

MMF 11 / 1. *Mecànica*

S. Xambó

1. Cinemàtica dels sistemes no inercials
2. Sistemes unidimensionals (1D)
3. Formalisme lagrangià
4. Lleis de conservació
5. Principi de Hamilton
6. Petites oscil·lacions
7. Problema dels dos cossos
8. Sòlid rígid: tensor d'inèrcia
9. Sòlid rígid: equacions del moviment

Referència històrica: [*Euler and the dynamics of rigid bodies*](#) (sxd).

MMF 11 / 1. *Mecànica*

1. Cinemàtica dels sistemes no inercials

S. Xambó

■ Preliminars

- *Notacions i convencions*
- *Cinemàtica del punt*

■ Cinemàtica respecte d'un sistema no inercial

- *Velocitats*
- *Acceleracions*

■ Exemples

- *Desviament de la vertical en caiguda lliure*
- *Pèndol de Foucault*

Notacions i convencions

Posarem E_3 per denotar l'espai euclidià orientat de dimensió 3, i V_3 per denotar el corresponent espai de vectors lliures.

En el context de la mecànica, E_3 fa la funció de l'*espai absolut* de Newton. Els seus elements seran denotats (generalment) per lletres majúscules, com ara $O, P, Q, \dots$.

Els elements de V_3 seran denotats amb lletres com ara $\mathbf{r}, \mathbf{x}, \dots$, sovint amb subíndexs.

Notem que escollit un punt $O \in E_3$ com a origen, els punts $P \in E_3$ es poden identificar amb els vectors $\mathbf{r} \in V_3$, segons les relacions

$$P = O + \mathbf{r} \text{ o } \mathbf{r} = P - O.$$

Si $\mathbf{r}$ és un vector, posarem r per denotar el seu mòdul.

Si no diem el contrari, tots els sistemes de referència es suposaran cartesianes rectangulars orientats positivament.

Cinemàtica del punt

Un punt mòbil es pot descriure com una funció vectorial de variable real, $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, o per tres funcions reals de variable real $(x(t), y(t), z(t))$ si suposem que tenim definit un sistema de coordenades.

La *velocitat* del punt $\mathbf{r}$ és el vector

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

i l'*acceleració* és

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

En coordenades, i suposant la referència fixa,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}).$$

Exemple (Moviment rectilini uniforme). Si $\mathbf{v}$ és un vector fix, el punt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ recorre la recta que passa per $\mathbf{r}_0$ amb vector director $\mathbf{v}$ i la seva velocitat és $\mathbf{v}$. En aquestes condicions diem que el moviment de $\mathbf{r}$ és *rectilini* i *uniforme*. Notem que l'acceleració de $\mathbf{r}$ és nul·la i, recíprocament, que el moviment d'un punt que té acceleració nul·la és rectilini uniforme.

Exemple (Sistemes inercials i llei d'inèrcia). Un sistema de referència es diu que és *inercial* si les direccions dels seus eixos són fixes i el seu origen té un moviment rectilini uniforme.

Notem que un sistema de referència amb moviment rectilini uniforme respecte d'un sistema inercial és també un sistema inercial. I recíprocament, dos sistemes inercials es mouen en moviment rectilini uniforme un respecte de l'altre.¹

L'acceleració d'un punt és independent del sistema inercial a què referim el punt.²

La **Llei d'inèrcia** (Galileu) postula que el moviment d'una partícula respecte d'un sistema inercial és rectilini uniforme si i només si la partícula és isolada, és a dir, no està sotmesa a cap força. Matemàticament això equival a la relació

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0,$$

on $\mathbf{r}$ és el vector de posició de la partícula. Per tant, **$\ddot{\mathbf{r}} = 0$ equival a dir que sobre la partícula no actua cap força**. La segona Llei de Newton postula que la força $\mathbf{F}$ que actua sobre una partícula de massa m té la forma $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$.

