

MMF 10 / 1. *Mecànica*

10. Dinàmica del sòlid rígid: giroscopis i sòlid lliure.

S. Xambó

Giroscopi lliure

Punt de vista del sistema fix

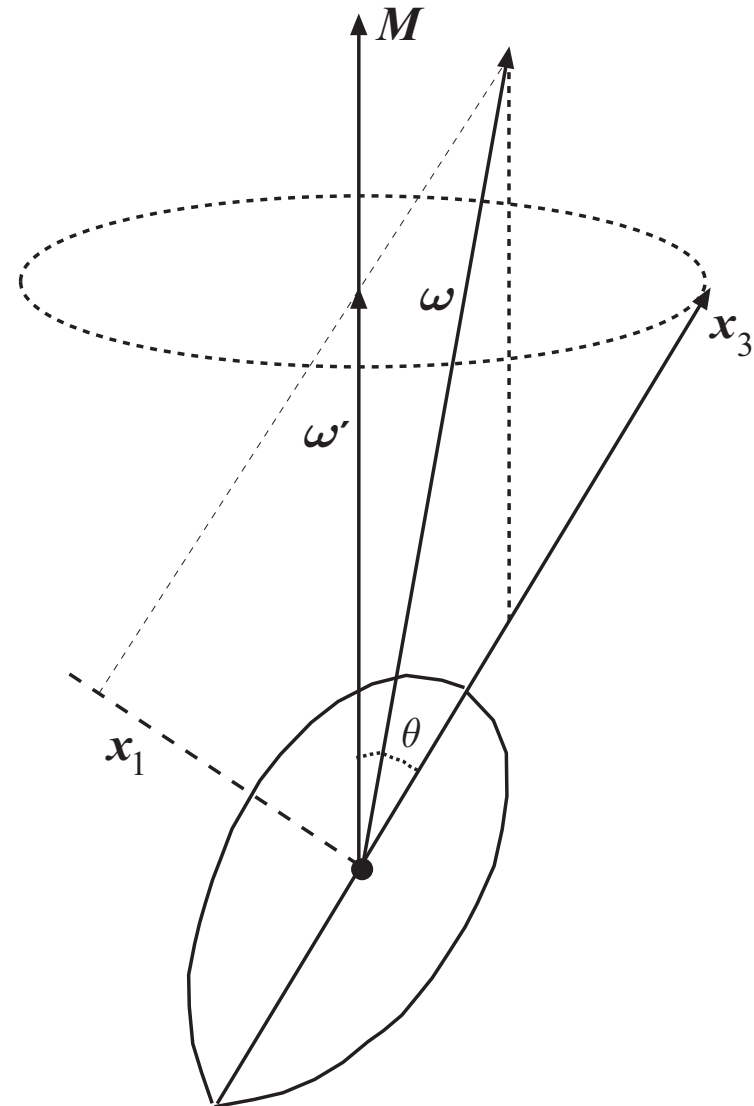
M constant

$$\omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = M \cos \theta / I_3 \quad z$$

$\omega' = M/I_1$ precessió

Notem que

$$\omega_1 = \begin{cases} \omega \sin \theta = \omega' \sin \theta \\ M_1/I_1 = M \sin \theta / I_1 \end{cases}$$



Punt de vista del giroscopi

En el cas del giroscopi lliure les equacions d'Euler es redueixen a

$$0 = (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 + I_1\dot{\omega}_1$$

