

MMF 10 / **2. *Electromagnetisme***

8. Energia del camp electromagnètic

S. Xambó

- **Energia electromagnètica**
- **Conservació de l'energia del camp electromagnètic**
- **Exemple: energia d'un camp magnètic estàtic**
- **Exemple: Estimació del valor del camp electromagnètic d'un làser**
- **Annex: Algunes unitats del SI**
- **Notes**

Energia electromagnètica. Vector de Poynting

Donat un camp electromagnètic, la seva *densitat d'energia electromagnètica* es defineix per la fórmula

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 .^1$$

Per una regió V de l'espai, la seva *energia electromagnètica* es defineix per l'expressió

$$U = \int_V u \, d\omega .$$

Finalment, el *vector de Poynting* es defineix per l'expressió

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} .^1$$

Per una ona electromagnètica monocromàtica, és un vector paral·lel a la direcció de propagació de l'ona.

Conservació de l'energia del camp electromagnètic

Teorema (Poynting). Si K és l'energia cinètica de les partícules que es mouen en una regió V i sobre aquestes partícules no actua altra força que la de Lorentz, llavors

$$\dot{K} = -\dot{U} - \phi_{\partial V}(\mathbf{S}) .$$

Prova. La variació instantània d'energia cinètica d'una partícula de massa m i càrrega q és $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E},$$

ja que $\mathbf{v}$ és perpendicular a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$.

Així, doncs, la potència exercida pel camp electromagnètic sobre l'element de volum $d\omega$ és $(\rho d\omega)\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\omega$, d'on resulta que

$$\dot{K} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\omega .$$

Però $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\mathbf{B}) - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ (per la llei d'Ampère–Maxwell), i per tant

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \text{rot}(\mathbf{B}) - \varepsilon_0 (\partial_t \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \cdot \text{rot}(\mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \text{rot}(\mathbf{E})) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \text{rot}(\mathbf{E}) - \varepsilon_0 (\partial_t \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} (\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{B} - \varepsilon_0 (\partial_t \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \\
 &= -\text{div}(\mathbf{S}) - \partial_t \left(\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \right) \\
 &= -\text{div}(\mathbf{S}) - \partial_t u
 \end{aligned}$$

Finalment

$$\begin{aligned}
 \dot{K} &= \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, d\omega = -\int_V (\partial_t u) \, d\omega - \int_V \text{div}(\mathbf{S}) \, d\omega \\
 &= -\frac{d}{dt} \int_V u \, d\omega - \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \\
 &= -\dot{U} - \phi_{\partial V}(\mathbf{S}).
 \end{aligned}$$

Remarca. El teorema anterior mostra que U i $\phi_{\partial V}(\mathbf{S})$ representen energies, ja que l'augment (disminució) de qualsevol d'elles equival a una disminució (augment) de l'energia cinètica K . L'energia U (*energia electromagnètica*) està distribuïda en tot el volum V segons la densitat u , mentre que $\phi_{\partial V}(\mathbf{S})$ expressa la quantitat d'aquesta energia que surt de V per unitat de temps.

Adonem-nos que

$$\phi_{\partial V}(\mathbf{S}) = -\frac{d}{dt}(K + U),$$

de manera que la quantitat d'energia que surt de V per unitat de temps coincideix amb la disminució instantània de l'energia continguda a V (mecànica i electromagnètica) per unitat de temps.

Exemple: energia d'un camp magnètic estàtic

En el cas d'un camp elèctric estàtic, l'energia que li hem d'atribuir, segons el teorema, és $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \mathbf{E}^2 d\omega$. Aquest valor coincideix amb el que vam trobar a (**E.3**, pàg. 6). Allà també vam descobrir que l'energia del camp elèctric es podia expressar com $\frac{1}{2} \int \rho \phi d\omega(\mathbf{x})$.

L'energia d'un camp magnètic estàtic és, segons el teorema, $\frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 d\omega$. En aquest cas, però, no hem descobert encara cap fórmula anàloga a $\frac{1}{2} \int \rho \phi d\omega(\mathbf{x})$. Atès que per al camp magnètic $\mathbf{j}$ i $\mathbf{A}$ fan el paper de ρ i ϕ per al camp elèctric, una tal fórmula podria ser $\frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\omega(\mathbf{x})$. Vegem que aquesta conjectura és correcta. En efecte, per la llei d'Ampère,

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{A}) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2.$$

Per tant,

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 d\omega + \frac{1}{\mu_0} \int \operatorname{div}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) d\omega.$$

Però $r^2 B$ i rA s'anul·len a l'infinit, i així (l'argument és anàleg a l'exposat en el cas elèctric), $\frac{1}{\mu_0} \int \operatorname{div}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) d\omega = 0$. Tenim, doncs, que

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}^2 d\omega ,$$

com volíem demostrar.

Exemple: Estimació del valor del camp electromagnètic d'un làser

Un raig làser de potència p mW (miliwatt) emet un raig de llum monocromàtica de secció transversa s mm². Calcularem els valors màxims del camp elèctric i magnètic en el cas que el raig estigui linealment polaritzat i en el cas que estigui circularment polaritzat. Suposarem que el raig és un front d'ones pla perpendicular al raig.