Exemple (Llei de caiguda dels cossos pesants). Un cos que cau sota els efectes de la gravetat està sotmès a una acceleració $\mathbf{g}$ que està dirigida envers el centre de la Terra i que és independent del cos (Galileu). A més, a la superfície de la Terra es té, a nivell del mar, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. En una referència en la qual l'eix Oz és vertical i orientat en sentit ascendent, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

Exercicis: M.1.1, M.1.2, M.1.3

Cinemàtica en un sistema no inercial

Velocitats

Sigui $[O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ una referència mòbil. Sigui $\mathbf{x}$ un vector i

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3$$

la seva expressió en coordenades. Aleshores tenim

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}_1 \mathbf{u}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{u}_2 + \dot{x}_3 \mathbf{u}_3 + x_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + x_2 \dot{\mathbf{u}}_2 + x_3 \dot{\mathbf{u}}_3.$$

El vector

$$\mathbf{x}' = \dot{x}_1 \mathbf{u}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{u}_2 + \dot{x}_3 \mathbf{u}_3$$

és la variació instantània de $\mathbf{x}$ relativament a la referència mòbil.

Per altra banda, si posem Ω per denotar la matriu de $\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\mathbf{u}}_3$ respecte de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, aleshores

$$\begin{aligned} x_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + x_2 \dot{\mathbf{u}}_2 + x_3 \dot{\mathbf{u}}_3 &= (x_1, x_2, x_3) (\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\mathbf{u}}_3)^T \\ &= (x_1, x_2, x_3) ((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \Omega)^T = (x_1, x_2, x_3) \Omega^T (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)^T. \end{aligned}$$

Lema. La matriu Ω és antisimètrica.

En efecte, en ser $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ una base ortonormal, tenim

$$I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

i per tant, derivant,

$$0 = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2, \dot{\mathbf{u}}_3) = \Omega^T + \Omega.$$

Així, doncs,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$$

(els subíndexs i signes s'han escollit per raons que veurem tot seguit), d'on resulta que

$$\begin{aligned}
& x_1 \dot{\mathbf{u}}_1 + x_2 \dot{\mathbf{u}}_2 + x_3 \dot{\mathbf{u}}_3 \\
&= (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) \mathbf{u}_1 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) \mathbf{u}_2 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) \mathbf{u}_3 \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \text{ on } \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).
\end{aligned}$$

En resum, hem obtingut que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

Veiem, doncs, que la variació instantània de $\mathbf{x}$ és la suma de la variació instantània $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{x}$ relativament a la referència mòbil i la velocitat corresponent a la d'una rotació de $\mathbf{x}$ amb velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$, i és per això que $\boldsymbol{\omega}$ s'anomena *velocitat angular* de la referència mòbil.

Notem que posant $\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}$ obtenim

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}'.$$

Sigui ara P un punt mòbil. Com que $P = O + \boldsymbol{x}$, on $\boldsymbol{x} = P - O$, la seva velocitat $\boldsymbol{v}$ ve donada per la fórmula

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x},$$

on $\boldsymbol{v}_O$ és la velocitat de l'origen O .³ Per exemple, si P representa un punt mòbil sobre la superfície de la Terra i O és el centre d'aquesta, aleshores $\boldsymbol{x}'$ és la velocitat de P relativament a la Terra (per exemple, 800 km/h en direcció nord), $\boldsymbol{v}_O$ és la velocitat de O (aproximadament la de translació al voltant del Sol) i $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$ és la part de la velocitat de P que correspon a la rotació de la Terra al voltant del seu eix.

