

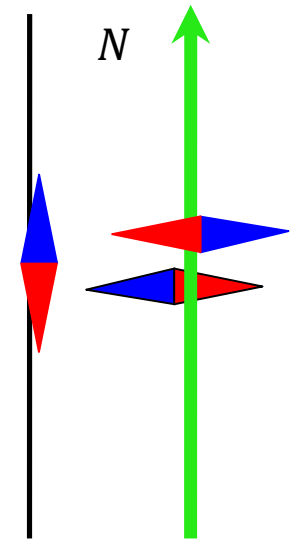
MMF 10 / 2. *Electromagnetisme*

4. Força magnètica entre càrregues en moviment. Camps magnètics

S. Xambó

- Nota històrica (sobre la relació entre corrents i magnetisme).
- Força magnètica entre càrregues mòbils
- Camp magnètic i llei de Lorentz
- Corrents elèctrics
- Camp magnètic generat per un corrent j
- Força d'un camp magnètic sobre un corrent
 - Forces entre dos circuits filiformes
 - Fórmules auxiliars
- Moment M de les forces d'un camp magnètic uniforme B sobre un corrent j .
- Altres exemples d'aplicació de la teoria del moment magnètic

Nota històrica. A principis del 1820 Oersted descobrí que un corrent elèctric desvia una agulla imantada (brúixola), tal com indica la figura. Resultava així que l'electricitat i el magnetisme, fins aleshores considerats fenòmens independents, estaven profundament relacionats: un corrent elèctric era com un imant (avui diem que crea un «camp magnètic»). Aquest fet té dos aspectes: un corrent elèctric no només actua sobre els imants, sinó que també actua, com ho fan els ants (això també ho va descobrir Oersted), sobre altres corrents elèctrics.



Les lleis precises que regeixen aquestes interaccions van ser establertes abans d'acabar 1820 per Biot i Savart (expressió de la força produïda per un corrent rectilini sobre un imant) i Ampère (expressió de la força entre dos corrents rectilinis paral·lels).

Ampère, que fou el primer en postular que el magnetisme era produït per petits corrents en el si de la substància magnetitzada, va continuar investigant la interacció entre dos corrents elèctrics i publicà els resultats el 1825 (*Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*). El més important és la llei que dona la força que un camp magnètic exerceix sobre un corrent.



André-Marie Ampère
(1775-1836)

Ampère inventà l'*amperímetre*, per mesurar intensitats de corrent, i és per això que la unitat SI d'intensitat de corrent s'anomena *amperi* ($A = C/s$). Actualment l'amperi es defineix, com veurem més avall, com una unitat primària i $C = As$ com una unitat derivada.

D'Ampère, Maxwell digué que era «el Newton de l'electricitat».

Força magnètica entre càrregues mòbils

La força de Coulomb sobre una càrrega puntual q causada per una càrrega q' ve donada per la fórmula

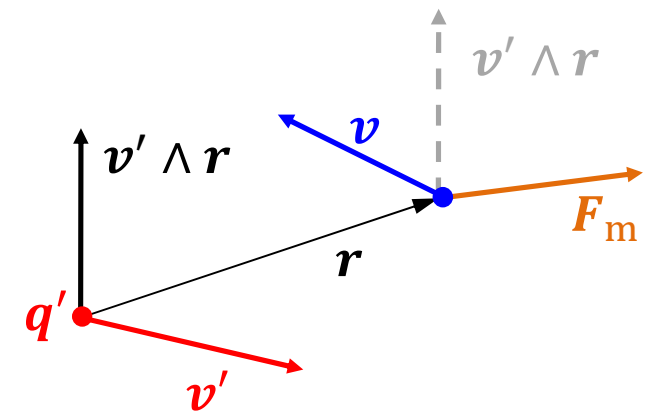
$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

on $\mathbf{r}$ és el vector de posició de q respecte de q' .

Si les càrregues es mouen amb velocitats $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$, respectivament, es pot considerar com un fet experimental (vegeu la remarca de la pàg. 14) que existeix, a més, una *força magnètica* exercida sobre q per q' i que aquesta força ve donada per la fórmula

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq'}{r^3} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r}), \text{ on } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Ns}^2/\text{C}^2$$

(la constant μ_0 s'anomena *permeabilitat magnètica del buit*; el seu valor és exacte en el sistema SI).^{N1a}



Camp magnètic i llei de Lorentz

Per analogia amb la definició de camp elèctric, basada en la llei de Coulomb, definim el *camp magnètic* $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{q',v'}$ creat per la càrrega q' per la relació

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{r^3} (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r}).$$

D'aquesta manera la força magnètica té la forma

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}.$$

La força total $\mathbf{F}$ que q' exerceix sobre q és la suma de la força elèctrica i la força magnètica, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$, és a dir,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

i aquesta relació s'anomena *lleï de Lorentz*.

