

MMF 10 / 2. *Electromagnetisme*

6. Equacions de Maxwell

S. Xambó

- Inducció electromagnètica.
- Llei de Faraday.
- Inducció en un circuit fix per un camp magnètic variable.
- Corrent de desplaçament i equació d'Ampère—Maxwell.
- Equacions de Maxwell.
- Exemples
 - *Corrent de desplaçament entre les plaques d'un condensador*
 - *Corrent de desplaçament en un corrent radial*
- Notes.

Inducció electromagnètica

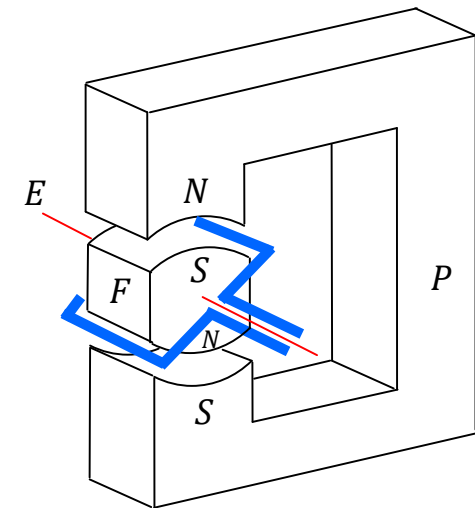
Michael Faraday (1791-1867) va descobrir experimentalment que quan un circuit de fil conductor es mou en el si d'un camp magnètic, apareix un



corrent induït en el circuit. Aquest és el fenomen de la *inducció electromagnètica*.

L'explicació qualitativa és, des del nostre punt de vista, que les càrregues elementals lliures del circuit, movent-se respecte del camp magnètic, experimenten una força de Lorentz, amb la qual cosa es mouen en el circuit —i aquest moviment és el corrent induït.

Remarca. En aquest fenomen es basen els generadors elèctrics com els esquematitzats a la figura: si fem girar l'espira, llavors s'hi indueix un corrent. Adonem-nos que la figura també esquematitza el



P Imant permanent
E Eix de gir de l'espira
F Ferro

funcionament d'un motor elèctric: si fem circular un corrent per l'espira, llavors el camp magnètic produeix un moment de forces en la direcció de l'eix de gir de l'espira.

Llei de Faraday

La relació quantitativa que expressa el corrent induït va ser obtinguda experimentalment per Faraday i estableix que la "força electromotriu" (o "magnetomotriu") en el circuit és igual, però de signe contrari, a la "variació instantània" del flux del camp magnètic a través de circuit.

Tot seguit deduirem aquesta llei a partir de la força de Lorentz i de la relació entre el producte vectorial de vectors i l'àrea.

Força electromotriu. Si $\mathbf{F}$ és el camp vectorial que representa la força per unitat de càrrega sobre les càrregues lliures d'un circuit γ , s'anomena *força electromotriu* (del camp $\mathbf{F}$ en el circuit γ) a la integral

$$\tau_\gamma(\mathbf{F}) = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} ,$$

és a dir, a la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de γ . En lloc de τ_γ de vegades s'escriu fem_γ .

Sigui γ un circuit de fil conductor (possiblement deformable) i S una superfície tal que $\partial S = \gamma$. Posarem γ_t i S_t per denotar el circuit i la superfície en l'instant t .

Si estem en presència d'un camp magnètic $\mathbf{B}$, el flux d'aquest camp a través del circuit és

$$\phi = \phi_{S_t}(\mathbf{B}) = \int_{S_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} .$$

Notem que la llei de Gauss per al camp magnètic, $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, ens diu que ϕ només depèn de γ i $\mathbf{B}$, i no de la superfície S usada.

