

MMF 10 / 2. *Electromagnetisme*

9. Potencial vector i potencial escalar

S. Xambó

- Potencial vector (o potencial magnètic)
- Potencial escalar
- Condició de Lorentz
- Equacions dels potencials
- Quadripotencial i quadricorrent

Potencial vector (o potencial magnètic)

Com que $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, existeixen camps $\mathbf{A}$ tals que

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) .$$

Direm que $\mathbf{A}$ és un *potencial magnètic*, o un *potencial vector*.

Remarca. Recordem que en el cas magnetostàtic tenim una fórmula explícita que dóna un potencial magnètic, fórmula que caldrà modificar apropiadament en el cas general (ho farem posteriorment).

El vector $\mathbf{A}$ està determinat llevat transformacions de la forma

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \partial\alpha , \quad [*]$$

on α és una funció arbitrària. Seguint la nomenclatura acceptada, aquestes transformacions seran anomenades *transformacions de gauge* del potencial magnètic (“gauge” es pronuncia *guéitx*).

Potencial escalar

Observem ara que

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B} = -\partial_t (\text{rot}(\mathbf{A})) = -\text{rot}(\partial_t \mathbf{A}) ,$$

d'on

$$\text{rot}(\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0 .$$

Per tant, existeix una funció ϕ (determinada llevat constants additives) tal que

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\partial \phi ,$$

és a dir, tal que

$$\mathbf{E} = -\partial \phi - \partial_t \mathbf{A} .$$

Direm que ϕ és un *potencial escalar*. Donat $\mathbf{A}$, està definit llevat d'una constant additiva.

Notem que si fem la transformació de gauge $[\ast]$, llavors la corresponent transformació de ϕ és

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - \partial_t \alpha.$$

En efecte, si $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \partial\alpha$, es tracta de buscar la funció ϕ' tal que

$$\mathbf{E} = -\partial\phi' - \partial_t \mathbf{A}'.$$

Com que també tenim $\mathbf{E} = -\partial\phi - \partial_t \mathbf{A}$, restant obtenim

$$0 = \partial(\phi' - \phi) + \partial_t(\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = \partial(\phi' - \phi) + \partial_t \partial\alpha = \partial(\phi' - \phi + \partial_t \alpha).$$

Per tant $\phi' - \phi + \partial_t \alpha$ és una constant, i això prova la relació, ja que ϕ i ϕ' estan definides llevat una constant additiva.

Per tant, tenim la següent transformació combinada dels potencials:

$$(\mathbf{A}, \phi) \mapsto (\mathbf{A} + \partial\alpha, \phi - \partial_t \alpha).$$

Condicció de Lorentz

Quan s'han fixat els potencials electromagnètics, es sol dir que *s'ha fixat el gauge*. Normalment això es fa escollint α de manera que $\mathbf{A}'$ i ϕ' compleixin alguna condició addicional.

El més important en el nostre estudi és el que anomenarem gauge de Lorentz: diem que $(\mathbf{A}, \phi)$ compleix la *condició de Lorentz*, o que està en el *gauge de Lorentz*, si

$$\text{div}(\mathbf{A}) + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\phi = 0 .$$

Proposició. Si $(\mathbf{A}, \phi)$ no compleix la condició de Lorentz, la condició necessària i suficient per tal que $(\mathbf{A}', \phi') = (\mathbf{A} + \boldsymbol{\partial}\alpha, \phi - \partial_t\alpha)$ la compleixi és que α satisfaci l'equació

$$\square\alpha = -h, \quad h = \operatorname{div}(\mathbf{A}) + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\phi.$$

Prova. Basta adonar-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{A}') + \varepsilon_0\mu_0\partial_t\phi' &= \operatorname{div}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\partial}\alpha) + \varepsilon_0\mu_0\partial_t(\phi - \partial_t\alpha) \\ &= h + \operatorname{div}(\boldsymbol{\partial}\alpha) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\alpha = h + \Delta\alpha - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\alpha = h + \square\alpha. \end{aligned}$$

Corol·lari. Com que l'equació $\square\alpha = -h$ té com a solució particular

$$\alpha_{\text{Alambert}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{h\left(\mathbf{x}, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega(\mathbf{x}),$$

veiem que sempre existeix un gauge de Lorentz.

Equacions dels potencials

Anem a veure ara quines equacions compleixen els potencials $\mathbf{A}$ i ϕ , especialment quan compleixen la condició de Lorentz.