$$0 = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 + I_2\dot{\omega}_2$$

$$0 = I_3\dot{\omega}_3$$

Així, doncs,

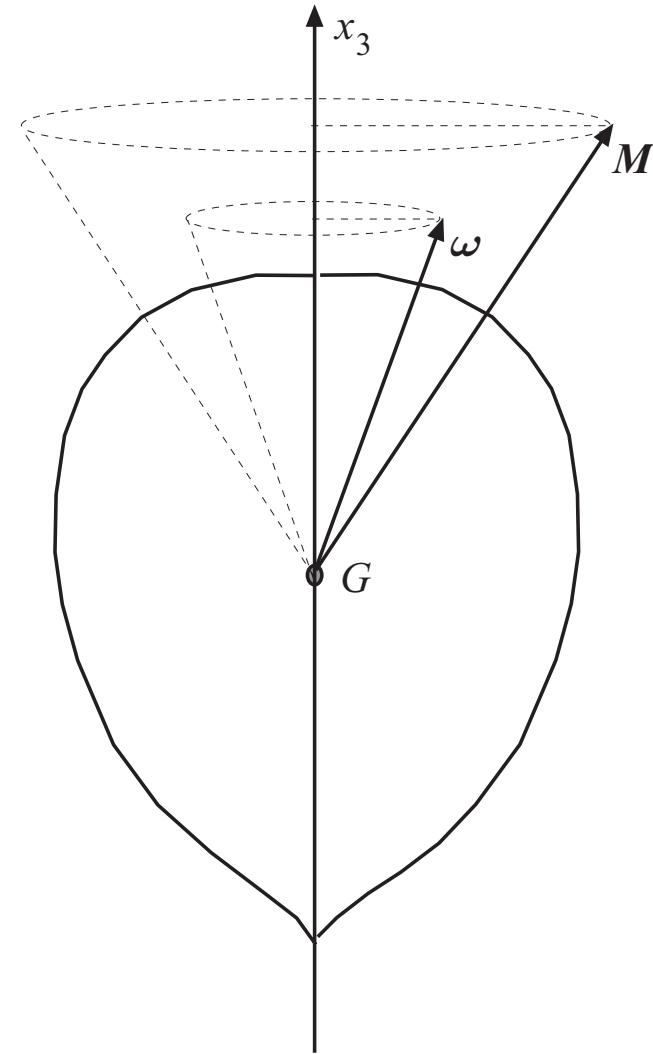
ω_3 és constant.

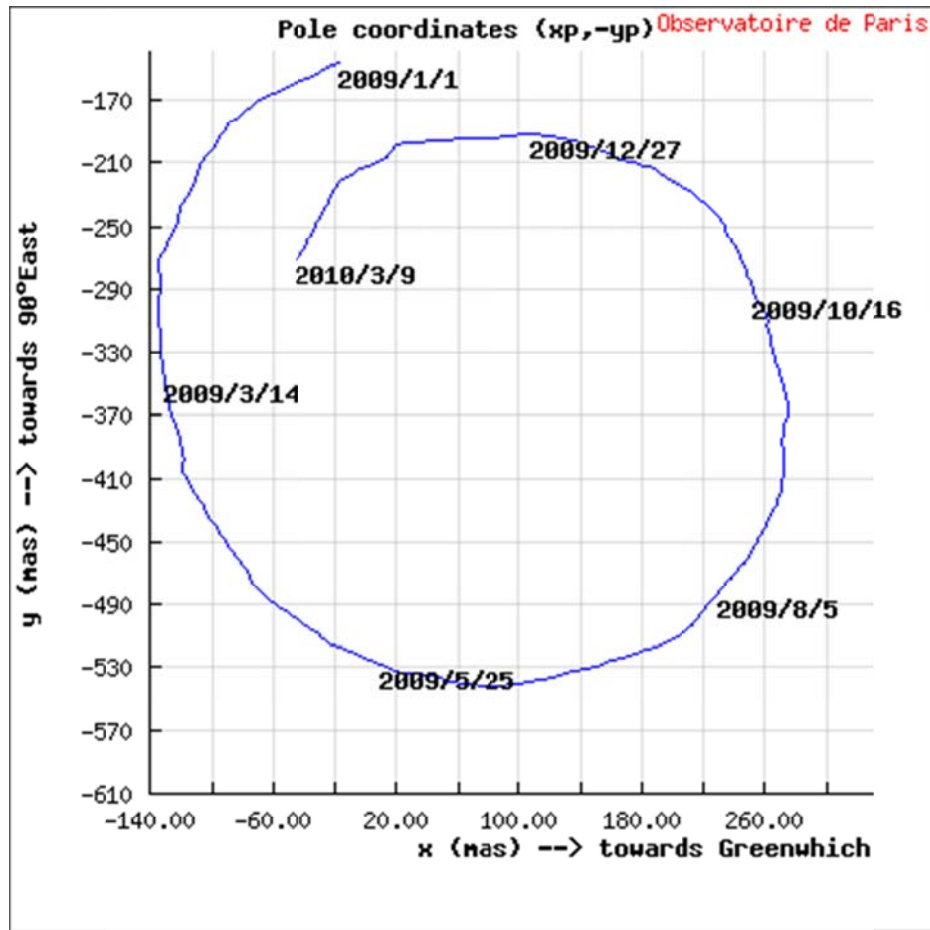
Posant $\alpha = (I_3 - I_1)\omega_3/I_1$, aquestes equacions es poden escriure com