Remarca. Atès que $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ és perpendicular a $\mathbf{v}$, la força magnètica no exerceix cap treball sobre la càrrega q a la qual s'aplica.

Remarca. Podem escriure

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{4\pi} \frac{qq'}{r^3} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r}).$$

Les dimensions de $\mu_0 \varepsilon_0$ són $\frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} = \frac{1}{\text{m}^2/\text{s}^2}$, és a dir, de l'invers d'una velocitat al quadrat: $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$. Numèricament,

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s},$$

que coincideix amb el valor que s'obté experimentalment per a la velocitat de la llum en el buit (actualment, és un valor exacte en el SI). En particular podem posar

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{qq'}{r^3} \left(\frac{1}{c} \mathbf{v} \right) \wedge \left(\frac{1}{c} \mathbf{v}' \wedge \mathbf{r} \right).$$

D'aquesta fórmula es dedueix fàcilment que

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{vv'}{c^2},$$

la qual cosa prova que la intensitat de la interacció magnètica és molt més petita que la de la interacció elèctrica si les velocitats de les càrregues són petites comparades amb la velocitat de la llum.^{N2}

Per altra banda, tenint en compte que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{r^3} (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r}),$$

el camp magnètic $\mathbf{B}$ es pot expressar en termes del camp elèctric $\mathbf{E}$ creat per q' :

$$\mathbf{B} = (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{E})/c^2.$$

Remarca (Principi de superposició per a camps magnètics). És un fet experimental que el principi de superposició és vàlid per a camps magnètics. Això vol dir que si tenim càrregues $q_1, \dots, q_n$ que es mouen amb velocitats $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, i $\mathbf{B}_i$ és el camp magnètic creat per q_i separatament, llavors el camp magnètic $\mathbf{B}$ creat per les càrregues en conjunt és $\Sigma_i \mathbf{B}_i$, és a dir, la suma dels camps magnètics individuals, en el sentit que la força

magnètica $\mathbf{F}_m$ que les càrregues exerceixen sobre una càrrega q que es mou amb velocitat $\mathbf{v}$ és $q\mathbf{v} \wedge (\sum_i \mathbf{B}_i)$.

Remarca (El camp magnètic dels imants). El principi de superposició ens permet donar una explicació sobre l'origen del camp magnètic dels imants. Tenint en compte que els electrons d'un àtom estan en moviment, cadascun d'ells produeix un minúscul camp magnètic. Podem considerar, doncs, la suma $\mathbf{B}$ de tots aquests camps magnètics per a un cert conjunt d'àtoms, com ara els continguts en una determinada porció de matèria. Com que en general els àtoms del conjunt estan desordenats aleatòriament, el camp $\mathbf{B}$ és nul (o molt petit) per raons estadístiques. Però en ocasions, com és el cas dels imants, la distribució dels àtoms, i dels camps magnètics dels seus electrons, és ordenada i aleshores $\mathbf{B}$ és un camp no nul. La relació que hi ha entre l'ordenació dels àtoms i la direcció i magnitud de $\mathbf{B}$ serà estudiada més endavant.

Exemple. Una partícula de massa m i càrrega q es mou en un camp magnètic uniforme $\mathbf{B}$. Siguin $v^{\parallel}$ i $v^{\perp}$ els mòduls de les components paral·lela i perpendicular (a $\mathbf{B}$) de la velocitat. Veurem que $v^{\parallel}$ i $v^{\perp}$ són constants i que la partícula descriu una hèlix de radi $v^{\perp}m/qB$ i pas $2\pi v^{\parallel}m/qB$.

En efecte, podem suposar que $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$. La força sobre la partícula és $q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \equiv qB(0, \dot{z}, -\dot{y})$. Per tant $m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = qB(0, \dot{z}, -\dot{y})$. En resulta que $\dot{x} = v^{\parallel}$ és constant. Posant $\omega = qB/m$, les equacions corresponents a les altres dues coordenades són $\ddot{y} = \omega\dot{z}$ i $\ddot{z} = -\omega\dot{y}$. La solució d'aquest sistema té la forma $\dot{y} = A \sin(\omega t + \phi)$, $\dot{z} = A \cos(\omega t + \phi)$, $A \geq 0$ i ϕ constants. Com que $(v^{\perp})^2 = \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = A^2$, resulta que $A = v^{\perp}$, i $v^{\perp}$ també és constant. Integrant,

$$y = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \phi) + k_y, \quad z = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \phi) + k_z$$

(k_y i k_z constants), la qual cosa mostra que la partícula descriu una hèlix de radi $r = A/\omega = v^{\perp}m/qB$ i pas $v^{\perp} \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi v^{\parallel}m/qB$.

