

MMF 10 / 2. *Electromagnetisme*

5. Potencial magnètic

S. Xambó

- Definició del potencial magnètic.
- Llei d'Ampère.
- Aproximació del potencial magnètic lluny dels corrents.
- Exemples
 - *Potencial magnètic d'un corrent filiforme rectilini infinit.*
 - *Potencial magnètic d'un corrent filiforme circular.*
 - *Potencial magnètic d'un solenoide infinit.*

Definició de potencial magnètic

Teorema ($\mathbf{B}$ és un rotacional). Si definim el camp $\mathbf{A}$ per la fórmula

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega(\mathbf{x})$$

llavors $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$

Prova. Usant les fórmules

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^3} = -\partial_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \quad \text{i} \quad \text{rot}(\phi \mathbf{w}) = \partial \phi \wedge \mathbf{w} + \phi \text{rot}(\mathbf{w})$$

podem escriure les següents igualtats relatives al camp magnètic produït per un corrent:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r}-\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^3} d\omega(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \partial_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \right) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right) d\omega(\mathbf{x}) = \\
&= \operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega(\mathbf{x}) \right).
\end{aligned}$$

Remarca. En el cas d'un corrent filiforme d'intensitat I , en un circuit γ , tenim la mateixa expressió de $\mathbf{B}$, però amb $\mathbf{A}$ definit per la fórmula

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}.$$

En el cas d'una densitat de corrent superficial, de manera que $\mathbf{j}$ és un camp vectorial sobre una superfície S , $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} dS(\mathbf{x})$.

El camp $\mathbf{A}$ s'anomena *potencial magnètic*. Adonem-nos que la fórmula $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega(\mathbf{x})$ és anàloga a la fórmula $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega$ per al potencial del camp elèctric en termes de la densitat de càrregues.

Exemples. Potencial magnètic d'un corrent filiforme rectilini infinit (pàg. 12); potencial magnètic d'un corrent filiforme circular (pàg. 14); potencial magnètic d'un solenoide infinit (pàg. 17).

Atès que la divergència d'un rotacional és nul·la, la fórmula $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ ens dóna:

Corol·lari. $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$

Remarca. Aquesta fórmula és anàloga a la llei de Gauss per al camp elèctric, $\text{div}(\mathbf{E}) = \rho/\epsilon_0$, però amb el segon membre 0. En direm *lleï de Gauss del camp magnètic*. La interpretació d'aquesta llei és que la densitat de “càrrega magnètica” neta és sempre zero, és a dir, que no existeixen “pols magnètics” isolats (també dits “monopols magnètics”).

Exemple. No existeixen camps magnètics radials no nuls (pàg. 21).

Junt amb el teorema d'Stokes la fórmula $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ també ens dóna:

Corol·lari. Per a tota superfície orientada S amb vora ∂S ,

$$\tau_{\partial S}(\mathbf{A}) = \phi_S(\mathbf{B})$$

Proposició. $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$

Prova. Per definició de $\mathbf{A}$ tenim la relació

$$-\frac{1}{\mu_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega$$

i sabem que la laplaciana d'aquesta expressió és $\mathbf{j}(\mathbf{x})$.

Proposició. $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$

Prova. Usant la definició de $\mathbf{A}$ tenim que

$$\text{div}_r(\mathbf{A}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{div}_r \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \right) d\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \partial_r \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \right) d\omega$$

ja que $\text{div}_r(\mathbf{j}(\mathbf{x})) = 0$.

Com que es compleix $\partial_r(1/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|) = -\partial_x(1/|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)$, també tenim

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \partial_x \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \right) d\omega.$$

Però aquesta expressió és nul·la (fórmula auxiliar 1 del tema anterior), i això acaba la prova.

Teorema (Llei d'Ampère). $\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j}$.

