \mu/2$  i  $\lambda' = \mu'/2$ , i això estableix l'afirmació.

**Exemple.** Considerem una partícula que es mou sense fricció sobre una superfície variable  $f(\mathbf{r}, t) = 0$  (en aquest cas, l'espai de configuració és, per a cada  $t$ , la superfície  $X_t = \{\mathbf{r} \in E_3 | f(\mathbf{r}, t) = 0\}$ ). Donat que no hi ha fricció, la força de lligadura és perpendicular a  $X_t$ , ja que en cada instant la superfície no pot exercir cap força tangencial sobre la partícula. Per altra banda, sabem que el gradient  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$  és un vector perpendicular a  $X_t$ , de manera que la força de lligadura  $\mathbf{R}$  i el gradient  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$  són paral·lels. Per tant, existeix  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$ , i això prova que la lligadura és ideal.

**Exemple.** Un *sòlid rígid* es pot pensar com un conjunt de partícules puntuals de masses  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sotmeses a les lligadures

$$f_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - d_{ij}^2 = 0 ,$$

on  $d_{ij}$  són constants. Si posem  $\mathbf{R}_{ij}$  per denotar la força de lligadura que  $m_j$  exerceix sobre  $m_i$ , llavors

$$\mathbf{R}_{ij} = \mu_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

on  $\mu_{ij} \in \mathbb{R}$  i  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ , per la tercera llei de Newton.

Si definim  $\lambda_{ij} = \mu_{ij}/4$ , llavors

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \mathbf{r}_k} &= \sum_j 2\lambda_{kj} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) - \sum_i 2\lambda_{ik} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \\ &= \sum_j \mu_{kj} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \\ &= \sum_j \mathbf{R}_{kj} = \mathbf{R}_k \end{aligned}$$

i això estableix que les lligadures d'un sòlid rígid són ideals.

**Exemple.** Considerem una partícula que es mou sense fricció sobre una corba  $X_t$  (possiblement variable). La força de lligadura  $\mathbf{R}$  és perpendicular a la corba, ja que la no existència de fricció ens diu que la corba no pot exercir forces tangencials sobre  $m$ . Si la corba ve donada per les equacions  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $g(\mathbf{r}, t) = 0$  (això sempre és possible localment), aleshores  $\partial f / \partial \mathbf{r}$  i  $\partial g / \partial \mathbf{r}$  formen una base del pla perpendicular a  $X_t$  i, per tant, existeixen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tals que

$$\mathbf{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}},$$

i això prova que les lligadures  $f$  i  $g$  són ideals.

**Teorema.** En un sistema mecànic amb lligadures holònomes ideals, la contribució de les forces de lligadura en les forces generalitzades és nul·la.

**Prova.** La part de la força generalitzada  $Q_k = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$  que correspon a les forces de lligadura  $\mathbf{R}_i$  és  $\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$ . Si les lligadures  $f_\alpha$  són ideals, sabem que existeixen funcions  $\lambda_\alpha$  tals que  $\mathbf{R}_i = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i}$ , de manera que

$$\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i,\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} = 0 ,$$

ja que  $f_\alpha$  és idènticament nul·la com a funció de les  $q_k$ .

**Remarca.** D'ara endavant, només considerarem sistemes amb lligadures holònomes ideals i posarem  $\mathbf{F}_i$  per denotar la *força neta* (és a dir, la que resulta de descomptar les forces de lligadura) sobre la partícula  $i$ -èsima. Així, doncs,  $\mathbf{F}_i$  és la suma de les forces d'interacció amb les altres partícules i de les forces aplicades, i per al càlcul de les forces generalitzades només ens cal tenir en compte aquestes forces.

**Corol·lari.** L'evolució d'un sistema mecànic amb lligadures holònomes ideals ve regit per les equacions de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

on  $Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$  són les forces generalitzades corresponents a les forces netes.