$$\dot{\omega}_1 = -\alpha\omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = +\alpha\omega_1$$

D'on $\omega_1 = A \cos \alpha t$, $\omega_2 = A \sin \alpha t$. $M_1 = I_1 A \cos \alpha t$, $M_2 = I_1 A \sin \alpha t$.





Exemple. En el cas de la Terra, l'eix de rotació i l'eix de simetria són distints, però molt propers. De fet, el punt d'intersecció de l'eix de rotació amb la superfície de la Terra descriu un petit “cercle” al voltant del nord geogràfic (v. la figura; com que $1\text{mas}=1\text{milisegon}\simeq 3\text{cm}$, el diàmetre és $\simeq 12\text{ m}$). El període de rotació és,

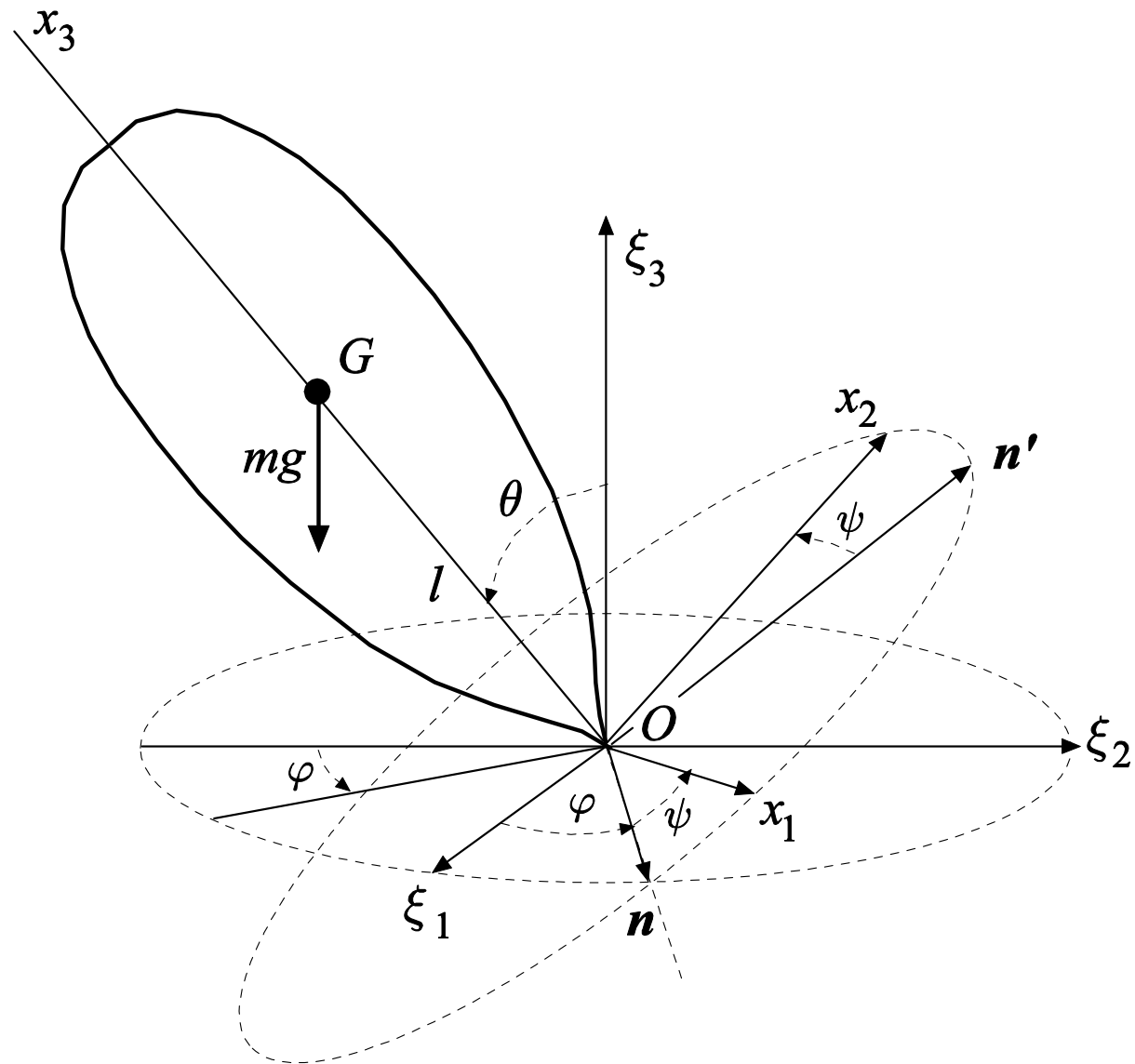
$$2\pi/\alpha = 2\pi I_1/(I_3 - I_1)\omega_3.$$