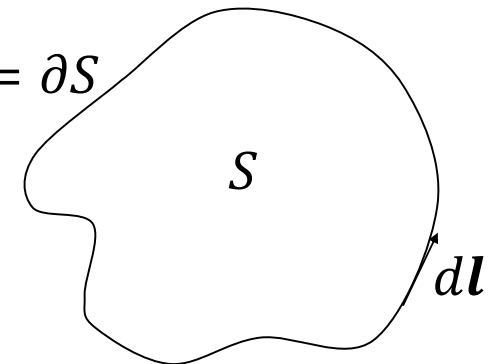
Prova. $\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{A})) = \partial(\operatorname{div}(\mathbf{A})) - \Delta \mathbf{A}$, i la relació de l'enunciat en resulta pel fet que $\operatorname{div}(\mathbf{A}) = 0$ i que $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$.

Corol·lari (forma integral de la llei d'Ampère)

Si S és una superfície regular amb vora tancada γ , $\gamma = \partial S$

$$\tau_\gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 \phi_S(\mathbf{j}),$$

on $\tau_\gamma(\mathbf{B})$ és la circulació de $\mathbf{B}$ al llarg de γ i $\phi_S(\mathbf{j})$ el flux de $\mathbf{j}$ a través de S .



Prova. És una conseqüència de la llei d'Ampère i el teorema d'Stokes.

Exemples de potencial magnètic. (1) d'un fil rectilini infinit (pàg. 12); (2) d'un corrent filiforme circular (pàg. 14); (3) d'un solenoide rectilini infinit (pàg. 17); (4) d'un solenoide toroïdal (pàg. 21).

Remarca. Un corrent $\mathbf{j}$ determina $\mathbf{B}$ (fórmula de Biot–Savart) i $\mathbf{A}$ (per definició del potencial magnètic). Les relacions $\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$ i $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ ens diuen que $\mathbf{A}$ determina $\mathbf{j}$ i $\mathbf{B}$. Finalment, la llei d'Ampère ens diu que $\mathbf{B}$ determina $\mathbf{j}$. Per completar aquestes interdependències ens caldria veure com determinar $\mathbf{A}$ a partir de $\mathbf{B}$. La comparació de les relacions $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$, $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ amb les relacions $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0\mathbf{j}$ suggereix que basta substituir $\mu_0\mathbf{j}$ per $\mathbf{B}$ en l'expressió de $\mathbf{B}$ a partir de $\mathbf{j}$ per obtenir una expressió de $\mathbf{A}$ a partir de $\mathbf{B}$. Alternativament, podem substituir $\mu_0\mathbf{j}$ per $\text{rot}(\mathbf{B})$ en l'expressió a $\mathbf{A}$ a partir de $\mathbf{j}$ i establir la relació amb identitats de càlcul vectorial a l'estil de les usades en la demostració que $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$. Una comprensió més cabal d'aquestes qüestions l'aporta el teorema de Helmholtz.¹

	$\mathbf{j}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{j}$	—	$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{ \mathbf{r} - \mathbf{x} ^3} d\omega(\mathbf{x})$ *	$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x})}{ \mathbf{r} - \mathbf{x} } d\omega(\mathbf{x})$
$\mathbf{B}$	$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\mathbf{B})$	—	$\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{ \mathbf{r} - \mathbf{x} ^3} d\omega(\mathbf{x})$ **
$\mathbf{A}$	$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \mathbf{A}$	$\text{rot}(\mathbf{A})$	—

* $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j}$ ** $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$, $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$

Remarca. Les fórmules de la taula anterior són vàlides per a corrents continguts en regions afitades, i fins i tot per a corrents (o camps) nuls a l'infinit. Altrament poden donar resultats absurds. Per exemple, si $\mathbf{B}$ és un camp magnètic uniforme, llavors $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r}$ és un potencial per a $\mathbf{B}$, ja que $\text{rot}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) = 2\mathbf{B}$ i $\text{div}(\mathbf{A}) = 0$, però en canvi $\text{rot}(\mathbf{B}) = 0$. Llavors la llei d'Ampère ens diu que $\mathbf{j} = 0$ i és clar que això és incompatible amb les fórmules de la primera fila de la taula.