**Remarca** (Principi de d'Alembert). Podria semblar, quan considerem el teorema anterior, que les forces de les lligadures ideals no fan treball. Això, però, no és així, ja que per disposar de lligadures dependents del temps cal incorporar una potència externa (una certa motorització) per a realitzar-les, i d'aquesta potència una part pot aparèixer com a potència de les forces de lligadura. De fet, si tenim lligadures holònomes ideals  $f_1, \dots, f_m$  i, amb les notacions usades fins ara,  $\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_i}$ , llavors la potència  $W = \sum_i \mathbf{R}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$  produïda per les forces  $\mathbf{R}_i$  és igual a  $-\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}$  (és una conseqüència immediata de la regla de la cadena). En particular resulta que  $W = 0$  si les lligadures ideals són independents del temps (aquest fet, que equival a dir que *les forces de lligadura de les lligadures ideals independents del temps no fan treball*, es coneix com a **principi de d'Alembert dels treballs virtuals**).

**Exemple** (Problemes d'estàtica). El principi de d'Alembert es pot usar per resoldre problemes d'estàtica en els quals les lligadures són ideals. En un sistema mecànic estàtic, les forces totals (incloent-hi les de lligadura) han de ser nul·les. En particular, el treball d'aquestes forces en qualsevol variació infinitesimal de la configuració del sistema ha de ser 0. Atès que les forces de lligadura, per a lligadures ideals, no fan treball, en resulta que

*el corresponent treball de les forces netes  $F_i$  (les que resulten d'ometre les forces de lligadura) també ha de ser 0.*

Per aplicar aquest fet, cal descriure la configuració del sistema en coordenades generalitzades  $q_i$  i imposar que en una variació infinitesimal  $dq_i$  d'aquesta configuració el treball de les forces externes i d'interacció que actuen sobre el sistema és 0. Per a una il·lustració d'aquest mètode, vegeu l'exercici **M.3.1**.

## Equacions d'Euler-Lagrange

Si les forces  $\mathbf{F}_i$  tenen la forma

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = -\mathbf{grad}_{\mathbf{r}_i}(V), \quad \mathbf{F} = -\partial V \text{ en forma compacte,}$$

diem que són *conservatives* i que  $V$  és una funció *potencial*.

Un *sistema mecànic conservatiu* és un sistema mecànic amb lligadures holònomes ideals i forces netes conservatives.

### *Potencial newtonià*

$$V = G \sum_{i < j} m_i m_j / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Notem que  $\partial(1/r) = -r^{-3}\mathbf{r}$ , d'on  $\partial_{\mathbf{r}_i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = -\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ .

**Remarca.** Si tenim masses  $m_i$  situades en punts  $\mathbf{r}_i$ , la força que aquestes masses exerceixen sobre una partícula de massa unitat situada en un punt  $\mathbf{r}$  és

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G \sum_i \frac{m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r})$$

(té dimensions d'una acceleració). Aquesta força és igual a  $-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$ , on  $V$ , anomenat *potencial gravitatori* corresponent a les masses  $m_i$ , s'expressa per la fórmula

$$V(\mathbf{r}) = G \sum_i \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Per una distribució contínua de massa en una regió  $K$ , la fórmula que dona el potencial creat per aquesta distribució en un punt  $\mathbf{r}$  és

$$V(\mathbf{r}) = G \int_K \frac{\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|}.$$

on  $\rho(\mathbf{x})$  és la densitat de massa en el punt  $\mathbf{x}$ .

**Remarca** (Interpretació del potencial). Si  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r}'$  són dos punts, la diferència  $V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}')$  coincideix amb el treball fet per la força  $\mathbf{F} = -\partial V$  al llarg de qualsevol camí  $\gamma$  amb origen  $\mathbf{r}$  i fi a  $\mathbf{r}'$ , ja que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma} -\partial V \cdot d\gamma = -(V(\mathbf{r}') - V(\mathbf{r})) = V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}').$$

Si  $V$  s'anul·la a l'infinit, com ara en el cas del potencial gravitatori,  $V(\mathbf{r})$  és el treball fet pel camp de forces  $\mathbf{F}$  al llarg de qualsevol camí amb origen  $\mathbf{r}$  i fi a l'infinit, o bé el treball fet contra les forces del sistema all llarg de qualsevol camí amb origen a l'infinit i fi en la configuració  $\mathbf{r}$ .