Exercicis. M.1.4, M.1.5

Acceleracions

Si derivem la relació

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

respecte de t , i posem

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{a}_O = \dot{\mathbf{v}}_O$$

(acceleracions del punt P i del punt O), obtenim

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \mathbf{x}'' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}.$$

Els termes $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'$, $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ i $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}$ s'anomenen, respectivament, *acceleració de Coriolis*, *acceleració centrípeta* i *acceleració azimuthal* o *transversa*. Naturalment, $\mathbf{x}''$ és l'acceleració del punt P relativament a la referència mòbil.⁴

Si m és la massa d'una partícula que es mou com el punt P , $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ és la força total que actua sobre aquesta partícula (segona llei de Newton). Per tant, tenint en compte l'expressió de l'acceleració de P , tenim

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}_e ,$$

on

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F} - m(\mathbf{a}_O + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x})$$

Amb aquestes fórmules veiem que l'acceleració $\mathbf{x}''$ relativament a la referència mòbil és produïda per l'anomenada *força efectiva* $\mathbf{F}_e$, la qual es compon de les següents forces:

$\mathbf{F}$ (força física),

$\mathbf{F}_{\text{trans}} = -m\mathbf{a}_O$ (força deguda a l'acceleració translacional),

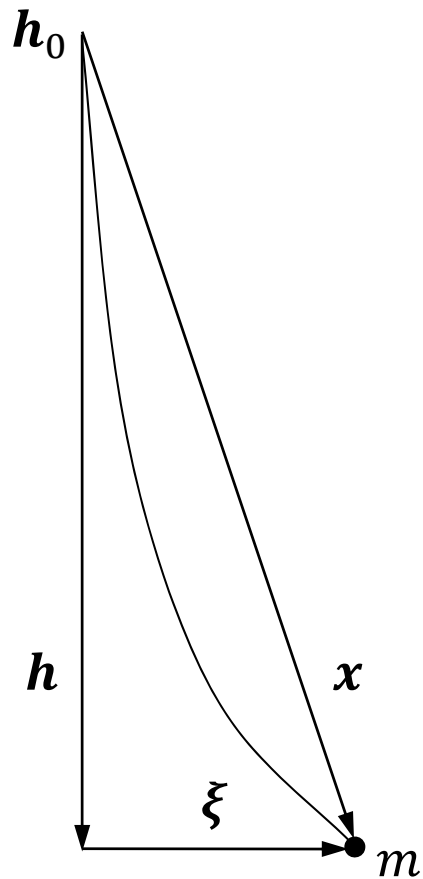
$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'$ (força de Coriolis),

$\mathbf{F}_{\text{cen}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ (força centrífuga) i

$\mathbf{F}_{\text{az}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}$ (força azimuthal o transversal).

Exercicis. M.1.6, M.1.7, M.1.8.

Exemple (Desviament de la vertical en caiguda lliure produït per l'acceleració de Coriolis)



Suposem que una partícula de massa m cau en caiguda lliure des d'una altura $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0$ i amb velocitat inicial $\mathbf{v}_0 = 0$. En aquest exemple trobarem el desviament de la vertical degut a la força de Coriolis suposant que l'altura caiguda és negligible en comparació amb les dimensions de la Terra.

Com a origen O de la referència mòbil prenem un punt de la superfície de la Terra.

Com que la velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$ de la Terra es pot suposar constant,

$$\mathbf{x}'' = \bar{\mathbf{g}} - \mathbf{a}_O - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + 2\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega},$$

on $\bar{\mathbf{g}}$ l'acceleració deguda a l'atracció gravitatòria de la Terra sobre m . En aquesta equació, i en el context del present exemple, l'acceleració centrífuga

– $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ és negligible, ja que $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7.25 \times 10^{-5}$ rad/s, x és de l'ordre de 10^2 m i $\omega^2 x$ és de l'ordre de 10^{-6} m/s². Per altra banda $\mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} - \mathbf{a}_O$ és l'**acceleració gravitatòria**, ja que aquesta es defineix com “la força exercida per la Terra i la seva rotació sobre la unitat de massa” (de fet, $\mathbf{a}_O$ és la suma de l'acceleració $\mathbf{a}_G$ del centre G de la Terra i l'acceleració $\mathbf{a}_{OG}$ de O respecte de G ; càlculs elementals mostren que a_G és de l'ordre de 6 mm/s² i $a_{OG} = R\omega^2 \sin \varphi$ de l'ordre 34 sin φ mm/s², φ la latitud de O i R el radi de la Terra). En suma, ens queda l'equació

