

MMF 11 / 1. *Mecànica*

2. Dinàmica dels sistemes conservatius 1D

S. Xambó

- Notacions i convencions
 - *Oscil·lador harmònic*
- Dinàmica dels sistemes 1D
- Període de les oscil·lacions
- Pèndol simple
 - *Període*
 - *Petites oscil·lacions*

Notacions i convencions

Sigui $V: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció real diferenciable definida en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (no necessàriament finit) i considerem l'equació diferencial

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -V'(x), m > 0.$$

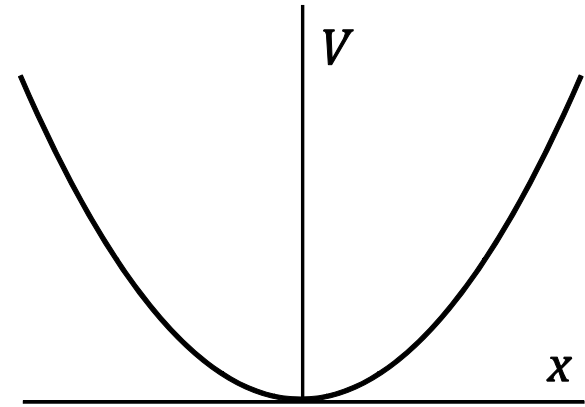
Aquesta equació pot ser pensada com a un model del moviment d'una partícula puntual de massa m sotmesa a la força $-V'(x)$ quan m ocupa la posició $x \in I$. D'aquest model en direm un *sistema conservatiu unidimensional* o amb *un grau de llibertat*. La funció V s'anomena *potencial* del sistema. Notem que l'acceleració $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ és de signe contrari al de $V'(x)$, de manera que la velocitat augmenta en punts on la gràfica de $V(x)$ baixa i disminueix en punts on $V(x)$ puja. Notem també que el sistema no canvia si $V(x)$ es substitueix per $V(x) + C$, C constant, cosa que expressarem escrivint $V(x) \equiv V(x) + C$.

Exemple. L'oscil·lador harmònic

$$m\ddot{x} = -kx$$

és un sistema conservatiu unidimensional amb potencial la paràbola

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$



Dinàmica dels sistemes 1D

Multiplicant la relació $m \frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x)$ per $\dot{x}$ s'obté que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = - \frac{d}{dt} (V(x)) ,$$

la qual cosa demostra que la quantitat

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

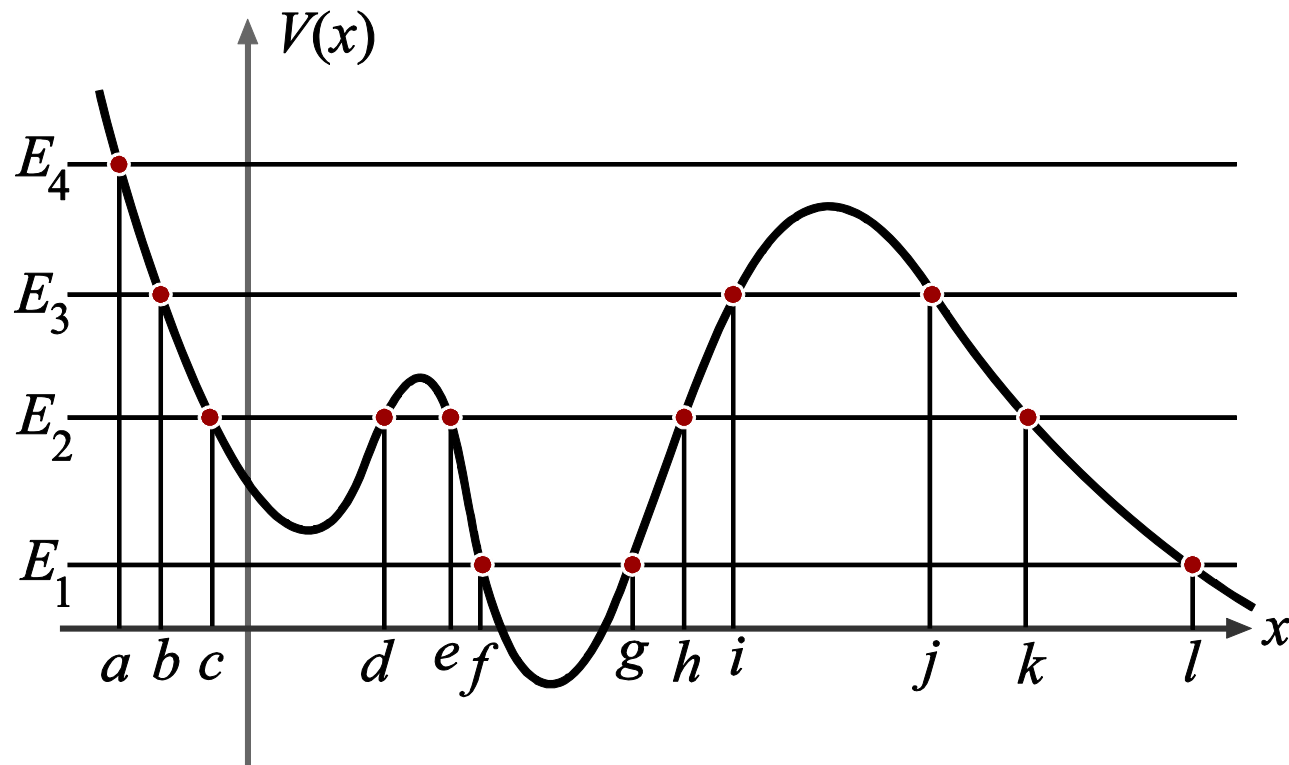
és constant en el decurs del moviment de m (també es diu que és una *quantitat conservada*, o una *integral primera*, del moviment). De E en di-