Del radi r i de la freqüència ω se'n diuen *radi* i *freqüència de Larmor* (o *freqüència ciclotrònica*).^{N3}

Corrents elèctrics

Considerem un corrent elèctric, és a dir, una distribució de càrregues en moviment. Si la densitat és $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, i $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ el camp de velocitats, el vector

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

s'anomena *densitat de corrent*. Per simplificar les notacions, usualment només escriurem $\mathbf{j}$ per denotar-lo.

Teorema (Llei de conservació de la càrrega en forma diferencial). El principi de conservació de la càrrega és equivalent a l'equació diferencial

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0 \text{ (equació de continuïtat).}$$

Prova. Vegeu E.1 (Camp elèctric), pàg. 3.

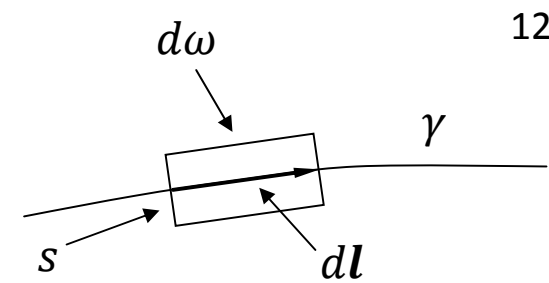
Direm que la densitat ρ és *estacionària* si $\partial_t \rho = 0$, és a dir, si la densitat de càrrega en cada punt és independent del temps. Si ρ és estacionària i a més es compleix $\partial_t \mathbf{j} = 0$, direm que el corrent $\mathbf{j}$ és *estacionari*.

Corol·lari. Una densitat de càrrega ρ és estacionària si i només si

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0.$$

Exemple (Corrents filiformes). Els corrents més usats en la pràctica estan formats pel moviment d'electrons en fils. La noció de *corrent filiforme* és un model matemàtic convenient d'aquesta mena de corrents i està constituït per dos objectes: una corba orientada γ de E_3 , que en direm el *fil* del corrent (o el *circuït* en el cas que la corba sigui tancada) i un nombre real I , que en direm la *intensitat* del corrent. Vegem com cal interpretar la densitat de corrent $\mathbf{j}$ associada a aquest corrent filiforme. Per a corrents en fils conductors, les càrregues que formen $\mathbf{j}$ tenen una densitat constant ρ (determinada pel material de què està fet el fil conductor) i les hem d'imaginar localitzades en el tub format a partir de γ amb una secció transversal $s > 0$ que suposem negligible en comparació amb la longitud del fil (aquest tub representa l'espai ocupat pel conductor físic). Més concretament, les càrregues mòbils estan en el tub que podem formar per

unió dels tubs infinitesimals $d\omega = s dl$ associats a cada element dl del fil γ . A més, suposarem que la velocitat $\mathbf{v}$ de les càrregues contingudes a $d\omega = a dl$ és tangent a γ , és a dir, que $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$, on $\mathbf{t}$ és el vector tangent unitari a γ . D'aquesta manera



$$\mathbf{j} d\omega = \rho v s dl = \rho v s (dl) \mathbf{t} = I d\mathbf{l},$$

on hem interpretat que $I = \rho v s$, atès que aquesta expressió denota la quantitat de càrrega que cada segon travessa la secció transversal del fil.

En resum, per a corrents filiformes cal interpretar l'element de corrent $\mathbf{j} d\mathbf{x}$ com a $I d\mathbf{l}$ i les integrals de volum s'han de transformar en les corresponents integrals de línia. Formalment,

$$\int h(\mathbf{x}) \star \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega \rightarrow I \int_{\gamma} h(\mathbf{x}) \star d\mathbf{l}(\mathbf{x}),$$

on $\star$ denota una operació arbitrària entre l'integrand $h(\mathbf{x})$ i l'element de corrent $\mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega$. Notem que el principi de conservació de la càrrega im-

plica que I no depèn de $\mathbf{x} \in \gamma$ (i per tant la podem treure fora del signe integral), però que tanmateix pot dependre de t .