Aproximació del potencial magnètic lluny dels corrents

Suposem que $\mathbf{j}$ està localitzat en una regió W i que $\mathbf{r}$ és lluny d'aquesta regió. Canviant d'origen si cal, podem suposar que $r \gg x$ per a tot $\mathbf{x} \in W$. Aleshores

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) + \dots,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x}) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x}) + \dots$$

En aquest desenvolupament el primer terme és nul, atès que $\int \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega$ és 0 (fórmula auxiliar 2 del tema anterior). Pel que fa al segon terme, tenim, per la fórmula auxiliar 4,

$$\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x})) \wedge \mathbf{r} d\omega = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}),$$

on $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x})) d\omega$ és el *moment magnètic dipolar*, o el *dipol magnètic*, del corrent $\mathbf{j}$ (recordem que en el cas d'un corrent filiforme

d'intensitat I en un circuit γ , la fórmula apropiada per al corresponent moment magnètic és $\mathbf{m} = \frac{I}{2} \int \mathbf{x} \wedge d\mathbf{l}$). Per tant, si posem

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}) \text{ i } \mathbf{B}_m = \text{rot}(\mathbf{A}_m), \text{ aleshores}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_m + \dots, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_m + \dots$$

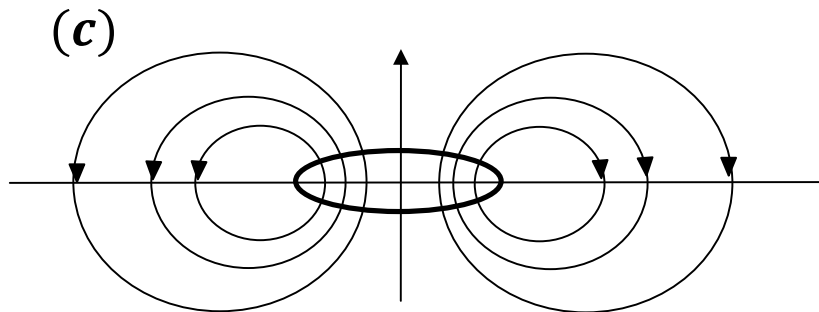
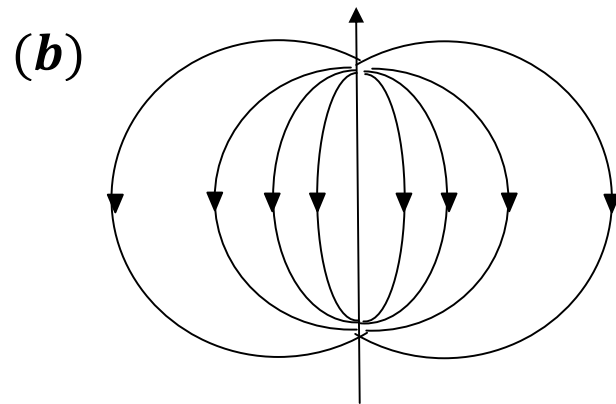
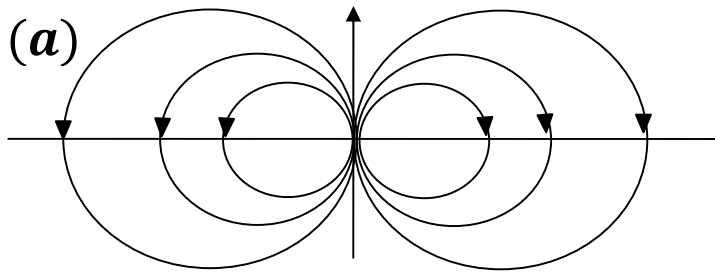
en punts allunyats de la regió dels corrents (els punts indiquen termes $O(r^{-3})$).²

Remarca. El fet que el terme “monopolar” del desenvolupament del camp magnètic sigui nul (perquè $\int \mathbf{j} d\omega = 0$), confirma, per analogia amb el cas del desenvolupament del potencial elèctric, que la “càrrega magnètica” total corresponent a qualsevol corrent estacionari és nul·la.