em *energia* de la partícula (relativa a la coordenada x). Notem que E és suma d'un terme *cinètic* $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ i del potencial $V(x)$.

Remarca. En general $\dot{x}$ no coincideix amb la velocitat v de m i, per tant, $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ no coincideix amb l'energia cinètica $\frac{1}{2}mv^2$ de m relativa a l'espai en el qual es mou (v., per exemple, l'estudi del pèndol simple més avall).

Com que el terme cinètic és no negatiu, s'ha de complir $V(x) \leq E$, on la igualtat val si i només si $\dot{x} = 0$. El conjunt dels punts x que satisfan $V(x) \leq E$ és unió d'interval·ls tancats amb interiors disjunts i els extrems d'aquests interval·ls s'obtenen a partir del conjunt de punts que compleixen la condició $V(x) = E$.

A la figura de la pàgina següent ho hem il·lustrat per a quatre valors de E . Si $E = E_1$, tenim els interval·ls $[f, g]$ i $[l, \infty]$ (suposant que $V(x) < E_1$ per $x > l$); si $E = E_2$, els interval·ls $[c, d]$, $[e, h]$ i $[k, \infty]$; si $E = E_3$, $[b, i]$ i $[j, \infty]$; i si $E = E_4$, només $[a, \infty]$.



Possible gràfic de la funció potencial $V(x)$ i intervals en els quals és possible el moviment segons diverses energies.

Si $[x_1, x_2]$ és un dels intervals corresponents a E (admetem, doncs, que x_2 pot ser ∞ i que x_1 pot ser $-\infty$), la velocitat $\dot{x}$ és no nul·la en l'interval obert (x_1, x_2) . Per tant, si la velocitat inicial és positiva (negativa), l'evo-

lució és de x_1 envers x_2 (de x_2 envers x_1). Per altra banda, si x_1 (x_2) és finit, la velocitat és nul·la en el punt x_1 (x_2).

En el cas d'un interval finit $[x_1, x_2]$, i suposant que $V'(x_1), V'(x_2) \neq 0$, l'evolució del sistema és un moviment de x_1 a x_2 seguit d'un moviment de x_2 a x_1 , i com que en cada punt x la velocitat és la mateixa en els dos casos, llevat del signe, veiem que es tracta d'un moviment periòdic de període T , on $T/2$ és el temps que tarda el sistema en anar de x_1 a x_2 . Per exemple, amb les notacions de la figura de la pàgina anterior, veiem que aquest moviment periòdic es produeix en l'interval $[f, g]$ per l'energia E_1 , en l'interval $[c, d]$ o l'interval $[e, h]$ per l'energia E_2 ; i en l'interval $[b, i]$ per l'energia E_3 .