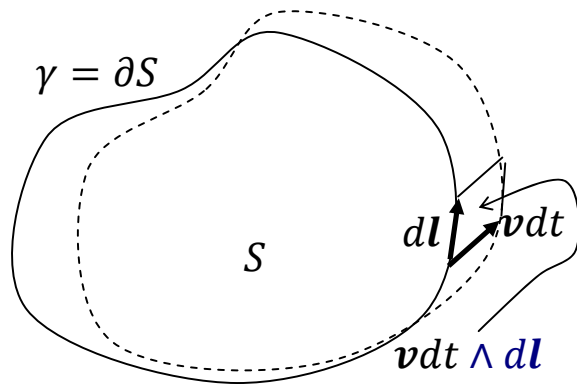
Teorema. Amb les notacions anteriors, si τ és la força electromotriu de la força de Lorentz $\mathbf{F}$ en el circuit variable γ_t , llavors $\tau = -\frac{d\phi}{dt}$.¹

Prova. Per definició tenim que $\tau = \tau_{\gamma_t}(\mathbf{F}) = \int_{\gamma_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, on $\mathbf{F}$ és la força de Lorentz per unitat de càrrega. Com que $\mathbf{F} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, on $\mathbf{v}$ és el camp de velocitats,

$$\tau = \int_{\gamma_t} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Ara per la fórmula del producte mixt tenim que

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (d\mathbf{l} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{v} \wedge d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B}.$$



Multiplicant per dt , de la segona expressió obtenim

$$-(\mathbf{v}dt \wedge d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = -\phi_{\mathbf{v}dt \wedge d\mathbf{l}}(\mathbf{B}),$$

on el vector $\mathbf{v}dt \wedge d\mathbf{l}$ és considerat també com l'element d'àrea definit pels vectors $\mathbf{v}dt$ i $d\mathbf{l}$.

Però $\phi_{\mathbf{v}dt \wedge d\mathbf{l}}(\mathbf{B})$ és la variació del flux en el temps dt produïda pel moviment de $d\mathbf{l}$. Integrant al llarg de γ_t ens dóna que

$$(d\phi) = \int_{\gamma_t} (\mathbf{v} dt \wedge d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} ,$$

d'on

$$-\frac{d\phi}{dt} = - \int_{\gamma_t} (\mathbf{v} \wedge d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = \int_{\gamma_t} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \tau .$$

Inducció en un circuit fix per un camp magnètic variable

Si deixem el circuit γ quiet i movem el camp magnètic $\mathbf{B}$ (per exemple movent l'imant que el produeix), llavors també hi ha un corrent induït en el circuit, produït per una fem idèntica a la del cas en què movem el circuit, sempre i quan el moviment relatiu sigui el mateix. Això és el que mostra l'experiència i el que fa esperar el **principi de relativitat** (PR), que estudiarem en el capítol següent.

Si movem $\mathbf{B}$, però, no hi ha força de Lorentz sobre les càrregues del circuit. Com que l'única cosa que mou càrregues elèctriques immòbils són els camps elèctrics, hem de postular que

Un camp magnètic variable $\mathbf{B}$ genera un camp elèctric $\mathbf{E}$ tal que la variació instantània del flux a través d'un circuit γ és igual a $-\tau_\gamma(\mathbf{E})$:

$$\int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \tau_\gamma(\mathbf{E}) = -\frac{d}{dt} \phi_S(\mathbf{B}),$$

on S és una superfície tal que $\partial S = \gamma$.

Ara aquesta equació ens permet deduir fàcilment una ***equació diferencial equivalent***. En efecte, pel teorema de Stokes podem escriure

$$\int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot}(\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$$

Per altra banda,

$$-\frac{d}{dt} \phi_S(\mathbf{B}) = -\int_S \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s},$$

d'on obtenim la ***lleï d'inducció de Faraday en forma diferencial***:

Teorema. Si $\mathbf{E}$ és el camp elèctric creat per un camp magnètic variable, llavors $\text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$.

Remarca. Aquesta equació, que en principi només és vàlida per al camp elèctric creat per les variacions de $\mathbf{B}$, també és vàlida per al camp elèctric total, ja que aquest és suma del camp elèctric creat per les variacions de $\mathbf{B}$ i el camp de Coulomb de les càrregues, el qual té rotacional nul.