Remarca. $\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{m} \right).$

Remarca. Si posem, donat un vector $\mathbf{p}$,

$$\mathbf{D}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{p} \right),$$



(a) Camp d'un dipol pur

(b) Detall d'un dipol elèctric

(c) Detall d'un dipol magnètic

llavors tenim la següent analogia entre els dipols elèctric i magnètic: el camp elèctric $\mathbf{E}_p$ d'un dipol elèctric $\mathbf{p}$ ve donat per la fórmula

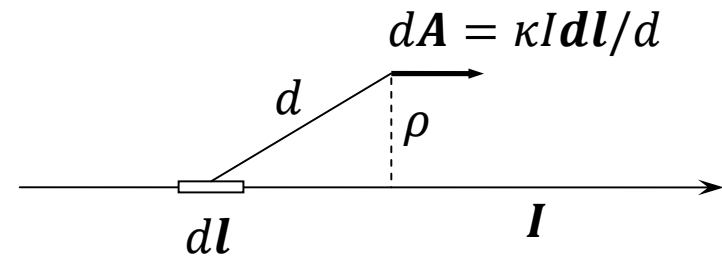
$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{D}_p(\mathbf{r})$$

i el camp magnètic del dipol magnètic $\mathbf{m}$ per la fórmula

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{D}_m(\mathbf{r}) .$$

Exemples

Potencial magnètic d'un corrent filiforme rectilini infinit. Si orientem el corrent en la direcció de l'eix Ox , en l'aplicació de la fórmula $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}(x)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}$ tenim $d\mathbf{l} = dx \mathbf{e}_x$, on $\mathbf{e}_x$ és el vector unitari en la direcció del corrent. Donada la simetria cilíndrica de la situació, resulta que $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\rho)\mathbf{e}_x$, on ρ és la distància del punt $\mathbf{r}$ al fil. Per calcular $A(\rho)$, podem suposar que la projecció de $\mathbf{r}$ sobre el fil és l'origen, amb la qual cosa $|\mathbf{r} - \mathbf{x}| = \sqrt{\rho^2 + x^2}$ i $A(\rho) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\rho^2 + x^2}}$. Com que aquesta integral és divergent, farem la integració entre $-\ell$ i ℓ . En aquesta situació, $A(\rho)$ esdevé $A(\rho, \ell)$ i la integral en qüestió és



$$A(\rho, \ell) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{d\xi}{\sqrt{\rho^2 + (x-\xi)^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{x-\ell + \sqrt{\rho^2 + (x-\ell)^2}}{x+\ell + \sqrt{\rho^2 + (x+\ell)^2}}.$$

Per $\ell \rightarrow \infty$ aquesta integral esdevé $\ln(0)$, cosa que concorda amb el fet que és divergent. Tanmateix, la podem usar per trobar el camp magnètic creat pel corrent. Com que en coordenades cilíndriques tenim $A_\rho = A_\phi = 0$ i $A_x = A(\rho, x)$, i el rotacional en cilíndriques de $\mathbf{A}$ és