**Lema.** Si  $\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}$  i les lligadures són holònomes, llavors  $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$ .

**Prova.** Regla de la cadena.

**Definició.** La lagrangiana d'un sistema conservatiu és  $L = T - V$ .

**Teorema** (Euler-Lagrange). Per un sistema conservatiu, l'evolució es regeix per les equacions<sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

**Prova.** Basta usar el lema anterior per expressar les  $Q_k$  i notar que  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ .



**Definició.** Es diu que un sistema mecànic amb lligadures holònomes és **lagrangiana**, definit per la *lagrangiana*  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , si la seva evolució es regeix per les equacions

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

En particular, doncs, el teorema anterior ens diu que un sistema mecànic conservatiu és lagrangiana, amb lagrangiana  $L = T - V$ .<sup>3</sup>

## Exemples sense lligadures

### *Multioscil·lador harmònic*

Considerem el sistema lagrangià definit per la lagrangiana

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k_i q_i^2.$$

Les equacions d'Euler—Lagrange donen, com és immediat de comprovar, el sistema d'equacions

$$m_i \ddot{q}_i = -k_i q_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Així, doncs,  $q_i$  evoluciona, independentment de les demés coordenades, com un oscil·lador harmònic de freqüència angular  $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$ .

Més endavant veurem que en l'entorn d'una configuració d'equilibri estable, tot sistema conservatiu es pot aproximar per un multioscil·lador harmònic, tal com ja hem vist en el cas d'un grau de llibertat.

## ***Partícula en un potencial central***

Una partícula es mou en un **potencial central**  $V$  (és a dir,  $V$  és una funció de la distància  $r$  a un punt fix  $O$ ). Com que les superfícies equipotencials són esferes, la força és paral·lela a  $\mathbf{r}$ . En particular, el pla  $\langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle$  és constant. Podem, doncs, suposar que el moviment té lloc en un pla. Si en aquest pla prenem coordenades polars  $(r, \varphi)$ , la lagrangiana és

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Les dues equacions d'Euler—Lagrange que se'n dedueixen són

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -V', \quad d(mr^2\dot{\varphi})/dt = 0.$$

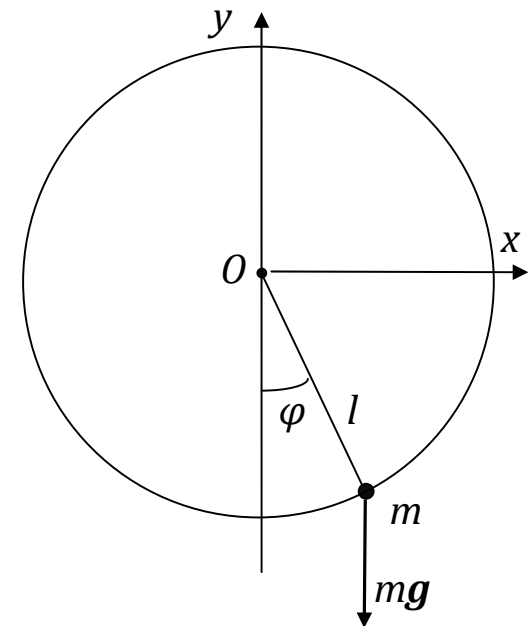
La segona equació ens dóna que  $\dot{\varphi} = h/mr^2$ , on  $h$  és una constant. Substituint a la primera equació, obtenim  $m\ddot{r} - h^2/mr^3 = -V'$ , que en principi ens permet obtenir  $r$  com a funció de  $t$ . Substituint en la segona equació, podem obtenir  $\varphi$  com a funció de  $t$ .

**Remarca.** La constant  $h = mr^2\dot{\varphi} = r(m(r\dot{\varphi}))$  de l'exemple anterior és el moment angular de la partícula respecte de  $O$  i  $\frac{h}{2m} = \frac{1}{2}r(r\dot{\varphi})$  l'àrea escombrada pel radi vector  $\mathbf{r}$  per unitat de temps (en particular resulta que aquesta àrea és constant, de manera que la «segona llei de Kepler» és vàlida per a qualsevol potencial central, incloent-hi, és clar, el potencial newtonià produït per una massa situada en el punt  $O$ ).