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{g} + 2\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega}.$$

Si $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$ dóna la posició de m suposant que no hi ha força de Coriolis, aleshores

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

Posem $\mathbf{x} = \mathbf{h} + \boldsymbol{\xi}$. Llavors

$$\mathbf{x}' = \mathbf{h}' + \boldsymbol{\xi}' = \mathbf{g}t + \boldsymbol{\xi}', \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{g} + \boldsymbol{\xi}'',$$

i l'equació $\mathbf{x}'' = \mathbf{g} + 2\mathbf{x}' \wedge \boldsymbol{\omega}$ esdevé

$$\xi'' = 2(\mathbf{g}t) \times \boldsymbol{\omega}$$

(hem negligit el terme $2\xi' \wedge \boldsymbol{\omega}$, que resulta ser $O(\omega^2)$). Integrant,

$$\xi = \frac{1}{3}(\mathbf{g}t^3 \times \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega},$$

on h és l'altura caiguda (i, per tant, $t \simeq \sqrt{2h/g}$).

Si prenem com a eixos mòbils $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, on

$\mathbf{e}_x$ és tangent al meridià en direcció sud,

$\mathbf{e}_y$ és tangent al paral·lel en direcció est, i

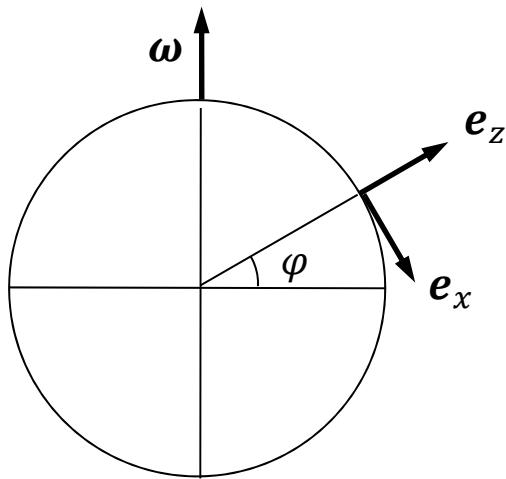
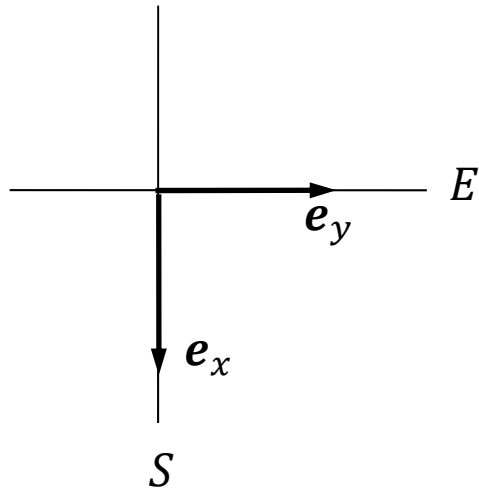
$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y$ és vertical en direcció al zenit,

llavors

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (0, 0, -g), \quad \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_x, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_y, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_z) \\ &= (-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi), \end{aligned}$$

$$\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} = (0, g\omega \cos \varphi, 0) = g\omega \cos \varphi \mathbf{e}_y.$$

Per tant,



$$\xi = \frac{1}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} g \omega \cos \varphi \mathbf{e}_y = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \omega \cos \varphi \mathbf{e}_y .$$

Per exemple, en una caiguda de 250m a 42° de latitud nord, $\xi = 6.4$ cm.

