

MMF 10 / **2. *Electromagnetisme***

7. Ones electromagnètiques

S. Xambó

- Equacions d'ones en el buit
- Ones planes
- Ones electromagnètiques monocromàtiques
- Polarització de les ones monocromàtiques
- Notes

“On the theory that light is an electromagnetic disturbance, propagated in the same medium through which other electromagnetic actions are transmitted, V [the propagation speed, which is equal to $1/\sqrt{K\mu}$] must be the velocity of light, a quantity the value of which has been estimated by several methods. [...] Hence the agreement or disagreement ... furnishes a test of the electromagnetic theory of light.”

J.C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II, pàg. 435.

Equacions d'ones en el buit

Fet experimental: $\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$, c la velocitat de la llum en el buit.

Les equacions de Maxwell en el buit, on no hi ha càrregues (ni corrent), adopten la forma següent:

$\text{div}(\mathbf{E}) = 0$	$\text{div}(\mathbf{B}) = 0$
$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$	$\text{rot}(\mathbf{B}) = c^{-2} \partial_t \mathbf{E}$

Els càlculs

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{E})) = \begin{cases} \partial(\text{div}(\mathbf{E})) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \\ \text{rot}(-\partial_t \mathbf{B}) = -\partial_t(\text{rot}(\mathbf{B})) = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} \end{cases}$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{B})) = \begin{cases} \partial(\text{div}(\mathbf{B})) - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B} \\ \text{rot}\left(\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}\right) = \frac{1}{c^2} \partial_t(\text{rot}(\mathbf{E})) = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} \end{cases}$$

ens donen que

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \mathbf{E} = 0 \quad \text{i} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \mathbf{B} = 0.$$

És a dir, $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ satisfan l'equació d'ones tridimensional de velocitat c .

Si definim l'operador

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$$

(anomenat *dalembertià*), les equacions d'ones queden resumides en

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0.$$

Nota. El dalembertià també és denotat $\square^2$.

Ones planes

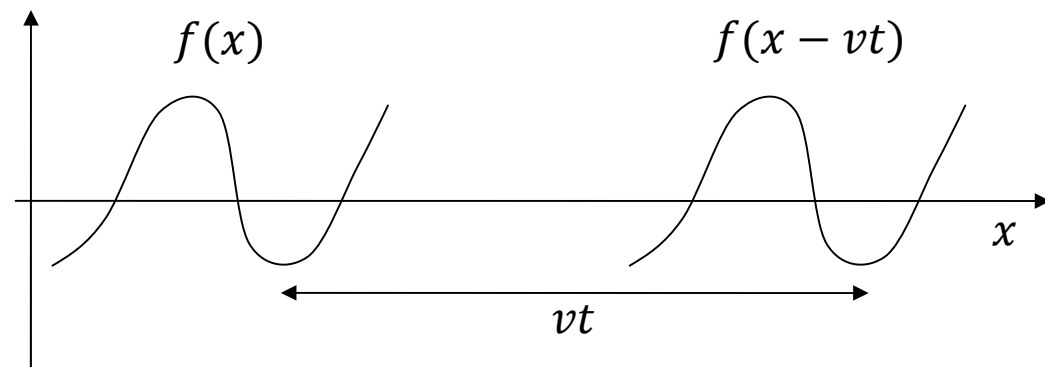
Siguin f , g i h funcions reals de variable real, diferenciables, i considerem el camp

$$\mathbf{E} = (f(kx - \omega t), g(kx - \omega t), h(kx - \omega t)). \quad [*]$$

on k i ω són nombres reals positius. El camp $\mathbf{E}$ es pot interpretar com una ona plana que es propaga en la direcció Ox , amb velocitat ω/k . Els seus fronts d'ones són plans perpendiculars a Ox (un front s'obté fent $kx - \omega t = a$, amb a constant, d'on

$$x = \frac{a}{k} + \frac{\omega t}{k},$$

equació que representa un pla perpendicular a Ox que es mou amb velocitat ω/k en la direcció Ox).



Proposició. El camp $[*]$ satisfà l'equació d'ones $\square E = 0$ si es compleix la relació $\omega/k = c$ (anomenada **relació de dispersió**).¹

Prova. Basta observar que $\square f(kx - \omega t) = (k^2 - \omega^2/c^2)f''(kx - \omega t)$, i anàlogament amb $g(kx - \omega t)$ i $h(kx - \omega t)$.

Remarca. $\text{div}(E) = kf'(kx - \omega t)$, i per tant E satisfà l'equació de Gauss en el buit si i només si f és constant. Com que un camp uniforme independent del temps sempre satisfà les equacions de Maxwell, podem procedir amb l'anàlisi del camp

$$E = (0, g(kx - \omega t), h(kx - \omega t)).$$

Suposarem, a més, que $\frac{\omega}{k} = c$.