## Exemples amb lligadures

### Pèndol simple

Podem prendre com a coordenada generalitzada l'angle  $\varphi$  que forma el pèndol amb la vertical (orientada en sentit ascendent). Si  $l$  denota la longitud del pèndol i  $m$  la seva massa, llavors  $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$  i  $V = mgy = -mgl \cos \varphi$ . Per tant,



$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi},$$

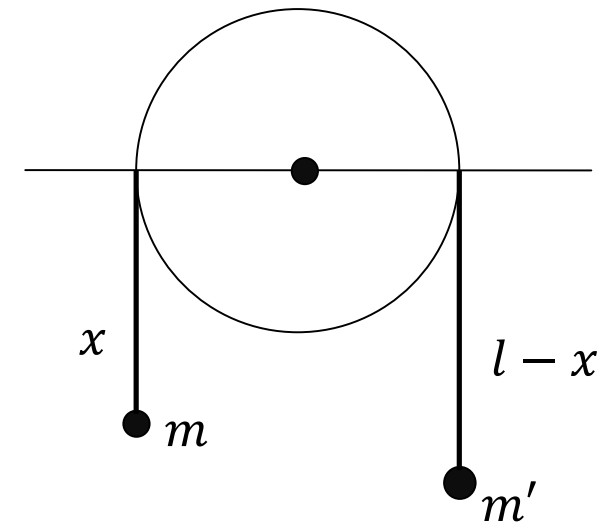
i l'equació de Lagrange ens dóna que

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0, \quad k = g/l,$$

que coincideix amb l'equació establerta al capítol anterior per un altre mètode.

### ***Màquina de Atwood***

Dues masses  $m$  i  $m'$  estan lligades als extrems d'una corda penjada d'una politja tal com indica la figura. Suposem les masses de la corda i de la politja són negligibles, i que el gir de la politja és sense fricció. Hi ha una única coordenada independent, ja que si coneixem la posició d'un dels pesos la de l'altre queda determinada pel fet



que la longitud de la corda que els relliga és fixa. Amb les notacions de la figura,

$$T = \frac{1}{2}(m + m')\dot{x}^2, \quad V = -mgx - m'g(l - x),$$

de manera que

$$L = \frac{1}{2}(m + m')\dot{x}^2 + mgx + m'g(l - x).$$

La corresponent equació del moviment és

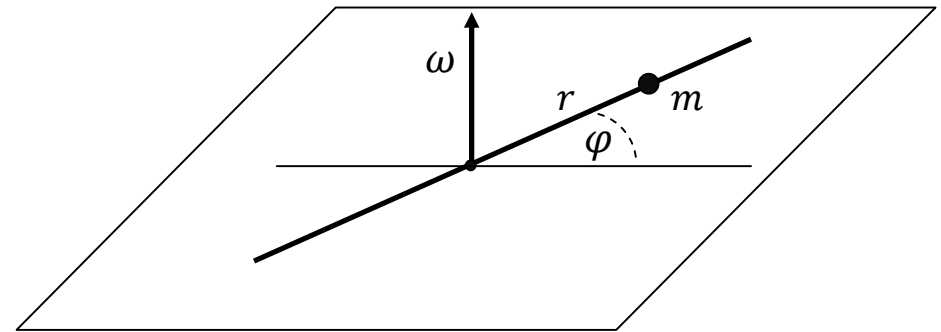
$$\ddot{x} = g \frac{m - m'}{m + m'}$$

amb la qual cosa veiem que es tracta d'un moviment uniformement accelerat amb acceleració  $g \frac{m - m'}{m + m'}$ .

## ***Boleta lliscant sobre barnilla que gira***

En aquest exemple estudiarem el moviment d'un punt material de massa  $m$  que es desplaça sense fricció sobre una barnilla recta que gira horitzontalment amb velocitat uniforme  $\omega$  al voltant d'un punt  $O$  de la barnilla.