Remarca. La llei de Gauss per al camp magnètic, $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, s'ha de considerar vàlida per a camps magnètics variables. A més de la no existència de monopols, que era la interpretació que donàvem de la llei $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ en el cas estàtic, adonem-nos que el flux de $\mathbf{B}$ a través de γ (és a dir, a través d'una superfície S tal que $\partial S = \gamma$) només està ben definit si és independent de la superfície S usada, és a dir, si i només si $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$. Finalment, adonem-nos també que la llei de Faraday i la llei de Gauss per al camp magnètic estan estretament relacionades: $\partial_t(\text{div}(\mathbf{B})) = \text{div}(\partial_t \mathbf{B}) = -\text{div}(\text{rot}(\mathbf{E})) = 0$, de manera que $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ si podem suposar que en cada punt $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ en algun instant.

Remarca. La unitat del flux magnètic és el **weber** (Wb). Per definició, la variació d'un weber per segon en el flux a través d'un circuit indueix una fem d'un volt ($V = \text{Wb/s}$, o bé $\text{Wb} = \text{Vs}$).

Notem també que $\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$, o bé $\text{T} = \text{Wb/m}^2$.

Corrent de desplaçament i equació d'Ampère–Maxwell

La llei d'Ampère, $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j}$, és vàlida per al camp magnètic $\mathbf{B}$ creat per un corrent estacionari. Com va observar Maxwell, ja no ho és quan aquesta condició no es satisfà: d'una banda $\text{div}(\text{rot}(\mathbf{B})) = 0$ per a tot camp vectorial $\mathbf{B}$, mentre que $\text{div}(\mu_0 \mathbf{j}) = \mu_0 \text{div}(\mathbf{j}) = -\mu_0 \partial_t \rho$ (hem usat la llei de continuïtat de la càrrega) i en general $\partial_t \rho \neq 0$ per a corrents no estacionaris.

Ara bé, $\partial_t \rho = \partial_t (\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E})) = \text{div}(\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$, de manera que

$$\text{div}(\mu_0 \mathbf{j}) = -\text{div}(\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}).$$

Per tant, $\text{div}(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = 0$

i això suggereix substituir el terme $\mu_0 \mathbf{j}$ de la llei d'Ampère per l'expressió $\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$, és a dir, en canviar $\mathbf{j}$ per $\mathbf{j} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$.

És el que va fer Maxwell.²

El terme $\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ té dimensions de densitat de corrent i s'anomena *corrent de desplaçament*. De l'equació

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$$

en direm equació d'Ampère–Maxwell (forma diferencial). La corresponent equació en forma integral és

$$\tau_{\partial S}(\mathbf{B}) = \mu_0 \phi_S(\mathbf{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \phi_S(\mathbf{E}),$$

on S és una superfície fixa qualsevol amb vora ∂S .

	<i>Equació</i>	<i>Nom</i>
(C)	$\partial_t \rho = -\text{div}(\mathbf{j})$	Llei de continuïtat
(G)	$\text{div}(\mathbf{E}) = \rho / \varepsilon_0$	Llei de Gauss
(AM)	$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$	Llei d'Ampère–Maxwell

Remarca. Considerem les equacions de la taula de la pàgina anterior.

(1) L'argument anterior mostra que (C)+(G) $\Rightarrow \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = 0$. Seguint Maxwell, això ens ha portat a “postular” (AM).

(2) (G)+(AM) $\Rightarrow$ (C) :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= \partial_t (\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E})) = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{B}) - \mu_0 \mathbf{j}) = -\operatorname{div}(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

(3) (C)+(AM) $\Rightarrow \partial_t (\operatorname{div}(\mathbf{E}) - \rho/\varepsilon_0) = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t (\operatorname{div}(\mathbf{E}) - \rho/\varepsilon_0) &= \operatorname{div}(\partial_t \mathbf{E}) - \partial_t \rho/\varepsilon_0 = \operatorname{div}(\mathbf{j}/\varepsilon_0 + \partial_t \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{B})) = 0. \end{aligned}$$

La relació $\partial_t (\operatorname{div}(\mathbf{E}) - \rho/\varepsilon_0) = 0$ ens diu que $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0 + C$, on C és una funció que no depèn de t . Podem deduir, doncs, la llei de Gauss (és a dir, $C = 0$) si podem suposar que per a cada punt de l'espai es compleix, $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0$ en algun instant t .