Definim ara B de manera que

$$cB = (0, -h(kx - \omega t), g(kx - \omega t)) = \mathbf{e}_x \wedge E.$$

Notem que $\text{rot}(\mathbf{E}) = (\partial_x, 0, 0) \wedge \mathbf{E} = (0, -kh'(kx - \omega t), kg'(kx - \omega t))$ ha de ser $-\partial_t \mathbf{B}$, és a dir, $\mathbf{B} = \left(0, -\frac{k}{\omega} h(kx - \omega t), \frac{k}{\omega} g(kx - \omega t)\right)$.

El camp $\mathbf{B}$ és també una ona que es propaga a velocitat c en la direcció Ox , i els seus fronts d'ona són plans perpendiculars a Ox , però el vector $\mathbf{B}$ és perpendicular a $\mathbf{E}$, en tot punt i per a tot t .

Proposició. Els camps $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ satisfan les equacions de Maxwell.

Prova. Les equacions $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ i $\text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$ es satisfan pel que acabem de dir. L'equació $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ és directa a partir de la forma de $\mathbf{B}$. Finalment,

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = (\partial_x, 0, 0) \wedge \mathbf{B} = -\frac{k}{c} (0, g'(kx - \omega t), h'(kx - \omega t)),$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = -\frac{\omega}{c^2} (0, g'(kx - \omega t), kh'(kx - \omega t))$$

i $\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}$ es compleix ja que $\omega = kc$.

Ones electromagnètiques monocromàtiques.

Les *ones electromagnètiques monocromàtiques* són les construïdes amb el procediment anterior a partir de

$$\mathbf{E} = (0, E_1 \cos(kx - \omega t), E_2 \cos(kx - \omega t - \phi)).^2$$

Per $x = 0$, tenim el vector variable

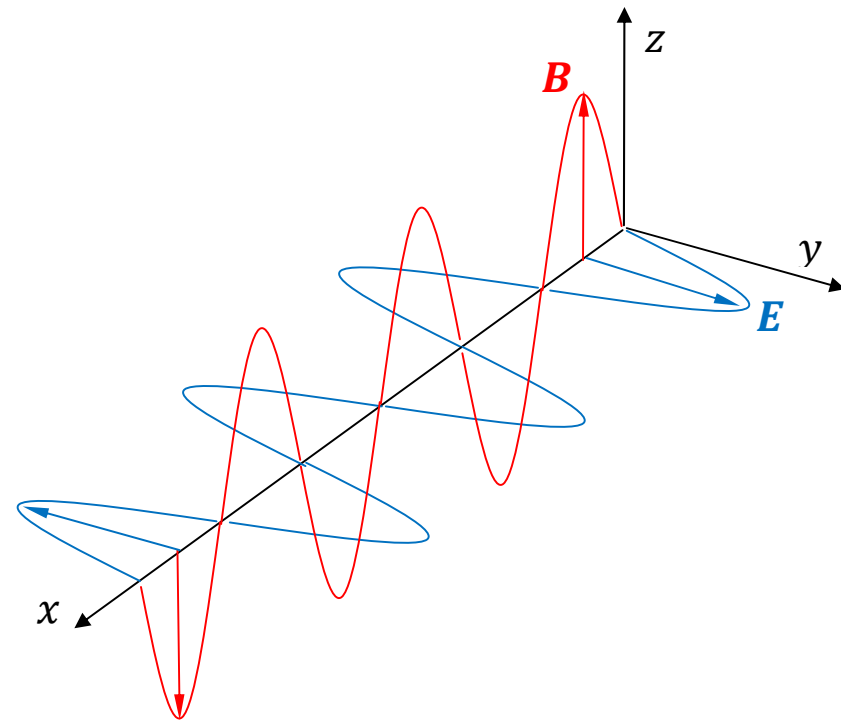
$$\mathbf{E}_0(t) = (0, E_1 \cos(\omega t), E_2 \cos(\omega t + \phi)),$$

que s'anomena *vector de polarització* de l'ona.

En el cas $\phi = 0$,

$$\mathbf{E}_0(t) = (0, E_1, E_2) \cos(\omega t),$$

de manera que sempre és paral·lel al vector $(0, E_1, E_2)$ i es diu que l'ona és *linealment polaritzada* (figura).