Període de les oscil·lacions

Remarquem que de l'equació $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$ obtenim

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))},$$

d'on

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + c,$$

c una constant que depèn de les condicions inicials. Aquesta integral ens dóna t com a funció de x i per tant, almenys implícitament, x en funció de t . En particular podem obtenir la fórmula del període T :

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Si x_2 és infinit (com ara, amb les notacions de la figura de la pàgina 5, l'interval $[a, \infty]$ per a l'energia E_4), el moviment és de x_1 envers ∞ si la velocitat inicial és positiva. Si la velocitat inicial és negativa, el moviment

arriba fins a x_1 i després canvia de sentit i prossegueix com en el cas anterior. Consideracions anàlogues es poden fer si $x_1 = -\infty$.

Remarca. Fins ara hem exclòs la consideració de condicions com ara $V'(x_2) = 0$, és a dir, punts del gràfic de $V(x)$ amb tangent horitzontal en els quals es compleix a més que $V = E$. Ho hem fet perquè aquesta situació especial dóna lloc a una evolució diferent: com que en un tal punt tenim $\dot{x} = 0$ i $\ddot{x} = 0$, si la partícula *arribés* en un temps finit a un tal extrem x_2 , s'hi quedaria per sempre. Un comentari similar val per a l'extrem x_1 si $V'(x_1) = 0$. Resulta, però, que el temps per arribar-hi és sempre infinit (v. **M.2.8**, pàgina 17).

Exemple. El període de l'oscil·lador harmònic $m\ddot{x} = -kx$ és

$$T = 4\sqrt{m/k} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

En particular, és independent de l'elongació màxima a . La relació entre els períodes T_1 i T_2 corresponents a les masses m_1 i m_2 és, doncs, $T_1/T_2 = \sqrt{m_1/m_2}$, o bé, $T_1^2/m_1 = T_2^2/m_2$. Adonem-nos, finalment, que $k = 4\pi^2 m/T^2$.

Pèndol simple

Aplicarem les idees anteriors per obtenir el període d'un pèndol simple que efectua oscil·lacions d'amplitud màxima α , $|\alpha| < \pi$. En aquest cas podem prendre $x = \varphi$, on φ és l'angle que el pèndol fa amb la vertical. Com que l'acceleració de m sobre la circumferència de radi l és $l\ddot{\varphi}$ i la força efectiva (tangencial) sobre m és igual a

$-mg \sin(\varphi)$, tenim

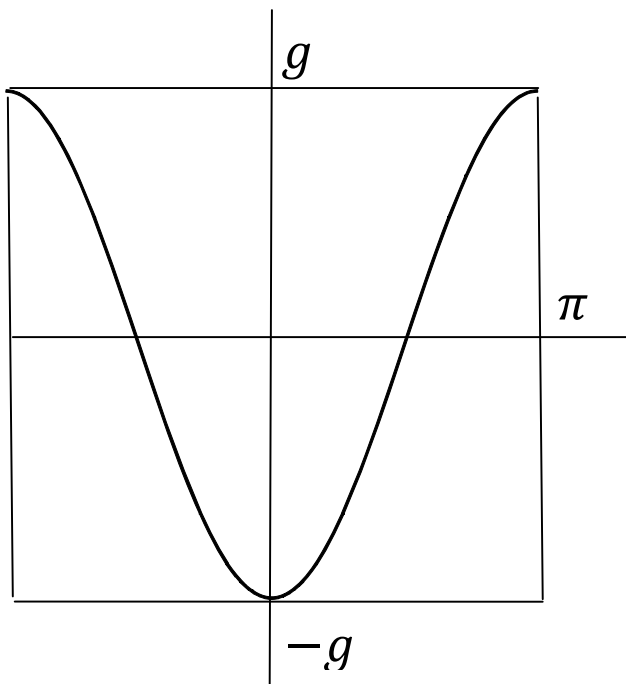
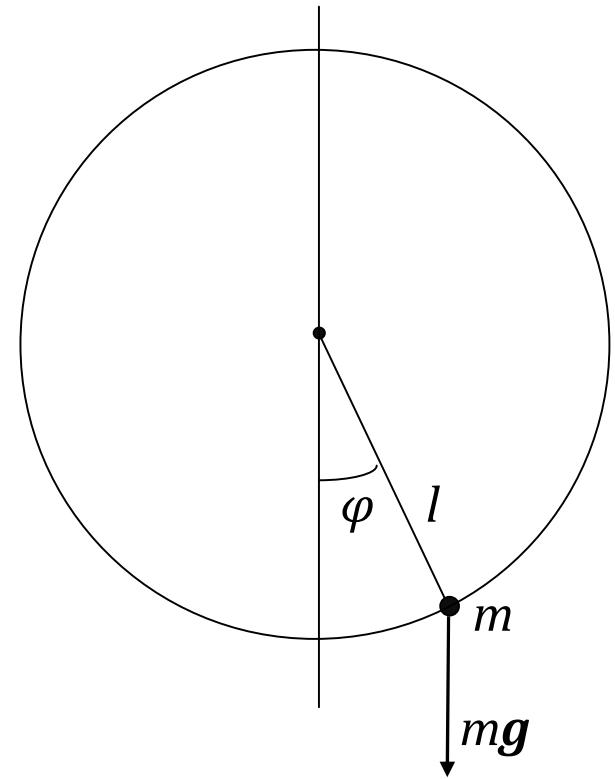
$$l\ddot{\varphi} = -g \sin(\varphi) = -V'(\varphi),$$