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_x}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial x}\right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{x},$$

resulta que

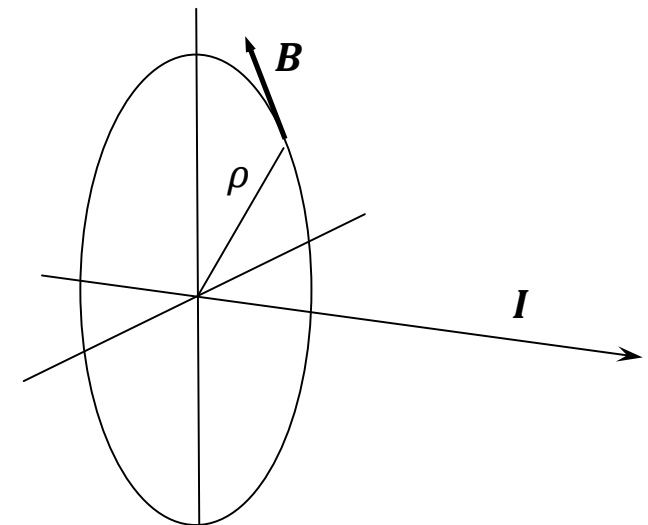
$$\mathbf{B}(\rho, x) = -\frac{\partial A_x}{\partial \rho} \hat{\phi} = -\frac{\partial A(\rho, x)}{\partial \rho} \hat{\phi}.$$

En particular obtenim

$$\mathbf{B}(\rho, 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{\ell}{\sqrt{\rho^2 + \ell^2}} \hat{\phi}.$$

Fent $\ell \rightarrow \infty$, retrobem la llei de Biot—Savart:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}.$$



Potencial magnètic d'un corrent filiforme circular. La simetria cilíndrica de les dades impliquen la simetria cilíndrica del potencial magnètic. És suficient, doncs, trobar el potencial magnètic en un punt $\mathbf{r}$ del pla $\phi = 0$. A més, podem suposar que el corrent està en el pla yz i que el seu centre és l'origen. Amb les notacions de la figura, la contribució al potencial magnètic en el punt $\mathbf{r}$ de $I d\mathbf{l}$

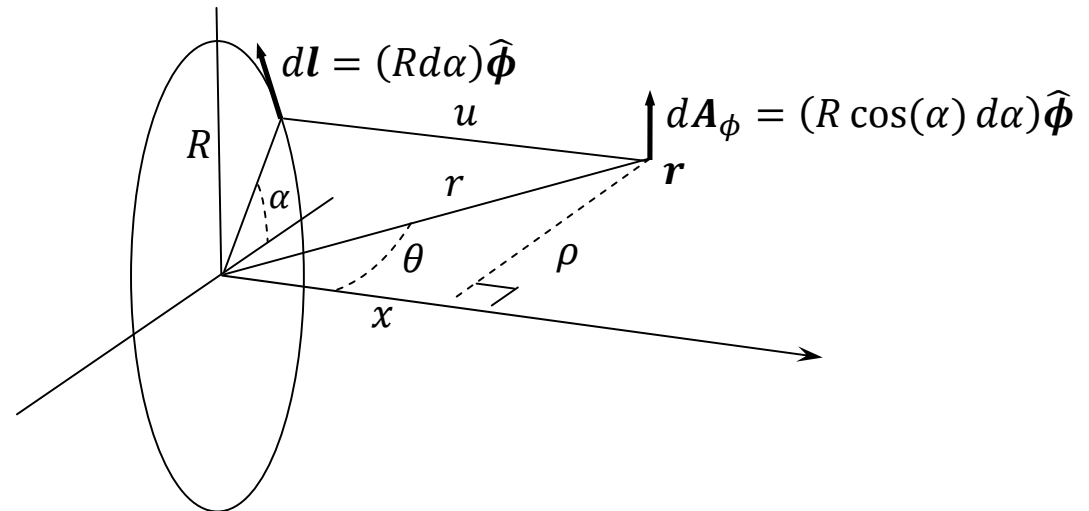
és $d\mathbf{A} = \kappa I \frac{d\mathbf{l}}{u}$. En resulta que

$\mathbf{A}$ és perpendicular a l'eix Ox .