Com que $\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq 0.00329$ es coneix a partir d'observacions astronòmiques, i que $\omega_3 = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, el període que en resulta és 305 dies.

El període real és de 433 dies. La discrepància s'atribueix al fet que la Terra només és un sòlid rígid en una primera aproximació. A més, la corba del pol al voltant del pol geogràfic no és un circumferència, sinó una corba força irregular

(el gràfic s'ha extret de <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/>)

Giroscopi pensant amb un punt de l'eix fix



Ox_1, Ox_2, Ox_3 eixos principals d'inèrcia respecte de O .

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vectors directors unitaris dels eixos principals d'inèrcia Ox_i .

$O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$ eixos fixos.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vectors directors unitaris dels eixos $O\xi_i$.

$\mathbf{n} = \mathbf{u}(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_3)$ línia dels nodes (vector unitari definit per $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_3$).

angles d'Euler $\begin{cases} \theta \text{ nutació} \\ \varphi \text{ precessió} \\ \psi \text{ rotació pròpia} \end{cases}$

(I_1, I_1, I_3) moments principals d'inèrcia

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ velocitat angular en el sistema mòbil.

Remarca. $I_1 = \mu_{G, \mathbf{u}_1} + ml^2$

Proposició

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

Prova. $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 + \dot{\psi} \mathbf{u}_3 + \dot{\theta} \mathbf{n}$. Però

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta (\sin \psi \mathbf{u}_1 + \cos \psi \mathbf{u}_2) + \cos \theta \mathbf{u}_3 \text{ i}$$

$$\mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{u}_1 - \sin \psi \mathbf{u}_2 ,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = & (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \mathbf{u}_1 \\ & + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \mathbf{u}_2 \\ & + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \mathbf{u}_3 . \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

$$= \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2.$$

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

(φ i ψ són cícliques!)

$$p_\psi = M_{x_3}, \quad p_\varphi = M_{\xi_3}$$

$$\left. \begin{aligned} I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) &= M_{x_3} \\ (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\varphi} + I_3\dot{\psi} \cos \theta &= M_{\xi_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) &= M_{x_3} \\ I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= M_{\xi_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_{\xi_3} - M_{x_3} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_{x_3}}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{M_{x_3}}{I_3} - \cos \theta \frac{M_{\xi_3} - M_{x_3} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta$$