$$V(\varphi) = -g \cos(\varphi).$$

Així, doncs,

$$E = \frac{1}{2}l\dot{\varphi}^2 - g \cos(\varphi)$$

és una integral primera. L'amplitud màxima α s'obté quan $\dot{\varphi} = 0$, de manera que



$$E = -g \cos(\alpha).$$

Substituint en l'equació anterior, i simplificant, obtenim que

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\varphi) - \cos(\alpha))},$$

o bé

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\varphi) - \cos(\alpha))}} = \frac{d\varphi}{2\sqrt{\frac{g}{l}\left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}}$$

(hem usat la identitat $\cos(\varphi) - \cos(\alpha) = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$).

Així, doncs, si T és el període de les oscil·lacions, tenim

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{2\sqrt{\frac{g}{l}\left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} \\ &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi / \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) / \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

Fent el canvi $\sin(\xi) = \sin(\frac{\varphi}{2}) / \sin(\frac{\alpha}{2})$ i posant $k = \sin(\frac{\alpha}{2})$, després d'alguns càlculs (notem que el denominador de la darrera integral és $\cos(\xi)$ i que $d\varphi = 2\sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\xi) d\xi / \cos(\frac{\varphi}{2})$), obtenim que

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}.$$

La integral d'aquesta expressió és una funció de k , anomenada *integral el·líptica completa de primera espècie*, $K(k)$, i el seu desenvolupament en sèrie resulta ser¹

$$\frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right)$$

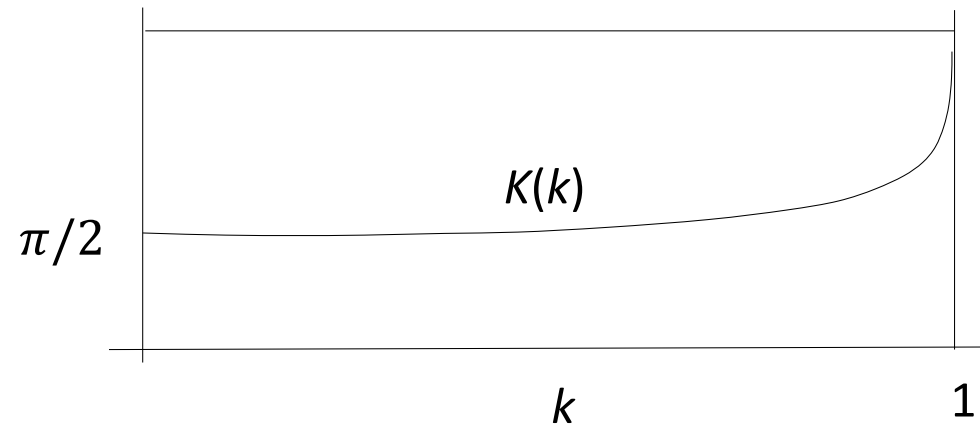
Per tant,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \dots \right).$$

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral

Remarquem que per α molt petit obtenim el període d'un oscil·lador harmònic de freqüència angular $\sqrt{l/g}$. En canvi, $T \rightarrow \infty$ quan $\alpha \rightarrow \pi$ (que equival a $k \rightarrow 1$).