A més a més, la component radial de $\mathbf{A}$ és nul·la, ja que les components horitzontals de $d\mathbf{l}(\alpha)$ i $d\mathbf{l}(-\alpha)$ en el punt $\mathbf{r}$

tenen signes contraris. De fet, la component horitzontal de $d\mathbf{l}(\alpha)$ és igual a $\sin(\alpha) d\mathbf{l}$ i és clar que $u(\alpha) = u(-\alpha)$. En resulta finalment que

$\mathbf{A} = A(\rho) \hat{\phi}$, amb $A(\rho) = \kappa R I \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha)}{u(\alpha)} d\alpha = 2\kappa R I \int_0^{\pi} \frac{\cos(\alpha)}{u(\alpha)} d\alpha$. Com



que el vector de posició de $d\mathbf{l}$ és $(0, R \cos(\alpha), R \sin(\alpha))$ i $\mathbf{r} = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)$, resulta que

$$u^2 = r^2 \cos^2(\theta) + (R \cos(\alpha) - r \sin(\theta))^2 + R^2 \sin^2(\alpha),$$

d'on

$$A(\rho) = 2\kappa R I \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha)}} d\alpha.$$

Vegem com es pot expressar aquesta integral. Com que $r^2 = x^2 + \rho^2$, i $r \sin \theta = x$, tenim que

$$R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha) = x^2 + (R + \rho)^2 - 2R\rho(1 + \cos \alpha).$$

Per altra banda, posant $\alpha = \pi - 2\xi$, $\cos \alpha = -\cos 2\xi = 2 \sin^2 \xi - 1$, és a dir, $1 + \cos \alpha = 2 \sin^2 \xi$. Per tant,

$$R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha) = \frac{4R\rho}{k^2} (1 - k^2 \sin^2 \xi), \quad k^2 = \frac{4R\rho}{x^2 + (R + \rho)^2}.$$

Substituint a l'expressió de $A(\rho)$ ens queda

$$A(\rho) = 2\kappa R I \int_{\pi/2}^0 \frac{2(1 - 2 \sin^2 \xi)}{\frac{2\sqrt{R\rho}}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} d\xi = 2\kappa I k \sqrt{\frac{R}{\rho}} \int_{\pi/2}^0 \frac{(1 - 2 \sin^2 \xi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} d\xi.$$

Ara podem escriure

$$\int_{\pi/2}^0 \frac{(1-2\sin^2 \xi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} d\xi = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} d\xi - \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}}$$

i $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}}$ és la integral el·líptica (completa) de primera espècie. Pel que fa a l'altra integral, es pot expressar en termes de $K(k)$ i $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi} d\xi$ (integral el·líptica completa de segona espècie), ja que és immediat que val la identitat

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} d\xi = \frac{1}{k^2} (K(k) - E(k)).$$

Podem doncs escriure

$$A(\rho) = 2\kappa I k \sqrt{\frac{R}{\rho}} \left(\frac{2}{k^2} (K(k) - E(k)) - K(k) \right),$$

és a dir

$$A(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{\rho}} \left(\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right).$$

Remarca. La funció K , que ens va ser útil per expressar el període d'un pèndol, es pot calcular mitjançant Maple amb l'expressió $\text{EllipticK}(k)$, i $E(k)$ amb $\text{EllipticE}(k)$.

Potencial magnètic d'un solenoide infinit. Suposem que el solenoide té n espires per unitat de longitud. Com en el cas d'un fil rectilini infinit, prendrem l'eix del solenoide com a Ox i primer trobarem el potencial creat pel fil entre $-\ell$ i ℓ . Com que en l'interval dx hi ha ndx espires, aquestes espires es poden pensar com una espira circular amb corrent $I \cdot ndx$ i el potencial magnètic del solenoide serà la suma dels potencials magnètics d'aquestes "espires":

$$\mathbf{A} = \hat{\Phi} \frac{\mu_0 R n I}{2\pi} \int_{-\ell}^{+\ell} dx \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{x^2 + \rho^2 + R^2 - 2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha)}} d\alpha.$$