Valors de ξ (en mm) corresponents a diversos valors de h (en m)

h	0	50	100	150	200	250	300
ξ	0.0	5.8	16.3	29.9	46.0	64.3	84.5

Pèndol de Foucault

Considerem un sistema solidari amb la Terra com en l'exemple anterior, i suposem que tenim un pèndol ideal de freqüència angular α (en les petites oscil·lacions) movent-se en el pla xy . Podem suposar $\dot{z} = 0$, de manera que la velocitat del pèndol és $\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y$. Com que

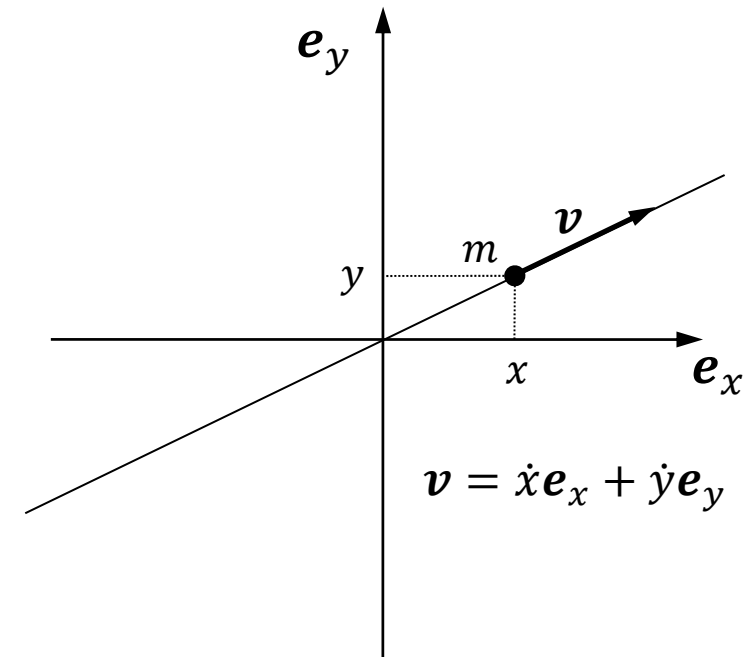
$$\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_z),$$

la força de Coriolis és

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Cor}} &= -2m\omega(-\cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_z) \times (\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y) \\ &= 2m\omega \sin(\varphi) \dot{y} \mathbf{e}_x - 2m\omega \sin(\varphi) \dot{x} \mathbf{e}_y \\ &\quad + 2m\omega \cos(\varphi) \dot{y} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

D'aquesta força, només la seva component horitzontal actua sobre el pèndol, i aquesta component és

$$2m\omega_\varphi(\dot{y} \mathbf{e}_x - \dot{x} \mathbf{e}_y), \quad \omega_\varphi = \omega \sin(\varphi).$$



Les equacions del moviment són:

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x + 2\omega_\varphi \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\alpha^2 y - 2\omega_\varphi \dot{x}$$

Fent $\xi = x + iy$, aquestes equacions equivalen a

$$\ddot{\xi} + 2i\omega_\varphi \dot{\xi} + \alpha^2 \xi = 0.$$

Les solucions són

$$\xi = e^{\lambda t},$$

amb λ arrel de

$$\lambda^2 + 2i\omega_\varphi \lambda + \alpha^2 = 0.$$

És a dir,

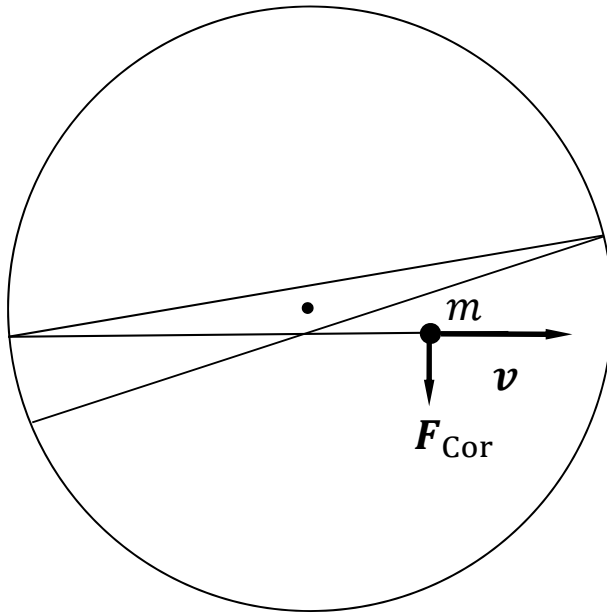
$$\lambda = -i\omega_\varphi \pm i\sqrt{\alpha^2 + \omega_\varphi^2}.$$