Siguin  $r$  i  $\varphi$  coordenades polars del punt material respecte del punt  $O$ , tal com indica la figura. Tenim



$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

Tenim  $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ,  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$  i  $\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r$ . L'equació d'Euler–Lagrange equival, doncs, a

$$\ddot{r} = \omega^2 r .$$

Aquesta equació s'integra fàcilment multiplicant per  $\dot{r}$ : obtenim la relació

$$\dot{r}^2 = \omega^2 r^2 + c,$$

on  $c$  és una constant arbitrària. Per tant

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\omega^2 r^2 + c}.$$

Posem  $r_0$  i  $\dot{r}_0$  per denotar els valors de  $r$  i  $\dot{r}$  per a  $t = 0$ . Així

$$c = \dot{r}_0^2 - \omega^2 r_0^2$$

i, per tant, les condicions  $c = 0$ ,  $c > 0$  i  $c < 0$  equivalen, respectivament, a  $|\dot{r}_0| = \omega r_0$ ,  $|\dot{r}_0| > \omega r_0$  i  $|\dot{r}_0| < \omega r_0$ .

El cas  $c = 0$  es regeix per l'equació  $\dot{r} = \pm \omega r$ , de manera que

$$r = r_0 e^{\pm \omega t}.$$

Suposem ara  $c > 0$  i definim  $c' > 0$  per la relació  $r_0 = \frac{\sqrt{c}}{\omega} \sinh(c')$ . Si  $\dot{r}_0 > 0$ , llavors obtenim

$$r = \frac{\sqrt{c}}{\omega} \sinh(\omega t + c').$$

Si, en canvi,  $\dot{r}_0 < 0$ , el que s'obté és que

$$r = \frac{\sqrt{c}}{\omega} \sinh(|-\omega t + c'|).$$

Finalment, suposem que  $c < 0$  i definim  $c' > 0$  per la relació

$$r_0 = \frac{\sqrt{-c}}{\omega} \cosh(c'). \text{ Si } \dot{r}_0 > 0, \text{ llavors}$$

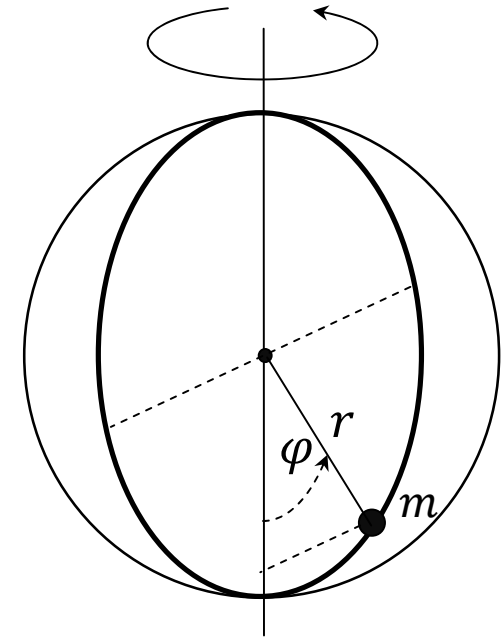
$$r = \frac{\sqrt{-c}}{\omega} \cosh(\omega t + c'),$$

mentre que si  $\dot{r}_0 < 0$ , llavors

$$r = \frac{\sqrt{-c}}{\omega} \cosh(|-\omega t + c'|).$$

### ***Massa puntual lliscant sobre una circumferència***

Considerem una massa puntual  $m$  que es mou sense fricció sobre una circumferència vertical de radi  $r$  que gira al voltant del seu diàmetre vertical amb velocitat angular constant  $\omega$ . Si posem  $\varphi$  per denotar l'angle que forma el radi de la partícula amb el diàmetre vertical (orientat en sentit descendent), l'expressió per a l'energia cinètica és



$$T = mr^2(\dot{\varphi}^2 + (\omega \sin(\varphi))^2),$$

ja que la velocitat en sentit tangencial ( $r\dot{\varphi}$ ) és perpendicular a la velocitat deguda a la rotació ( $r \sin(\varphi)\omega$ ).