Canviant l'ordre d'integració,

$$\mathbf{A} = \hat{\Phi} \frac{\mu_0 R n I}{2\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha) d\alpha \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}},$$

$$a = \rho^2 + R^2 - 2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha).$$

Descomponent la integral entre 0 i π en una integral entre 0 i $\pi/2$ i una integral entre $\pi/2$ i π , obtenim l'expressió

$$A = \hat{\Phi} \frac{\mu_0 R n I}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha \left(\int_{-\ell}^{+\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} - \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} \right),$$

$$b = \rho^2 + R^2 + 2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha).$$

Com que $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+a}}{-x+\sqrt{x^2+a}},$

$$A = \hat{\Phi} \frac{\mu_0 R n I}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha \ln \left(\frac{\ell+\sqrt{\ell^2+a}}{-\ell+\sqrt{\ell^2+a}} \cdot \frac{-\ell+\sqrt{\ell^2+b}}{\ell+\sqrt{\ell^2+b}} \right),$$

i en el límit quan $\ell \rightarrow \infty$,

$$A = \hat{\Phi} \frac{\mu_0 R n I}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha \ln \frac{b}{a}$$

$$= \hat{\Phi} \frac{\mu_0 R n I}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha) \ln \frac{\rho^2+R^2+2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha)}{\rho^2+R^2-2Rr \sin(\theta) \cos(\alpha)} d\alpha.$$

Aquesta integral es pot fer per parts, i s'obté

$$A = \hat{\Phi} \frac{\mu_0 R n I}{2\pi} \frac{\pi(\rho^2+R^2)}{2\rho R} \left(1 - \frac{|\rho^2-R^2|}{\rho^2+R^2} \right).$$

Més concretament,

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \hat{\phi} \frac{\mu_0 R^2 n I}{2} \cdot \frac{1}{\rho}, & \text{si } \rho > R \\ \hat{\phi} \frac{\mu_0 n I}{2} \rho, & \text{si } \rho < R \end{cases}$$

Ara la fórmula $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$, i l'expressió del rotacional en cilíndriques ens dóna:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho A_\phi) \hat{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho > R \\ \mu_0 n I \hat{x} & \text{si } \rho < R \end{cases}$$

És a dir, el camp magnètic és nul a l'exterior del solenoide i és uniforme, paral·lel a l'eix en el sentit positiu i de mòdul $\mu_0 n I$ a l'interior.

Remarca. Un solenoide és doncs l'anàleg magnètic del condensador de plaques paral·leles, ja que aquest crea un camp elèctric uniforme entre les plaques.

Remarca. Establiu la fórmula anterior mitjançant l'aplicació de les lleis de Gauss (per al camp magnètic) i d'Ampère. [La llei de Gauss aplicada a un cilindre coaxi-

al amb el solenoide dóna que el camp magnètic no té component radial; l'aplicació de la llei d'Ampère a una circumferència concèntrica amb secció transversal del solenoide dóna que no hi ha component azimuthal, de manera que $\mathbf{B} = B(\rho)\hat{x}$. Com que a l'interior i a l'exterior del solenoide $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$, la fórmula pel rotacional en cilíndriques ens dóna que $B(\rho)$ és constant. Finalment, la llei d'Ampère aplicada a rectangles radials ens permet concloure que el valor de B és 0 a l'exterior i $\mu_0 nI$ a l'interior]

Remarca. El fet que el potencial magnètic sigui no nul a l'exterior del solenoide juga un paper fonamental en l'explicació (en termes de mecànica quàntica) de l'anomenat experiment de Aharonov–Bohm, en què el patró d'interferència d'un feix d'electrons a l'exterior d'un solenoide molt prim i llarg canvia quan es fa circular corrent pel solenoide. Això mostra que el potencial magnètic no és només una conveniència matemàtica, sinó que expressa una realitat física (per a una introducció a aquestes qüestions, v. *Lectures on Physics*, vol. II, de R. Feynmann, lliçó 15).