Com que $\alpha \gg \omega_\varphi$, podem prendre

$$\lambda = -i(\omega_\varphi \pm \alpha),$$

de manera que

$$\xi = e^{-i\omega_\phi t} (c_1 e^{i\alpha t} + c_2 e^{-i\alpha t}).$$



El terme entre parèntesis dóna el moviment del pèndol sense Coriolis, que és una oscil·lació harmònica de freqüència angular α . Per exemple, l'oscil·lació $(a \cos(\alpha t), 0)$ al llarg de l'eix Ox s'obté amb $c_1 = c_2 = a/2$.

Com $e^{-i\omega_\phi t}$ és un gir d'amplitud $\omega_\phi t$, en el sentit horari, veiem que l'efecte de la força de Coriolis és fer girar el pla d'oscil·lació del pèndol amb una velocitat angular ω_ϕ en el sentit horari del pla xy .

Notes

1. Si el punt X es mou amb moviment rectilini uniforme respecte d'un sistema inercial amb origen P (de manera que P es mou amb moviment rectilini uniforme respecte d'un origen fix O), llavors tenim:

$$P = O + \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad X = P + \mathbf{x}_0 + t\mathbf{w},$$

d'on resulta que

$$Q = O + \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} + \mathbf{x}_0 + t\mathbf{w} = O + \mathbf{r}_0 + \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

la qual cosa mostra que Q es mou amb moviment rectilini uniforme (i la seva velocitat és la suma de la velocitat de P i la velocitat de X respecte de P).

Un argument similar mostra que si $P = O + \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ i $Q = O + \mathbf{s}_0 + t\mathbf{w}$, aleshores $Q = P + (Q - P) = P + (\mathbf{s}_0 - \mathbf{r}_0) + t(\mathbf{w} - \mathbf{v})$, la qual cosa mostra que Q es mou amb velocitat uniforme $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ respecte de P .

2. Suposem que l'acceleració de X respecte d'un sistema inercial amb origen O és $\mathbf{a}$. Sigui P l'origen d'un altre sistema inercial i $X = O + \mathbf{x} = P + \mathbf{y}$. Aleshores

$P = O + \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ i per tant $\mathbf{x} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} + \mathbf{y}$. Ara basta derivar dues vegades respecte de t per obtenir que $d^2\mathbf{y}/dt^2 = d^2\mathbf{x}/dt^2 = \mathbf{a}$.

3. Si no hi ha rotació ($\boldsymbol{\omega} = 0$), $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{x}'$, que és la llei de Galileu de composició de velocitats. Si a més el punt no es mou respecte del sistema mòbil, tenim $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O$. Veiem així que tots els punts fixos respecte del sistema mòbil tenen la mateixa velocitat.

4. Si no hi ha rotació, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \mathbf{x}''$. Si a més el punt no es mou respecte del sistema mòbil, tenim $\mathbf{a} = \mathbf{a}_O$. Veiem així que tots els punts fixos respecte del sistema mòbil tenen la mateixa acceleració.

Exercicis M.1 (Cinemàtica de sistemes no inercials)

M.1.1 Un cotxe es mou a velocitat constant v . Suposant que les seves rodes tenen radi r , trobeu la velocitat (vectorial) dels dos punts de la circumferència de la roda que estan a una altura h , $0 \leq h \leq 2r$.