Com que l'energia potencial és  $-mgr \cos(\varphi)$ , l'equació d'Euler--Lagrange ens dóna que

$$mr^2\ddot{\varphi} - mr^2\omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + mgr \sin(\varphi) = 0,$$

que equival a

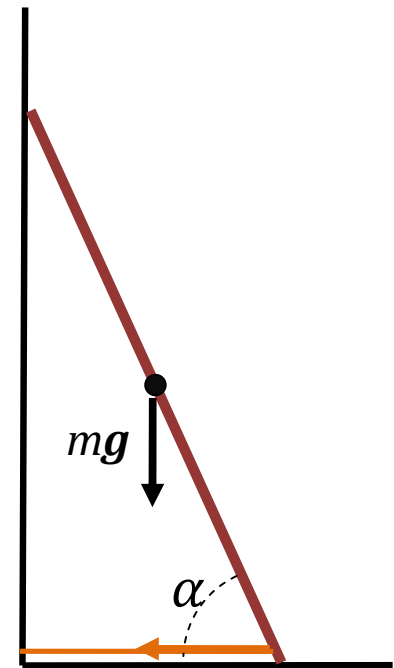
$$r\ddot{\varphi} = r\omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) - g \sin(\varphi) .$$

### Exercicis M.3 (Formalisme lagrangià)

**M.3.1.** Una barra rígida situada en un pla vertical i els extrems de la qual es recolzen en una paret vertical (extrem superior) i en un pla horitzontal (extrem inferior). Suposem, a més, que l'extrem inferior està relligat a la paret per una corda inextensible horitzontal perpendicular a la paret. Si podem negligir la fricció dels extrems de la barra amb la paret i el pla horitzontal, respectivament, demostreu que la tensió de la corda és

$$\frac{mg}{2\tan(\alpha)},$$

on  $m$  és la massa de la barra i  $\alpha$  és l'angle que forma la barra amb el pla horitzontal.



**M.3.2.** 1) Escriviu l'energia cinètica, usant coordenades generalitzades apropiades a cada cas, d'una partícula de massa  $m$  constreta a moure's sobre:

- a) una esfera;
- b) un cilindre circular recte;
- c) un paraboloides de revolució.

2) Si la partícula està sotmesa a una força neta  $\mathbf{F}$  i les lligadures són ideals, trobeu l'expressió de la força generalitzada corresponent a cada coordenada i escriviu les equacions del moviment corresponents.

**M.3.3.** Considerem un pèndol simple de longitud  $l$  i suposem que el seu punt de suspensió es pot moure sense fricció sobre una corba donada  $C$ . Demostreu que les lligadures d'aquest sistema són ideals.

**M.3.4.** Amb les notacions de l'exemple de la pàgina 5, deduïu que les equacions d'Euler—Lagrange d'un pèndol esfèric de longitud  $l = l(t)$  són les següents:

$$2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) = g \sin(\theta)$$

$$2\dot{l} \sin(\theta) \dot{\phi} - 2l \cos(\theta) \theta \dot{\phi} + l \sin(\theta) \ddot{\phi} = 0$$

**M.3.5.** Considerem el sistema format per una boleta de massa  $m$  que es mou sotmesa a la força de la gravetat  $\mathbf{F} = (0,0,-mg)$  sobre l'espiral d'equacions paramètriques

$$x = a \cos\left(\frac{z}{b}\right), \quad y = a \sin\left(\frac{z}{b}\right),$$

on  $a, b$  són constants positives. Proveu que el moviment de la partícula es regeix per l'equació  $\ddot{z} = -\frac{gb^2}{a^2+b^2}$ . Es tracta, doncs, d'un moviment uniformement accelerat amb acceleració  $\frac{gb^2}{a^2+b^2}$  (respecte de la direcció vertical).

**M.3.6.** Trobeu la lagrangiana i les equacions del moviment d'un pèndol pla el punt de suspensió del qual es pot moure sense fricció sobre una recta horitzontal.

**M.3.7.** Trobeu la lagrangiana i les equacions del moviment d'un pèndol pla doble respecte dels angles  $\varphi$  i  $\varphi'$  que formen el primer i el segon fil amb la vertical.