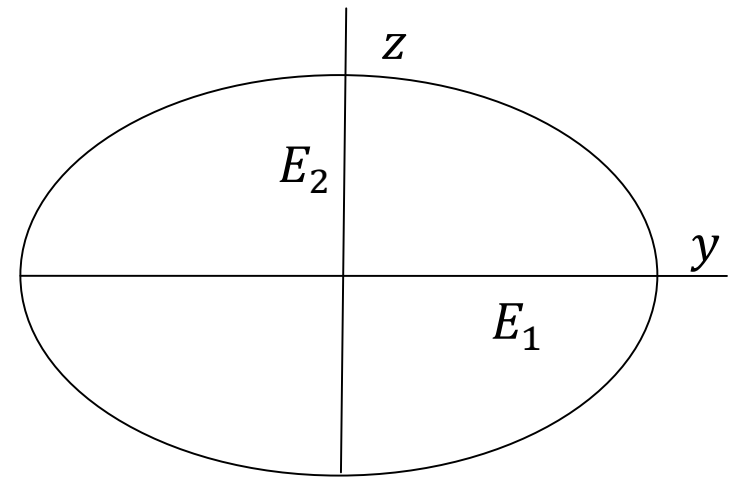


En el cas $\phi = \pm\pi/2$,

$$\mathbf{E}_0(t) = (0, E_1 \cos(\omega t), \pm E_2 \sin(\omega t))$$

i $\mathbf{E}_0$ descriu l'el·lipse d'equació

$$\frac{y^2}{E_1^2} + \frac{z^2}{E_2^2} = 1$$



de semieixos principals E_1 i E_2 (es diu que l'ona és *el·lípticament polaritzada* (*circularment polaritzada* si $E_1 = E_2$)).



Heinrich Rudolf Hertz
(1857-1894)

Remarca. El 1862 Maxwell va predir l'existència d'ones electromagnètiques: «*Difícilment podem evitar la conclusió que la llum consisteix en ondulacions transverses [és a dir, amb $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ perpendiculars a la direcció de propagació] del mateix medi que és la causa dels fenòmens elèctrics i magnètics*». Les ones electromagnètiques predites per la teoria de Maxwell van ser observades experimentalment per H. Hertz el 1888.

Polarització de les ones monocromàtiques

Proposició. Per $\phi \neq 0, \pi$, la polarització

$$\mathbf{E}_0(t) = (E_1 \cos(\omega t), E_2 \cos(\omega t + \phi))$$

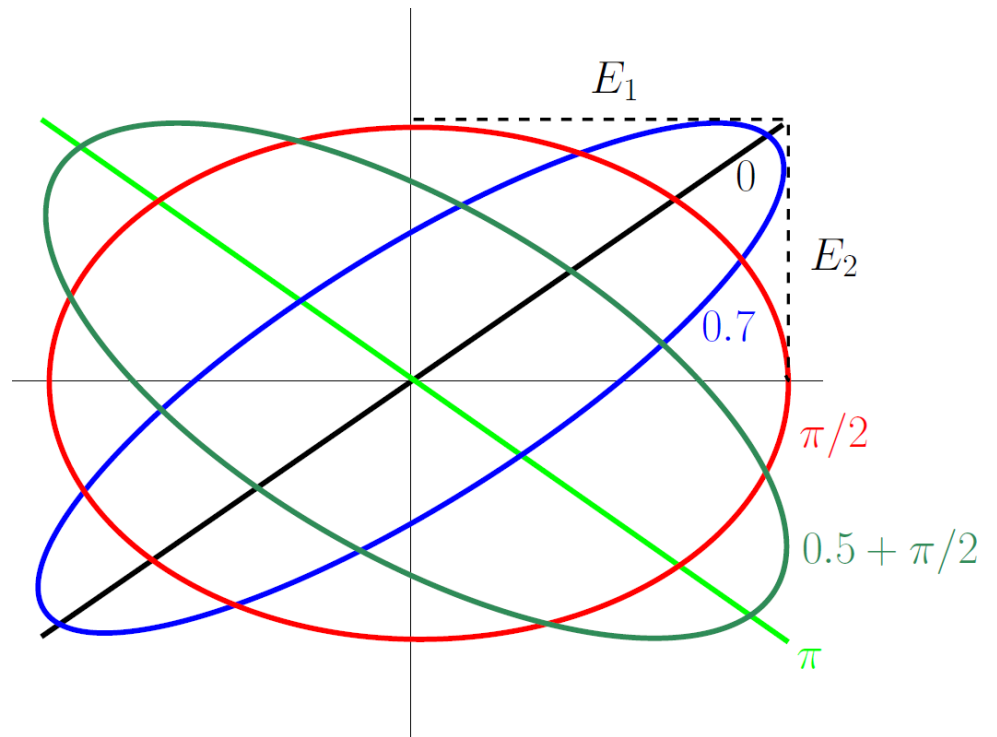
(situada en el pla yz) és el·líptica, recorreguda en sentit horari si $\phi \in (0, \pi)$ i en sentit antihorari si $\phi \in (\pi, 2\pi)$.

L'equació cartesiana de l'el·lipse és

$$ay^2 - 2byz + cz^2 = k,$$

amb $a = E_2^2$, $b = E_1 E_2 \cos(\phi)$, $c = E_1^2$, $k = E_1^2 E_2^2 \sin^2(\phi)$. Aquesta el·lipse està inscrita en el rectangle $y = \pm E_1$, $z = \pm E_2$.