Gràfica de la funció el·líptica de primera espècie



Si posem T_0 per indicar el període d'un pèndol harmònic de la mateixa longitud l , la taula següent ens dóna el quocient T/T_0 en funció de α :

α	0	10	20	30	40	50	60	70	80
T/T_0	1.000	1.002	1.008	1.017	1.031	1.050	1.073	1.102	1.138

α	90	100	110	120	130	140	150	160	170
T/T_0	1.180	1.232	1.295	1.373	1.470	1.594	1.762	2.008	2.439

Remarca. Notem que en la fórmula $E = \frac{1}{2}l\dot{\varphi}^2 - g \cos(\varphi)$ el terme cinètic $\frac{1}{2}l\dot{\varphi}^2$ no coincideix amb l'energia cinètica $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$ de m . De fet, les solucions de l'equació $m\ddot{x} = -V'(x)$ d'un sistema unidimensional no canvien si la substituïm pel resultat de multiplicar-la per una constant positiva arbitrària. Anàlogament, el terme potencial $-g \cos(\varphi)$ no coincideix amb el potencial $-mgl \cos(\varphi) \equiv mgl(1 - \cos(\varphi))$ corresponent a la posició de m a l'espai (notem, però, que el factor per passar del primer al segon és també ml).

Remarca (Petites oscil·lacions). Si x_0 és un mínim relatiu del potencial $V(x)$, podem escriure $V(x) \equiv \frac{1}{2}k\xi^2 + O(\xi^3)$, on $\xi = x - x_0$ i $k = V''(x_0)$. Això mostra que en l'entorn de x_0 podem aproximar el sistema unidimensional $m\ddot{x} = -V'(x)$ pel sistema $m\ddot{\xi} = -k\xi$, que és un oscil·lador harmònic.

Exercicis M.2 (Sistemes conservatius 1D)

M.2.1. Mostreu que les solucions de l'oscil·lador harmònic $m\ddot{x} = -kx$ tenen la forma $x = A \cos(\omega t + \phi)$, on $\omega = \sqrt{k/m}$ i $A, \phi \in \mathbb{R}$. Trobeu també A i ϕ per a les condicions inicials $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

M.2.2. Considereu una partícula de massa m sotmesa a un potencial del tipus $V(x) = D(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$, amb D, α constants positives (se'n diu el *potencial de Morse*).

1. Comproveu que si $-D < E < 0$, el moviment té lloc en un cert interval $[x_{\min}, x_{\max}]$ i determineu els valors $x_{\min}$ i $x_{\max}$ en funció de E . Què passa si $E \geq 0$?

2. Proveu que el període del moviment quan $-D < E < 0$ ve donat per

$$T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

3. Com és el moviment si la partícula està inicialment en repòs en el punt $x = 1/\alpha$? Amb quina velocitat passarà per l'origen de coordenades en aquest cas?

M.2.3. L'*espai de fases* (o *d'estats*) del sistema $m \frac{d^2x}{dt^2} = -V'(x)$ és el pla $\mathbb{R}^2$ de coordenades $(x, \dot{x})$. A una solució $(x(t), \dot{x}(t))$ correspon una corba parametritzada d'aquet pla. Com que $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$ és una quantitat conservada, veiem que les solucions són corbes de nivell de la funció

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x),$$

dita *hamiltonià* (o *hamiltoniana*) del sistema. Descriviu les corbes de nivell dels següents sistemes:

1. $V(x) = mgx$ (caiguda lliure d'una partícula)
2. $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$ (oscil·lador harmònic)
3. $V(x) = -m \frac{g}{l} \cos(x)$ (pèndol simple).