**M.3.8.** Sigui  $L$  la lagrangiana d'un sistema lagrangià i suposem que  $L = L' + \frac{df}{dt}$ , on  $f = f(\mathbf{q}, t)$  (posarem  $L \equiv L'$  per denotar aquest fet). Demostreu que les equacions d'Euler—Lagrange de  $L$  coincideixen amb les de  $L'$ .

**M.3.9.** La lagrangiana d'una partícula de massa  $m$  que es mou en un pla vertical sota els efectes de la gravetat és  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ , on  $x$  i  $y$  són les components horitzontal i vertical, respectivament, de la posició de  $m$ . Comproveu que si escrivim equacions d'Euler—Lagrange usant en lloc de  $L$  una qualsevol de les funcions

$$L' = m\dot{x}\dot{y} - mgy$$

$$L'' = mgy - \frac{1}{2}mgx\dot{y}^2 - m\dot{x}^3\dot{y} - \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

obtenim les mateixes equacions del moviment que amb  $L$  (això és,  $\ddot{x} = 0$ ,  $\ddot{y} = -g$ ).

**M.3.10.** Mostreu que l'acceleració d'una circumferència que roda sense lliscar per un pla inclinat és  $\frac{1}{2}g \sin(\alpha)$ , on  $\alpha$  és l'angle d'inclinació del pla (suposem que la circumferència és vertical i que el seu punt de contacte es mou sobre una

recta de màxim pendent). Proveu també que el mínim valor del coeficient de fricció que garanteix que no hi ha lliscament és  $\frac{1}{2}\tan(\alpha)$ .<sup>4</sup>

**M.3.11.** Un sistema mecànic és descrit per una lagrangiana  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , on  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ . Si imposem  $m$  lligadures addicionals  $\phi_s(\mathbf{q}, t) = 0$ ,  $s = 1, \dots, m$ , mostreu que l'evolució del sistema obeeix a les equacions de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_s \lambda_s(t) \frac{\partial \phi_s}{\partial q_k},$$

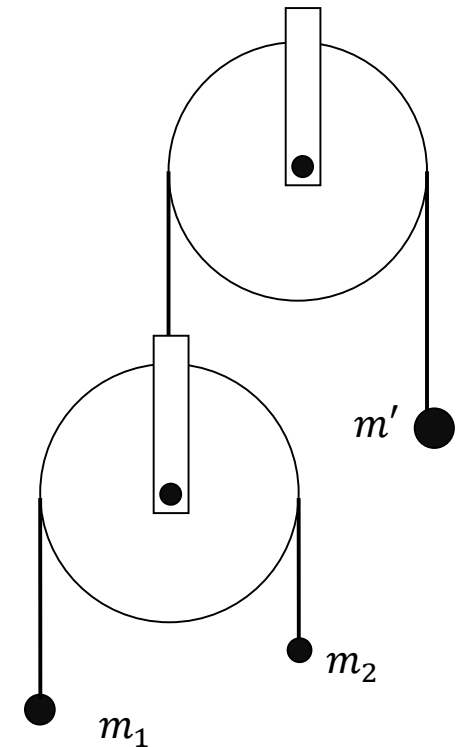
on  $\lambda_s(t)$  són funcions desconegudes de  $t$ . Observeu que és un sistema de  $n$  equacions, que, junt a les  $m$  equacions de lligadura, formen un sistema de  $n + m$  equacions que determinen les  $n + m$  incògnites  $q_1, \dots, q_n$ .<sup>5</sup>

**M.3.12.** Un sistema mecànic consta de dues masses puntuals iguals unides per una barnilla rígida de longitud  $l$  i massa negligible. Les masses es mouen en un pla horitzontal i de manera que la velocitat del punt mitjà de la barnilla sempre és paral·lela a la barnilla. Si per descriure la configuració del sistema s'utilitzen

coordenades cartesianes  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  de cada massa, escriviu les equacions de lligadura existents i estudieu si són holònomes.

**M.3.13.** Considereu la màquina d'Atwood composta de la figura. Supposeu que les masses de les politges i de les cordes són negligibles, i que no hi ha cap força de fricció.