Una altra manera de mirar la llei de Gauss per als camps elèctrics generals que estem considerant és notar que el camp elèctric és la suma del camp de Coulomb de les càrregues (que satisfà la llei de Gauss) i un camp $\mathbf{E}$ induït per les variacions del camp magnètic i la divergència del qual satisfà $\partial_t(\text{div}(\mathbf{E})) = 0$: de la relació $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ entre aquest camp $\mathbf{E}$ i el camp magnètic variable $\mathbf{B}$ que l'origina, en deduïm que

$$\partial_t(\text{div}(\mathbf{E})) = \text{div}(\partial_t \mathbf{E}) = c^2 \text{div}(\text{rot}(\mathbf{B})) = 0$$

(recordem que $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$).

Podem deduir, doncs, que $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ si podem suposar que per a cada punt de l'espai es compleix $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ en algun instant t .

Exemples. (1) El corrent de desplaçament entre les plaques d'un condensador (pàg. 16); (2) el corrent de desplaçament en un corrent radial (pàg. 18).

Equacions de Maxwell³

Forma diferencial	Forma integral	
$\text{div}(\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0$	$\phi_{\partial W}(\mathbf{E}) = Q(W)/\varepsilon_0$	CG
$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$	$\tau_{\partial S}(\mathbf{E}) = -\frac{d}{dt}\phi_S(\mathbf{B})$	F
$\text{div}(\mathbf{B}) = 0$	$\phi_S(\mathbf{B}) = 0$	G
$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0(\mathbf{j} + \varepsilon_0\partial_t \mathbf{E})$	$\tau_{\partial S}(\mathbf{B}) = \mu_0\phi_S(\mathbf{j}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\phi_S(\mathbf{E})$	AM

CG, llei de Coulomb-Gauss. F, llei de Faraday.

G, llei de Gauss per al camp magnètic. AM, llei d'Ampère Maxwell.

Remarca (Equacions de Maxwell en diferents sistemes d'unitats). Siguin κ , κ' i $\bar{\kappa}$ les constants, dependents del sistema d'unitats emprat, tals que $F_{q,q'} = \kappa qq'/d^2$ és la força de Coulomb entre dues càrregues puntuals q i q' situades a distància d ; $F_{I,I'} = \kappa' II'/d$ és la força per unitat de longitud entre dos corrents rectilinis filiformes paral·lels infinits d'intensitats I i I' i separats per una distància d ; i $\text{rot}(\mathbf{E}) = -\bar{\kappa}\partial_t \mathbf{B}$. Llavors resulta que la llei de Lorentz i les equacions de Maxwell prenen la forma

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \bar{\kappa} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

$$\text{div}(\mathbf{E}) = 4\pi\kappa\rho, \quad \text{div}(\mathbf{B}) = 0,$$

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\bar{\kappa}\partial_t\mathbf{B}, \quad \text{rot}(\mathbf{B}) = 4\pi\frac{\kappa'}{\bar{\kappa}}\mathbf{j} + \frac{\kappa'}{\kappa\bar{\kappa}}\partial_t\mathbf{E}$$

Com que a més resulta que $\kappa = \kappa' c^2$, l'última fórmula es pot escriure

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{4\pi\kappa}{c^2\bar{\kappa}}\mathbf{j} + \frac{1}{\kappa\bar{\kappa}}\partial_t\mathbf{E}.$$

<i>Sistema</i>	κ	$\bar{\kappa}$
CGS-esu	1	1
CGS-emu	c^2	1
Gauss	1	c^{-1}
SI	$1/4\pi\epsilon_0$	1
Heaviside-Lorentz	$1/4\pi$	c^{-1}