A més, el punt de tangència amb $y = E_1$ és $\mathbf{E}_0(0) = (E_1, E_2 \cos(\phi))$ i el de tangència amb $z = E_2$ és $(E_1 \cos(\phi), E_2)$.



Prova. Usant la identitat trigonomètrica

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi),$$

podem escriure el vector de polarització

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(t) &= (E_1 \cos(\omega t), E_2 \cos(\omega t + \phi)) \\ &= (E_1 \cos(\omega t), E_2 \cos(\omega t)\cos(\phi) - E_2 \sin(\omega t)\sin(\phi)) \end{aligned}$$

de la manera següent:

$$\mathbf{E}_0(t) = \cos(\omega t)\mathbf{v}_1 + \sin(\omega t)\mathbf{v}_2,$$

on $\mathbf{v}_1 = (E_1, E_2 \cos(\phi))$ i $\mathbf{v}_2 = (0, E_2 \sin(\phi))$. Això mostra, si posem $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$ i $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$, que la corba que descriu el vector de polarització és la transformació de la corba $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$, que és la circumferència de radi 1 amb centre a l'origen, per l'afinitat tal que

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \mapsto \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Es tracta, doncs, d'una el·lipse. Com que

$$\det_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = -E_1 E_2 \sin(\phi),$$

l'orientació de la base $\mathbf{v}$ és negativa si $\phi \in (0, \pi)$ i positiva si $\phi \in (\pi, 2\pi)$, de manera que el recorregut és en sentit horari en el primer cas i en sentit antihorari en el segon.

L'equació de l'el·lipse es troba fent càlculs, que es deixen com a exercici, a partir de l'equació de la circumferència $\xi^2 + \eta^2 = 1$ i les equacions de l'afinitat,

$$(y, z) = (\xi, \eta) \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \cos(\phi) \\ 0 & -E_1 \sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Per altra banda, la velocitat del vector de polarització és

$$\dot{\mathbf{E}}_0(t) = (-E_1 \omega \sin(\omega t), -E_2 \omega \sin(\omega t + \phi)).$$

Així, doncs, la tangent és vertical quan ωt és un múltiple enter de π . Per $t = 0$, per exemple, el vector de polarització és $\mathbf{E}_0(0) = (E_1, E_2 \cos(\phi))$ i el vector tangent és $(0, -E_2 \omega \sin(\phi))$. Anàlogament, la tangent és horitzontal quan $\omega t + \phi$ és un múltiple enter de π . Per $t = -\phi/\omega$, per exemple, el vector de polarització és $(E_1 \cos(\phi), E_2)$ i el vector tangent en aquest punt és $(E_1 \sin(\phi), 0)$.

E.7.1. Amb les notacions de la proposició anterior, proveu que les direccions dels eixos principals de l'el·lipse de polarització són $(1, p)$ i $(1, q)$, amb

$$p, q = \frac{-(E_1^2 - E_2^2) \pm \sqrt{(E_1^2 - E_2^2)^2 + 4E_1^2 E_2^2 \cos^2(\phi)}}{2E_1 E_2 \cos(\phi)}.$$

Mostreu també que els dos vèrtexs de l'el·lipse corresponents a la direcció $(1, p)$ són (t, tp) , on

$$t = \frac{E_1 E_2 \cos(\phi)}{\sqrt{p^2 E_1^2 - 2p E_1 E_2 \cos(\phi) + E_2^2}}.$$

Els vèrtexs corresponents a l'eix de direcció $(1, q)$ es troben anàlogament.

E.7.2. Un electró està en el si d'una ona electromagnètica plana tal que

$$\mathbf{E} = (E_0 \cos(kz - \omega t), 0, 0).$$

Estudieu el moviment de l'electró suposant que per $t = 0$ està situat a l'origen en repòs i que l'efecte del camp magnètic de l'ona és negligible.

Notes

1. (Pàg. 6) En general, una relació de dispersió és una relació entre l'energia i el moment d'un sistema. Per exemple, per una partícula de massa m , $2mE = p^2$, on E és l'energia cinètica i p el moment. En el cas d'un fotó, l'energia és $E = hf = \hbar\omega$ (h la constant de Planck, $\hbar = h/2\pi$, f la freqüència i ω la freqüència angular) i el moment és proporcional a k (que es coneix com el *nombre d'ones*), de manera que $\omega = ck$ dóna efectivament una relació entre l'energia i el moment.
2. (pàg. 8) La importància de les ones monocromàtiques prové de l'anàlisi de Fourier, que ens diu com expressar una ona plana com a superposició (combinació lineal) d'ones monocromàtiques.