- 1) Escriviu les equacions de les lligadures.
- 2) Escolliu coordenades generalitzades independents i escriviu la lagrangiana del sistema (en funció d'aquestes coordenades).
- 3) Calculeu l'acceleració de cadascuna de les tres masses.



**M.3.14.** Determineu el nombre de graus de llibertat i, utilitzant coordenades generalitzades adients, escriviu la lagrangiana i les equacions del moviment d'un pèndol simple tal que el seu punt de suspensió oscil·la harmònicament al llarg d'una línia horitzontal amb freqüència  $\omega$  i amplitud  $a$ .

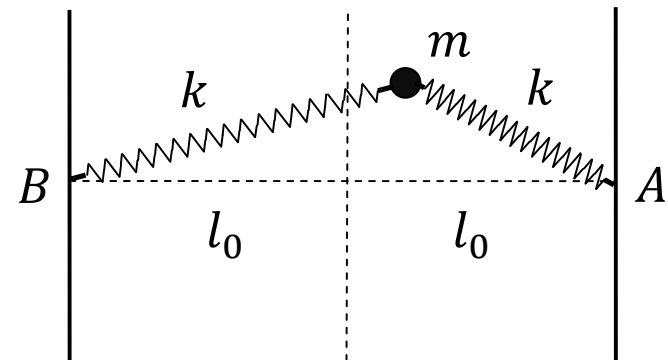
**M.3.15.** Una massa puntual  $m$  llisca sense fricció sobre l'hèlix vertical donada per les equacions  $x = a \cos \frac{2\pi}{b} z$ ,  $y = a \sin \frac{2\pi}{b} z$ .

1) Escriviu la lagrangiana de l'esfera utilitzant com a coordenada generalitzada la coordenada  $z$  de l'esfera.

2) Proveu que l'esfera descriu un moviment de caiguda uniformement accelerat amb acceleració  $\frac{gb^2}{4\pi^2 a^2 + b^2}$ .

3) Suposant que inicialment l'esfera es troba en repòs a una altura  $h$ , determineu el temps que trigarà en passar pel punt  $(a, 0, 0)$  i calculeu la força de lligadura que actua sobre  $m$  quan passa per aquest punt.

**M.3.16.** Una massa puntual  $m$  sotmesa a l'acció de la gravetat està subjecta a dues mo-  
lles idèntiques de constant recuperadora  $k$  i longitud natural  $l_0$ , tal com mostra la figura (els punts  $A$  i  $B$  estan fixats). Supposeu, a més, que la massa només es mou en el pla vertical.



- 1) Calculeu la lagrangiana del sistema en coordenades cartesianes.
- 2) Comproveu que si la distància de  $m$  a l'origen de coordenades és molt petita comparada amb  $l_0$ , l'energia potencial es pot aproximar per

$$V_0(x, y) = kx^2 + \frac{k(x^2 + y^2)^2}{4l_0^2} + mgy .$$

- 3) Considereu el sistema lagrangià de lagrangiana  $L_0 = T - V_0$ . Determineu-ne les posicions d'equilibri.

## Notes

---

**1.** Cadascuna de les equacions de lligadura  $f_\alpha$  ens dóna una *restricció*, en cada instant, per a les posicions que poden ocupar les masses puntuals. Com veurem en els exemples, la natura d'aquestes restriccions es pot expressar generalment en llenguatge geomètric.

**2.** Posant  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , les equacions d'Euler–Lagrange es poden condensar en la relació  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$ .

**3** (Potencials generalitzats). L'equació de Lagrange es transforma en la forma d'Euler–Lagrange si les forces són conservatives. Aquesta transformació també és possible si les forces generalitzades que no deriven d'un potencial, diguem-ne  $Q'_k$ , es poden expressar en la forma  $Q'_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial M}{\partial q_k}$ , per un cert observable  $M$ . Si aquest és el cas, és clar que només cal posar  $L = T - V - M$ , on  $V$  és el potencial de les forces conservatives. Direm que  $M$  és un *potencial generalitzat*. Aquesta mena de potencials apareixen en l'estudi de la dinàmica de partícules carregades sota camps magnètics.

**4.** Corben–Stehle, pàg. 45.

**5.** Corben–Stehle, pàg. 88.