Vista la taula dels valors de κ i $\bar{\kappa}$ dels sistemes més importants, és immediat escriure la forma concreta de les equacions de Maxwell en un qual-

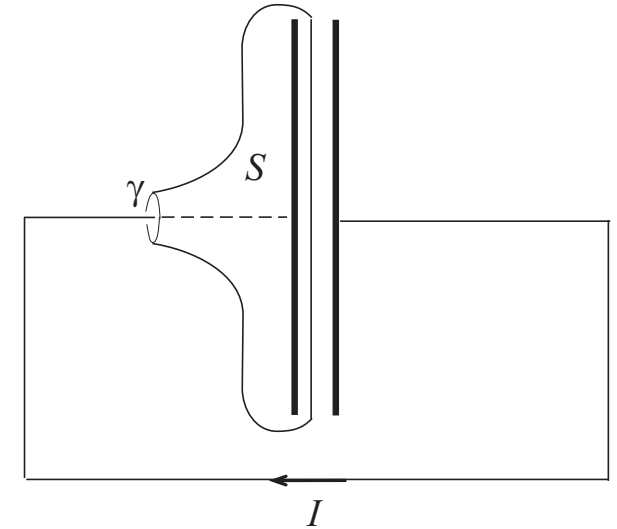
sevol d'ells. Per exemple, en el sistema de Gauss adopten la forma

$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$	
$\text{div}(\mathbf{E}) = 4\pi\rho$	$\text{div}(\mathbf{B}) = 0$
$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{B}$	$\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E}$

Les equacions en el sistema de Heaviside–Lorentz s'obtenen a partir de les d'aquesta taula fent la substitució $4\pi \rightarrow 1$ i són les que mostren d'una manera més clara la dualitat entre el camp elèctric i el camp magnètic, fet que encara seria més manifest si tinguéssim en compte una possible densitat de càrregues magnètiques i el corresponent corrent.

Exemples

Corrent de desplaçament entre les plaques d'un condensador. Considerem un condensador pla com el representat a la figura. Veurem que el corrent de desplaçament entre les seves plaques coincideix amb el corrent I en el fil que les uneix.



Sigui S una superfície que rodeja la placa positiva, amb un petit forat circular Σ pel centre del qual passa perpendicularment el fil que hi arriba. Anem a comprovar la llei d'Ampère–Maxwell primer amb la superfície Σ i després amb S .

Si el cercle Σ té radi r , la circulació del camp magnètic produït pel corrent és $2\pi rB = \mu_0 I$, ja que $B = \mu_0 I / 2\pi r$ a una distància r del fil. Pel que fa als dos termes de la dreta de l'equació, el flux de $\mu_0 \mathbf{j}$ és $\mu_0 I$ i el de

$\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ és zero, ja que $\mathbf{E}$ és nul sobre Σ . Per tant, la llei es compleix relativament a Σ .

En el cas de S , la circulació de $\mathbf{B}$ al llarg de $\gamma = \partial S$ és $\mu_0 I$, però en canvi el flux de $\mu_0 \mathbf{j}$ és nul perquè no hi ha corrent de càrregues que travessi S . Pel que fa al flux del corrent de desplaçament, només hem de tenir en compte la part S' de S que està entre les dues plaques i que per simplificar podem suposar que és una superfície plana paral·lela a les plaques. D'aquesta manera el camp elèctric sobre S' té la forma $\mathbf{E} = (\sigma/\varepsilon_0)\mathbf{n}$, on $\mathbf{n}$ és el vector normal unitari perpendicular a les plaques del condensador i dirigit de la positiva vers la negativa. El flux de $\partial_t \mathbf{E}$ és