M.2.4. Un sistema mecànic d'un grau de llibertat general té la forma

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t),$$

on $f(x, \dot{x}, t)$ és una funció diferenciable de $x, \dot{x}$ i t . El cas en què f només depèn de x ens dóna els sistemes conservatius. Els casos en què f només depèn de t , o

de $\dot{x}$, en principi també es poden resoldre per quadratures. Per il·lustrar aquesta idea, estudieu la solució general dels sistemes següents:

1. $m\ddot{x} = a \cos(\omega t + \phi)$.
2. $m\ddot{x} = -b\dot{x}$ (força de fricció proporcional a la velocitat).

M.2.5. El radi de la Terra és $R = 6370$ km.

1. Calculeu el potencial del moviment unidimensional d'una partícula que es mou radialment en el camp gravitatori terrestre.
2. Descriviu les corbes de fase (o corbes de nivell de l'energia E). [Observació: en lloc de l'energia E , es pot prendre l'energia per unitat de massa E/m , que també és una integral primera].
3. Calculeu la velocitat d'escapament d'un coet llançat des de la superfície de la Terra (és a dir, la velocitat mínima necessària per sortir de la influència gravitatòria terrestre).

M.2.6. L'energia d'un pèndol simple ve donada per $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi$ (en lloc de aquesta expressió podem fer servir E/ml).

1. Descriviu les corbes de fase.
2. Amb quina velocitat s'hauria de llançar la massa des de la posició $\varphi = 0$ per tal de que arribi amb velocitat zero a la posició $\varphi = \pi/2$? Quant temps trigarà en arribar?

M.2.7. Una partícula està sotmesa al potencial unidimensional $V(x)$. Sigui $[x_1, x_2]$ un interval del domini de $V(x)$ tal que $V(x_1) = V(x_2) = E$ i $V(x) < E$ per a tot $x \in (x_1, x_2)$. Suposem a més que $V(x)$ té un màxim relatiu a x_2 . Proveu que el temps que tarda la partícula per anar de x_1 a x_2 és infinit.

M.2.8. Considerem una partícula de massa m que es mou per un medi (l'aire, per exemple) que ofereix una resistència al moviment proporcional a la velocitat de la partícula, amb constant de proporcionalitat k . Suposeu que aquesta força de fricció és l'única que hi actua.

1. Trobeu i resoleu l'equació del moviment de la partícula (podeu escollir les coordenades de manera que m es mogui sobre l'eix Ox).

2. Calculeu la velocitat de la partícula en funció de la posició.
3. Calculeu la distància total que recorre fins que s'atura (noteu que això proporciona un mètode experimental per determinar k).

M.2.9. Considereu encara la partícula del cas anterior, però ara suposant que, a més de la força de fricció, hi actua la gravetat (*moviment d'un projectil*).

1. Trobeu i resoleu la nova equació del moviment (ara el moviment és bidimensional, a menys que la velocitat inicial sigui en la direcció de l'eix vertical).
2. Suposant que la partícula es llança horitzontalment des d'una altura h , i amb velocitat v_0 , calculeu, ignorant la fricció, la distància que recorrerà (horitzontalment) fins que toca a terra.
3. Proveu que si la partícula es llança verticalment cap avall acaba assolint una velocitat límit que és independent de la velocitat inicial.

M.2.10. Una partícula de massa m baixa per un pla inclinat sota l'acció de la gravetat. Si al moviment s'oposa una força de fricció de mòdul kmv^2 , on v és la

velocitat de la partícula, i inicialment m està en repòs, calculeu el temps que necessita per recórrer una distància d .

M.2.11. Un objecte puntual situat a l'origen de coordenades atrau una partícula de massa m que està sobre l'eix d'abscisses segons la llei $F = -mk^2/x^3$. Suposant que la partícula es troba inicialment en repòs a una distància d de l'objecte, calculeu el temps que tarda en arribar a l'origen.

M.2.12. Considereu la mateixa situació del problema anterior. Proveu que la força que actua sobre la partícula deriva d'un potencial i calculeu-lo. Suposant que la partícula es troba inicialment a una distància d de l'origen, però allunyant-se a velocitat v_0 , calculeu fins a quina distància màxima de l'origen arribarà. En particular, determineu la velocitat d'escapament en funció de d .