Substituint i fent operacions ens queda l'equació de l'energia d'un problema 1D:

$$E' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + V_e(\theta)$$

amb

$$E' = E - M_{x_3}^2 / 2I_3 - mgl$$

$$V_e(\theta) = \frac{(M_{\xi_3} - M_{x_3} \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta)$$

Amb el mètode usual podem posar

$$\dot{\theta} = \pm \frac{2}{I_1} (E' - V_e(\theta))$$

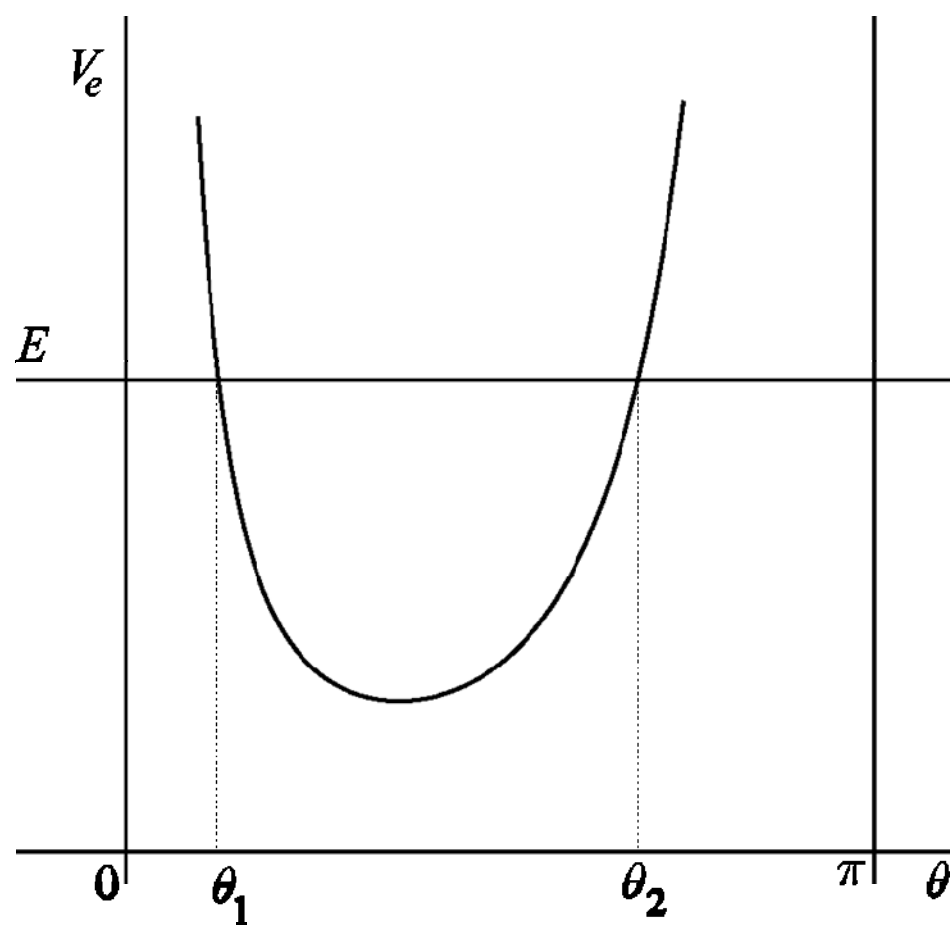
$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1} (E' - V_e(\theta))}}$$