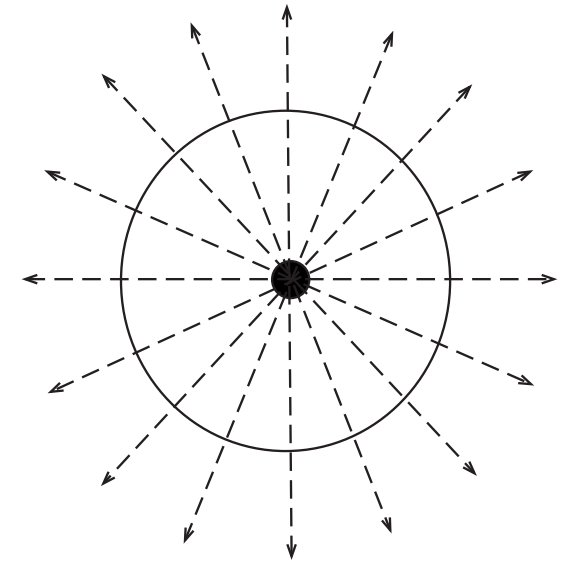
$$A \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\varepsilon_0} \right) = I / \varepsilon_0 ,$$

on A és l'àrea d'una placa, σ la densitat superficial de càrrega de la placa positiva i $q = A\sigma$ la seva càrrega total. En resulta que el flux de $\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ és $\mu_0 I$, la qual cosa mostra que la llei també es compleix relativament a S .

Aquest exemple és un dels que va analitzar Maxwell en les seves recerques per generalitzar la llei d'Ampère.

Corrent de desplaçament en un corrent radial.

Suposem que tenim un corrent amb simetria radial com el representat a la figura, com per exemple el que produiria una petita esfera de material radioactiu de la qual surten partícules α en totes direccions. Aleshores la llei d'Ampère-Maxwell aplicada a una esfera amb centre el del corrent, dóna la relació $\dot{Q} + J = 0$ (Q la càrrega total dins l'esfera, J la càrrega que surt de l'esfera per segon), que coincideix amb el que ens dóna la llei de continuïtat de la càrrega.

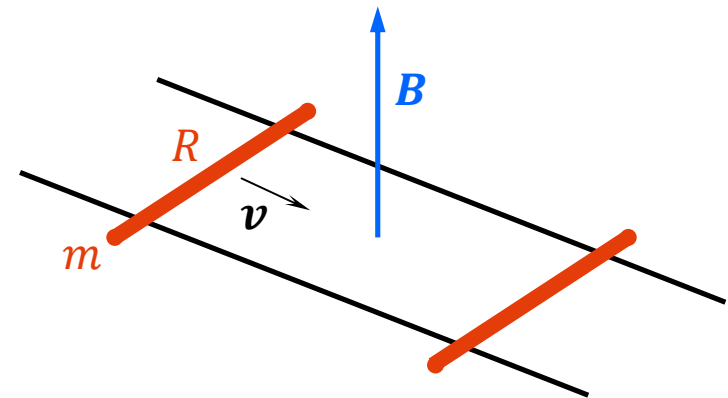


En efecte, per raons de simetria, el camp magnètic i el camp elèctric també tindran simetria radial. Com que $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, tindrem $\mathbf{B} = 0$ (és sufi-

cient aplicar el teorema de la divergència a una esfera S de radi arbitrari r amb centre en el centre de simetria O). Si posem $Q = Q(r, t)$ per denotar la càrrega en l'instant t dins S i $E = E(r, t)$ per denotar la intensitat del camp elèctric en l'instant t a una distància r del centre de simetria, llavors tindrem (Llei de Gauss) $E \cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0$. El terme del corrent de desplaçament en la Llei d'Ampère–Maxwell relativament a S és igual a $\mu_0 \epsilon_0 \dot{E} \cdot 4\pi r^2 = \mu_0 \dot{Q}$. El terme del corrent de càrregues relativament a la mateixa superfície és $\mu_0 J$, on J és el corrent que travessa S . Així, doncs, la forma integral de la Llei d'Ampère–Maxwell ens dóna que $\dot{Q} + J = 0$, que, com hem dit, coincideix amb el que dóna la Llei de continuïtat.