Equació del potencial vector. Per l'equació d'Ampère—Maxwell, i la definició de potencials,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{B}) &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \\ &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t (-\partial \phi - \partial_t \mathbf{A}) \\ &= \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial(\partial_t \phi) - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{A} .\end{aligned}$$

Per altra banda,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = \partial(\operatorname{div}(\mathbf{A})) - \Delta \mathbf{A} .$$

Igualant, $\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} + \partial(\operatorname{div}(\mathbf{A})) + \mu_0 \varepsilon_0 \partial(\partial_t \phi)$.

Proposició. $\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} + \partial h$, on $h = \operatorname{div}(\mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi$.

Corol·lari. $\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ en el gauge de Lorentz.

$\square \mathbf{A} = 0$ si estem en el buit.

Equació del potencial escalar

Podem procedir similarment amb el potencial escalar. D'una banda,

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \rho / \varepsilon_0 ,$$

per la llei de Coulomb-Gauss, i de l'altra,

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \text{div}(-\partial \phi - \partial_t \mathbf{A}) = -\Delta \phi - \partial_t (\text{div}(\mathbf{A})).$$

Així doncs $\Delta \phi = -\rho / \varepsilon_0 - \partial_t (\text{div}(\mathbf{A}))$. Restant $\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \phi$ dels dos membres, $\Delta \phi - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \phi = -\rho / \varepsilon_0 - \partial_t (\text{div}(\mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi)$.

Proposició. $\square \phi = -\rho / \varepsilon_0 - \partial_t h$, on $h = \text{div}(\mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi$.

Corol·lari. $\square \phi = -\rho / \varepsilon_0$ en el gauge de Lorentz.

$\square \phi = 0$ si estem en el buit.

Quadripotencial i quadricorrent

Posem $\mathbf{a} = [\mathbf{A}, \phi]$. Direm que $\mathbf{a}$ és el *quadripotencial*.

Posem $\mathbf{j} = [\mu_0 \mathbf{j}, \rho/\varepsilon_0]$. Direm que $\mathbf{j}$ és el *quadricorrent*.

L'enunciat que segueix és una conseqüència immediata de les equacions dels potencials.

Teorema (Equació del quadripotencial). $\square \mathbf{a} = -\mathbf{j} + \boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} = [\partial h, -\partial_t h]$, $h = \text{div}(\mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi$.

L'equació del quadripotencial s'ha deduït de les equacions de Maxwell. Recíprocament:

Teorema. L'equació $\square \mathbf{a} = -\mathbf{j} + \boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} = [\partial h, -\partial_t h]$, $h = \text{div}(\mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \phi$ implica les equacions de Maxwell per als camps

$$\mathbf{E} = -\partial \phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) .$$

Prova. Un petit càlcul per a cada equació de Maxwell.

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = 0.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{E}) &= -\operatorname{div}(\boldsymbol{\partial}\phi + \partial_t \mathbf{A}) = -\Delta\phi - \partial_t \operatorname{div}(\mathbf{A}) \\ &= \rho/\varepsilon_0 + \partial_t h - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \phi - \partial_t \operatorname{div}(\mathbf{A}) = \rho/\varepsilon_0.\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\operatorname{rot}(\boldsymbol{\partial}\phi) - \partial_t(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = -\partial_t(\mathbf{B}).$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{B}) &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = \boldsymbol{\partial}(\operatorname{div}(\mathbf{A})) - \Delta\mathbf{A} = \boldsymbol{\partial}h - \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{\partial}(\partial_t \phi) - \Delta\mathbf{A} \\ &= \boldsymbol{\partial}h - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t(\boldsymbol{\partial}\phi) - \Delta\mathbf{A} = \boldsymbol{\partial}h + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t(\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \\ &= \boldsymbol{\partial}h - \square\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Exercicis

E.9.1. Sigui $\mathbf{A}'$ el potencial vector d'un camp electromagnètic. Suposant que $\text{div}(\mathbf{A}')$ s'anul·la a l'infinit, proveu que existeix una funció α tal que $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \partial\alpha$ satisfà $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$ (si es satisfà aquesta condició, es diu que el potencial està en el *gauge de Coulomb*).

E.9.2. Donats els potencials $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\kappa \frac{qt}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ i $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$,

(1) trobeu $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, ρ i $\mathbf{j}$.

(2) Trobeu la transformació de gauge $[\mathbf{A}', \phi']$ de $[\mathbf{A}, \phi]$ corresponent a la funció $\alpha = -\kappa \frac{qt}{r}$, i interpreteu el resultat.

E.9.3. Demostreu que en termes dels potencials la força de Lorentz per unitat de càrrega elèctrica, $\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, és igual a

$$-d_t \mathbf{A} - \partial(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \text{ on } d_t = \partial_t + v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z = \partial_t + \mathbf{v}^\nabla$$