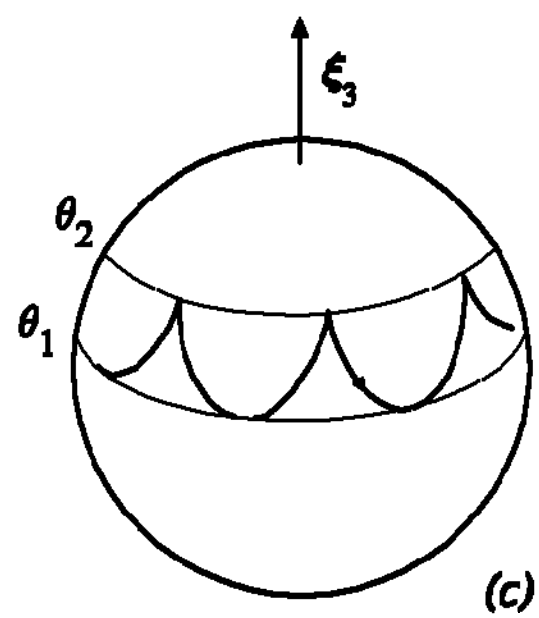
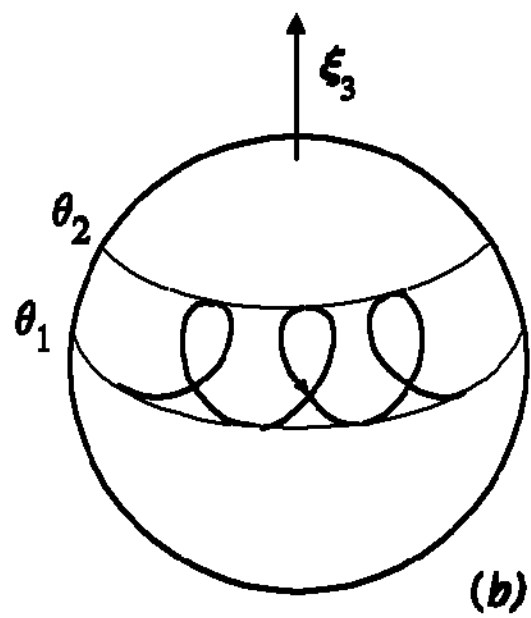
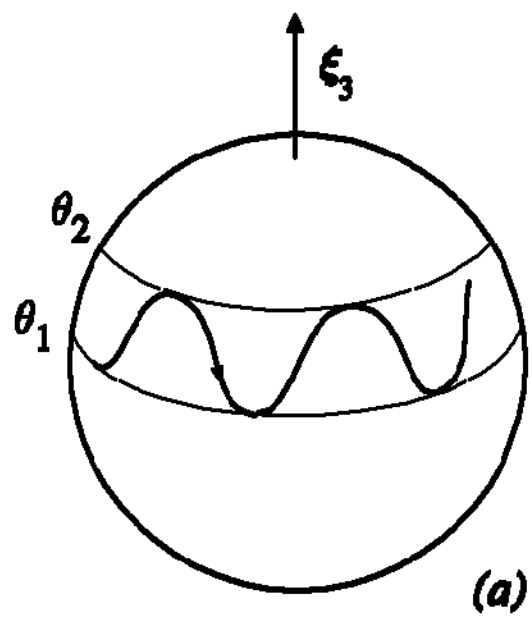
(resulta ser una integral el·líptica). Això ens permet obtenir, en principi, $\theta(t)$, i després, integrant les equacions

$$\dot{\varphi} = \frac{M_{\xi_3} - M_{x_3} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_{x_3}}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{M_{x_3}}{I_3} - \cos \theta \frac{M_{\xi_3} - M_{x_3} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta},$$

$\varphi(t)$ i $\psi(t)$.





Sòlid lliure

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega}$$

$\pm \boldsymbol{r} = \pm \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}}$ són de l'el·lipsoide d'inèrcia $\boldsymbol{x} \cdot I \boldsymbol{x} = 1$.

$$\boldsymbol{x} \cdot I(-\boldsymbol{\omega}/\sqrt{2T}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{M} + \sqrt{2T} = 0$$

pla tangent (π) en el punt $-\boldsymbol{r}$.

Teorema (Poinsot). El pla π és fix i $-\mathbf{r}$ té velocitat nul·la.