Exercicis E.6

E.6.1. Sobre dos rails rectilinis, paral·lels, horitzontals, i sense resistència situem dues barres perpendiculars als rails amb resistència R i massa m . Si el sistema està sotmès a un camp mag-

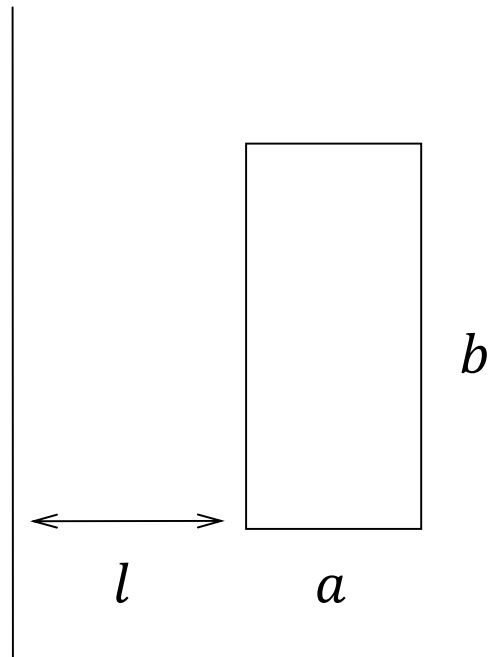


nètic vertical uniforme i una barra es mou envers l'altre en direcció paral·lela als rails amb velocitat constant, estudieu el moviment de la segona barra. Podeu negligir la fricció de les barres amb els rails i l'efecte sobre la segona barra del camp magnètic generat pel corrent en la primera barra.

E.6.2. Considerem un fil rectilini infinit i a distància l del fil una espira rectangular de resistència R i dimensions a, b , tal i com mostra la figura. Supposeu que l'autoinducció de l'espira és negligible.

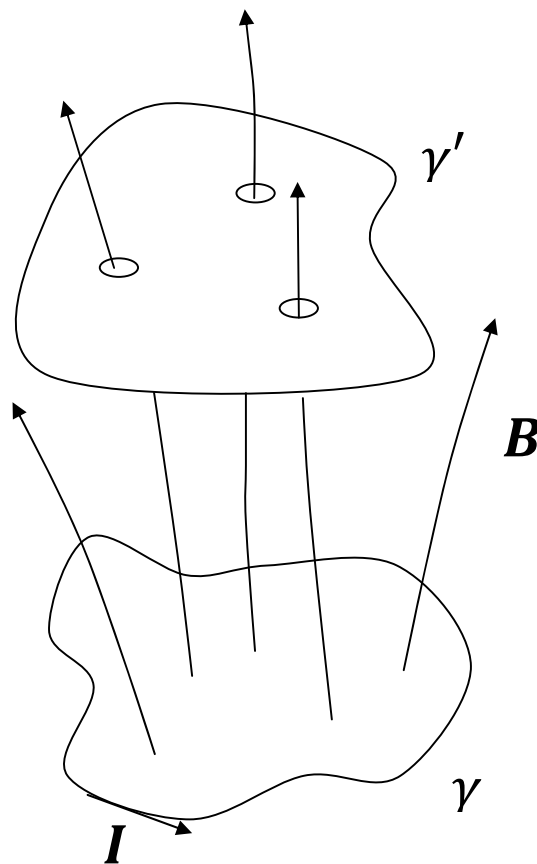
1) Suposant que un corrent d'intensitat I variable recorre el fil, calculeu el valor del corrent I' induït a l'espira, i indiqueu-ne el sentit segons el sentit de I .

2) Supposem que afegim un altre fil rectilini infinit paral·lel al primer, i també en el pla de l'espira, a distància d del primer, com tra la figura. Si per aquest fil passa el mateix corrent I però de sentit contrari, calculeu el nou valor del corrent induït.