Posem els eixos de coordenades de manera que l'eix del raig sigui Ox . Aleshores el camp $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ del raig tenen la forma

$$\mathbf{E} = (0, E_1 \cos(kx - \omega t), E_2 \cos(kx - \omega t + \phi)) ,$$

$$\mathbf{B} = (0, -E_2 \cos(kx - \omega t + \phi), E_1 \cos(kx - \omega t)) ,$$

on $\phi \in [0, 2\pi)$ és una constant.

El vector de Poynting de l'ona és $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$, és a dir,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (E_1^2 \cos^2(kx - \omega t) + E_2^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)) \mathbf{e}_x .$$

El flux d'aquest vector a través d'una secció perpendicular al raig és

$$w = \frac{s}{\mu_0} (E_1^2 \cos^2(kx - \omega t) + E_2^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)) .$$

Ara sabem que aquest flux és la quantitat d'energia electromagnètica que travessa la secció per segon i la potència p del làser és el promig d'aquesta energia,

$$p = \langle w \rangle .$$

Ara, per la periodicitat de la funció $\cos$, aquest promig és igual al del promig w en un semiperíode, d'on en resulta (perquè el promig de $\cos^2(x)$ en un semiperíode és $1/2$),

$$p = \frac{s}{2\mu_0} (E_1^2 + E_2^2) .$$

El màxim de $E^2 = E_1^2 \cos^2(kx - \omega t) + E_2^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)$ no sembla fàcil de trobar explícitament per un ϕ qualsevol.

En el cas d'una ona linealment polaritzada, $\phi = 0$ i

$$E^2 = (E_1^2 + E_2^2)\cos^2(kx - \omega t),$$

amb la qual cosa el màxim de E^2 és

$$E_1^2 + E_2^2 = \frac{2p\mu_0}{s}.$$

En el cas d'una ona circularment polaritzada ($\phi = \pi/2$ i $E_1 = E_2$), $E^2 = E_1^2$ (és, doncs, constant) i $p = \frac{s}{\mu_0} E_1^2 = \frac{s}{\mu_0} E^2$, i per tant

$$E^2 = \frac{p\mu_0}{s}.$$

Exercisis

E.8.1. L'energia que cal per carregar un condensador pla de capacitat C amb una càrrega q és $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ (per definició de C , $q = CV$, on V és la diferència de potencial entre les plaques del condensador). Demostreu que aquesta energia coincideix amb la del camp elèctric creat pel condensador (podeu suposar que la separació de les plaques és negligible respecte de la seva àrea).

E.8.2. 1) Proveu que l'energia que cal per carregar un condensador format per dues esferes conductores concèntriques de radis $r_0 < r_1$, i entre les quals hi ha el buit, és $\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1}$, on q és la càrrega de l'esfera positiva. **2)** Comproveu que també coincideix amb l'energia del camp elèctric creat pel condensador.

3) Fent tendir r_1 a l'infinit, obtenim que l'energia d'una esfera conductora de radi r carregada amb una càrrega q és $\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$. Useu aquest resultat per trobar

l'anomenat “radi clàssic de l'electró”, és a dir, el radi que ha de tenir una esfera carregada amb eC per tal que la seva energia sigui la d'un electró, és a dir, $m_e c^2$ (fórmula d'Einstein).

[Resposta: $1.4 \times 10^{-15} \text{m} = 1.4 \text{ fermi}$; un *fermi* és 10^{-15}m]

E.8.3. Amb les notacions emprades en el teorema de conservació de l'energia del camp electromagnètic, i posant k per denotar la densitat d'energia cinètica, proveu que $\text{div}(\mathbf{S}) = -\partial_t(k + u)$.

Annex: Algunes unitats del SI

Magnitud	Nom	Símbol	Dimensions
Massa	kilogram	kg	kg
Longitud	metre	m	m
Temps	segon	s	s
Força	newton	N	kg m s^{-2}
Treball/energia	joule	$\text{J}=\text{N}\cdot\text{m}$	$\text{kg m}^2\text{s}^{-2}$
Potència	watt	W	J s^{-1}
Corrent elèctric	ampere	A	A
Càrrega elèctrica	coulomb	C	A s
Potencial elèctric	volt	V	$\text{W/A} = \text{Wb/s} = \text{kg m}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-1}$
Camp elèctric	volt/metre	V/m	$\text{kg m s}^{-3}\text{A}^{-1}$
Capacitat	farad	F	$\text{C/V} = \text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}\text{s}^4\text{A}^2$
Camp magnètic	tesla	T	$\text{Wb/m}^2 = \text{kg s}^{-2}\text{A}^{-1}$
Flux magnètic	weber	Wb	$\text{V s} = \text{kg m}^2\text{s}^{-2}\text{A}^{-1}$
Inductància	henry	H	$\text{kg m}^2\text{s}^{-2}\text{A}^{-2}$
Resistència	ohm	Ω	$\text{V/A} = \text{kg m}^2\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$
Conductància	siemens	S	$\text{A/V} = \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2}\text{s}^3\text{A}^2$

Notes

1. (Pàg. 2) De vegades convé introduir el vectors $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ (*desplaçament elèctric*) i $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$ (*intensitat magnètica*). Per exemple, en termes d'aquests vectors tenim

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}).$$

2. (Pàg. 3) Aquest resultat també es coneix com a teorema de Poynting.