M.1.2 (Corben-Stehle, p.26). Si a i b són la màxima acceleració i la màxima desacceleració que pot assolir un tren, proveu que el mínim temps que li cal per recórrer una distància d , començant i acabant en repòs, és

$$\left[\frac{2d(a+b)}{ab} \right]^{1/2}.$$

M.1.3. Un cos experimenta un moviment rectilini uniformement accelerat i s'observa que tarda uns temps t i t' en recórrer dos intervals consecutius de longitud d . Demostreu que la seva acceleració és

$$\frac{2d(t-t')}{tt'(t+t')}.$$

M.1.4. Sigui A un punt, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ una base ortonormal positiva i suposem que la velocitat angular de $[A, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ respecte de $[O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ és $\boldsymbol{\rho}$.

Proveu que aleshores la velocitat angular de $[A, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ és $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\rho}$. En particular resulta que si A i $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ són fixos relativament a una referència mòbil $[O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, aleshores la velocitat angular de la referència $[A, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ coincideix amb la velocitat angular de $[O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

Solució. Si $\mathbf{x}$ és un vector fix respecte de $[A, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, i posem $\boldsymbol{\tau}$ per denotar la velocitat angular d'aquest sistema, llavors tenim:

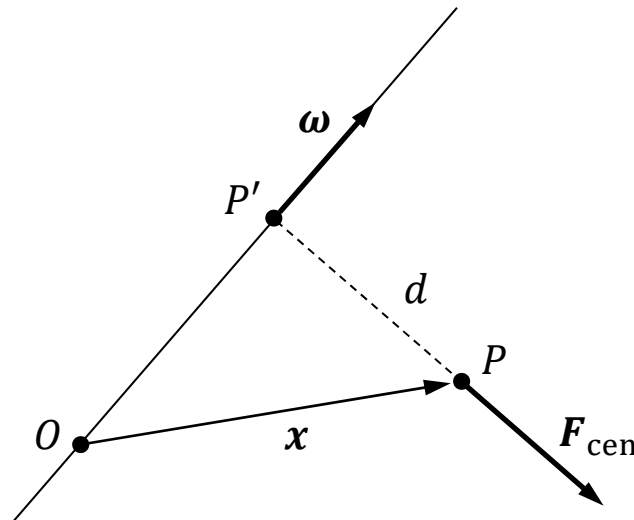
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \end{cases}$$

M.1.5. Si $\omega \neq 0$ i P és un punt en repòs respecte del sistema mòbil, aleshores P està en repòs instantani respecte de O si i només si és de la recta $O + \langle \omega \rangle$ (aquesta és la raó per la qual aquesta recta s'anomena *eix instantani de rotació* del sistema mòbil). Deduïu-ne que si un cilindre o un con rodolen sense lliscament sobre un pla, aleshores la generatriu del cilindre o con en contacte amb el pla és l'eix instantani de rotació respecte d'una referència solidària amb el cilindre o con i amb origen sobre la generatriu.

Solució. Per definició, $P = O + x$ està en repòs instantani respecte de O si la velocitat de P respecte de O és nul·la, és a dir, si $\dot{x} = 0$. Però com que $x' = 0$, la condició $\dot{x} = 0$ equival a $\omega \times x = 0 \Leftrightarrow x \in \langle \omega \rangle \Leftrightarrow P \in O + \langle \omega \rangle$.