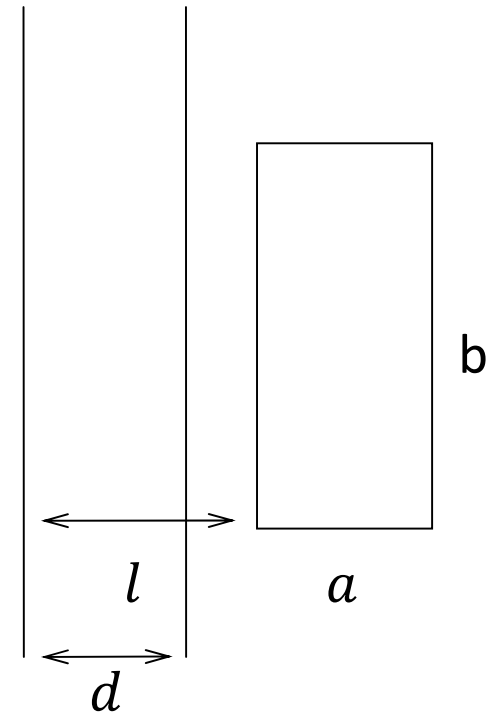


3) Quant valdrà I' si el segon fil infinit és perpendicular al pla de l'espira?

4) Discussiu qualitativament què passarà si l'auto-inducció de l'espira no és negligible.



E.6.3. Considerem dos circuits filiformes γ i γ' i suposem que γ porta un corrent I . Sigui ϕ' el flux a través de γ' del camp magnètic produït per aquest corrent. La llei de Biot–Savart aplicada al corrent I implica que existeix una constant M , que només depèn dels dos circuits, tal que $\phi' = MI$. (La constant M s'anomena). Useu l'expressió del potencial de $\mathbf{B}$ per deduir l'anomenada fórmula de Neumann per a M :



$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{dl(x) \cdot dl'(x')}{|x - x'|}.$$

Aquesta fórmula prova que el valor de M , que s'anomena *inductància mútua* dels dos circuits, és de natura geomètrica i que no canvia si intercanviem els pa-pers de γ i γ' . La inductància mútua d'un circuit amb si mateix s'anomena *auto-inductància*.

E.6.4. Una espira plana vertical d'àrea S , resistència R i autoinductància L gira entorn d'un eix vertical amb velocitat angular constant ω . Si l'espira està immer-sa en un camp magnètic uniforme, perpendicular a l'eix de rotació de l'espira, determineu la intensitat del corrent induït.

E.6.5. Proveu que la fórmula de Biot—Savart aplicada al corrent de desplaça-ment dóna un camp magnètic nul.

Notes

1. (Pàg. 4) El signe – de la llei de Faraday es pot interpretar de la manera següent: el sentit del corrent induït en el circuit és tal que el flux del camp magnètic que crea s'oposa al flux del camp magnètic $\mathbf{B}$. Aquest fet es coneix també com a *lleï de Lenz*.

2. (Pàg. 10) “One of the chief peculiarities of this treatise is the doctrine which asserts, that the true electric current $\mathfrak{C}$, that on which the electromagnetic phenomena depend, is not the same thing as $\mathfrak{K}$, the current of conduction, but that the time variation of $\mathfrak{D}$, the electric displacement, must be taken into account in estimating the total movement of electricity, so that we must write $\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}$ (Equation of True Currents).”

$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{D}$	$\dot{\mathfrak{D}}$	$\mathfrak{C}$
$\mathbf{j}$	$\epsilon_0 \mathbf{E}$	$\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$	$\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$

J.C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol II, pàg. 253.

3. (Pàg. 14) Les contribucions més importants de Maxwell van ser (a) l'expressió de les lleis en forma diferencial, (b) la introducció del corrent de desplaçament, (c) la predicció que el camp electromagnètic es pot propagar en ones que viatgen a la velocitat de la llum i (d) l'afirmació que les ones lluminoses són electromagnètiques.



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

Pel que fa a (b), cal dir el corrent de desplaçament només pot ser no negligible en dielèctrics en què el corrent de conducció és nul o quan les variacions del camp elèctric són molt ràpides (tenen una molt alta freqüència). La primera evidència indirecta de l'existència d'aquest corrent fou l'existència d'ones electromagnètiques en el buit (Herz, 1888).

Els punts (c) i (d) seran tractats en lliçons posteriors.