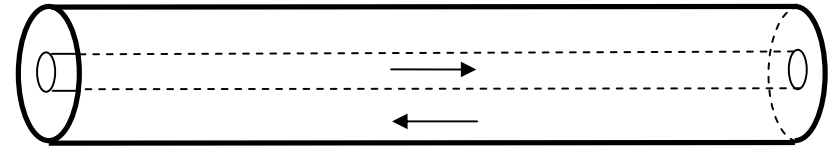
No existeixen camps magnètics radials no nuls. En efecte, el flux d'un camp radial $\mathbf{B} = B(r)\hat{\mathbf{r}}$ a través de l'esfera de centre l'origen i radi r és d'una banda $B(r)\pi r^2$, i de l'altra 0 pel teorema de la divergència i la llei de Gauss per al camp magnètic ($\text{div}(\mathbf{B}) = 0$). Així, doncs, ha de ser $B(r) = 0$, és a dir, $\mathbf{B} = 0$.

Camp magnètic d'un solenoide toroïdal. Amb arguments de simetria es pot veure que el camp magnètic creat per un solenoide toroïdal té la forma $\mathbf{B} = B(\rho)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Prenent ara una circumferència C de radi r en el pla perpendicular a l'eix del solenoide, amb centre sobre l'eix, i aplicant la llei d'Ampère, obtenim que $B(\rho)2\pi r$ és 0 si C és exterior al solenoide i $\mu_0 NI$, N el nombre total d'espores, si C és interior al solenoide. Per tant, el camp magnètic és nul a l'exterior del solenoide i és igual a $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

E.5.1. Useu la llei d'Ampère per calcular el camp magnètic creat per un corrent filiforme rectilini infinit d'intensitat I .

[El resultat, $\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$, ha estat obtingut a E.4 mitjançant la llei de Biot-Savart i a la pàg. 13 a partir del potencial magnètic]

E.5.2. Un cable coaxial rectilini està format per dues superfícies cilíndriques rectes amb el mateix eix i de forma que puguin transportar el mateix corrent I , però en sentit contrari. Useu la llei d'Ampère per mostrar que el camp magnètic és nul fora del cilindre exterior i dins del cilindre interior, i que entre els dos cilindres té la forma $\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$.



Notes

1. (Pàg. 7) **Teorema de Helmholtz**. Siguin f una funció i $\mathbf{k}$ un camp vectorial solenoïdal ($\text{div}(\mathbf{k}) = 0$), i suposem que $r^2 f$ i $r^2 \mathbf{k}$ s'anul·len a l'infinit. Llavors existeix un únic camp $\mathbf{u}$ nul a l'infinit tal que

$$\text{div}(\mathbf{u}) = f \text{ i } \text{rot}(\mathbf{u}) = \mathbf{k}.$$

A més,

$$\mathbf{u} = -\partial\phi + \text{rot}(\mathbf{a}), \text{ amb}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\omega(\mathbf{x}).$$

De fet, definint $\mathbf{u}$ per aquestes fórmules, és clar que $\text{div}(\mathbf{u}) = -\Delta\phi = f$ i $\text{rot}(\mathbf{u}) = \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a})) = \partial(\text{div}(\mathbf{a})) - \Delta\mathbf{a} = \mathbf{k}$ (que $\text{div}(\mathbf{a}) = 0$ es veu pel mateix mètode usat per veure que el potencial magnètic té divergència nul·la). Notem que

$$-\partial\phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x})$$

$$\text{rot}(\mathbf{a}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r}-\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^3} d\omega(\mathbf{x}).$$

2. (Pàg. 10) Amb les notacions de l'exerci E.3.2, el terme quadrupolar del potencial magnètic té la forma $\frac{\mu_0}{4\pi r^5} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}_x \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x})$. En el cas filiforme, $\frac{\mu_0 I}{4\pi r^5} \int_{\gamma} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}_x \mathbf{r}) d\mathbf{l}(\mathbf{x})$.