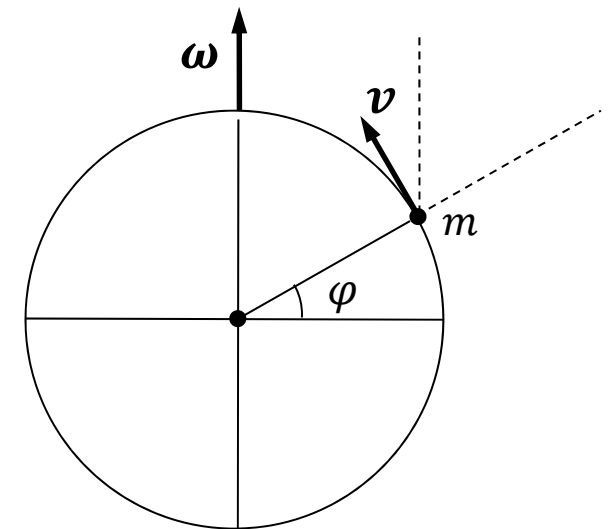
M.1.6. Proveu que $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = m\omega^2 \overrightarrow{P'P}$, on P' és la projecció ortogonal de P sobre $O + \langle \boldsymbol{\omega} \rangle$. Veiem, doncs, que aquesta força és perpendicular a la velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$, que el seu mòdul és $m\omega^2 d$, on d és la distància de P al l'eix instantani de rotació, i que està dirigida en sentit $\overrightarrow{P'P}$.

Solució. Per la fórmula del doble producte vectorial tenim que $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{x} = -\omega^2(\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u})$, on $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}/\omega$. Però $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \text{pr}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) = \overrightarrow{OP'}$ i per tant $\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{P'P}$. Podem, doncs, escriure $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = -\omega^2 \overrightarrow{P'P}$, d'on $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = m\omega^2 \overrightarrow{P'P}$, com volíem veure.



M.1.7. Un pla horitzontal gira en sentit antihorari amb velocitat angular constant ω . Si una partícula de massa m es mou sobre aquest pla, mostreu que la força de Coriolis és igual a $-2m\omega\mathbf{x}'^\perp$, on $\mathbf{x}'^\perp$ és el vector perpendicular a $\mathbf{x}'$ que té la mateixa longitud que $\mathbf{x}'$ i tal que l'orientació $[\mathbf{x}', \mathbf{x}'^\perp]$ és l'antihorària del pla. Mostreu també que la força centrífuga és igual a $m\omega^2\mathbf{x}$, on $\mathbf{x}$ és el vector de posició de la partícula respecte del centre de rotació del pla.

M.1.8. Proveu que la força de Coriolis sobre una massa puntual m que es mou horitzontalment en direcció nord, a una latitud φ i amb velocitat v , té mòdul $2m\omega v|\sin(\varphi)|$, on ω és la velocitat de rotació de la Terra, i que està dirigida envers l'est (oest) a l'hemisferi nord (sud). Quin valor té aquesta força quan el mòbil és un avió de 100 tones a una velocitat de 1000 Km per hora?



Indicació. La força de Coriolis és tangent al paral·lel de m , ja que és perpendicular al pla $\langle \omega, v \rangle$, que coincideix amb el pla meridià de m (el pla del paper en la figura), i l'angle que formen ω i v és φ .

M.1.9. Sigui S_g el sistema de referència dit *geocèntric*, és a dir, amb origen al centre de la Terra i eixos fixos respecte dels estels. Calculeu la velocitat respecte de S_g d'un coet que és llançat des d'un punt de la superfície de la Terra de latitud φ i verticalment cap amunt amb velocitat v_0 . Si volem aprofitar al màxim el moviment de rotació de la Terra, des d'on és millor fer el llançament: de la base de Kourou, a la Guaiana francesa (latitud 5.23°) o de Cap Canaveral (latitud 29°)?

M.1.10. Una partícula de massa m que es mou per un pla horitzontal passa per l'origen de coordenades amb velocitat v_0 . Admetent que no actua cap altra força sobre la partícula llevat de la gravitatòria i la de reacció que la manté sobre el pla, proveu que descriurà una trajectòria circular de radi $R = \frac{v_0}{2\Omega_T |\sin(\varphi)|}$, on Ω_T és la velocitat de rotació de la Terra i φ és la latitud del punt de la superfície de la Terra on es troba el pla del moviment.