Camp magnètic generat per un corrent $\mathbf{j}$

Com que el camp magnètic en un punt $\mathbf{r}$ creat per $(\rho d\omega)\mathbf{v} = \mathbf{j} d\omega$ és

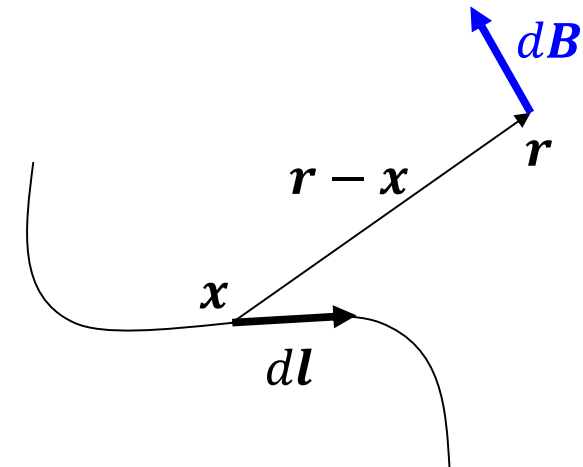
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\rho d\omega)\mathbf{v} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d\omega ,$$

el camp magnètic $\mathbf{B}$ generat per $\mathbf{j}$ es pot calcular per la fórmula

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} d\omega(\mathbf{x}) . \quad \text{N4}$$

En el cas d'un corrent d'intensitat I en un fil γ , tenim la *fórmula de Biot–Savart*:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} .$$



Remarca. La fórmula $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{r^3} (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r})$ que dóna el camp magnètic d'una càrrega puntual q' que es mou amb velocitat $\mathbf{v}'$, és un postulat inspirat directament en l'expressió

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{d\mathbf{l}'(x') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|^3}$$

del camp magnètic produït per l'element $d\mathbf{l}'$ de γ' amb intensitat de corrent I' (fórmula de Biot–Savart). Notem que si posem q' per indicar la càrrega continguda a $d\mathbf{l}'$, llavors $q'\mathbf{v}' = I'd\mathbf{l}'$ (si γ' té secció transversa s' i ρ' és la densitat de càrregues mòbils, $I'd\mathbf{l}' = \rho s' v' d\mathbf{l}' = \rho s' dl' \mathbf{v}' = q'\mathbf{v}'$).

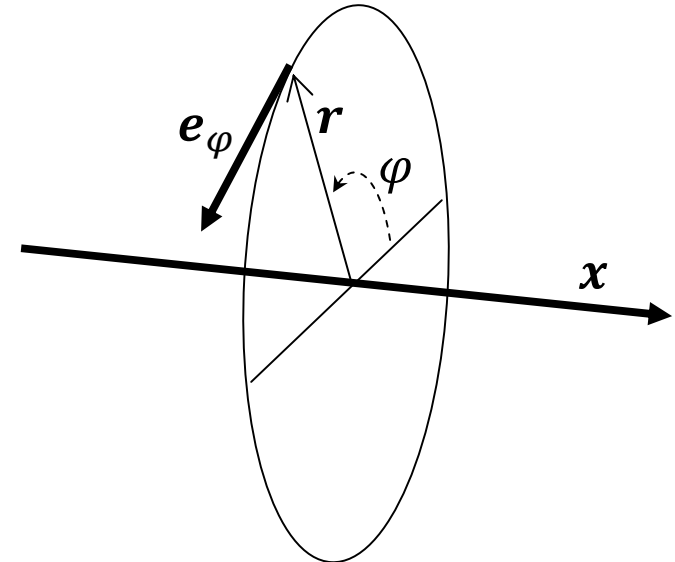
Remarquem també que la verificació experimental directa de fórmula $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{r^3} (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r})$ és inviable, ja que per a càrregues puntuals isolades el camp magnètic és negligible en comparació amb el camp elèctric. La raó inicial per admetre-la ha estat simplement que d'ella hem pogut de-

duir la fórmula de Biot–Savart, ben establerta experimentalment. En la part de Relativitat veurem una raó molt més profunda per acceptar-la: la fórmula $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{r^3} (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r})$ resulta ser una fórmula aproximada, vàlida per a velocitats petites, d'una fórmula que es pot establir amb la teoria de la relativitat. Remarcablement, la fórmula de Biot–Savart és també una conseqüència de la teoria de la relativitat, però, a diferència de la fórmula que acabem de comentar, no és aproximada, sinó exacta.

Exemple. Donat un corrent filiforme rectilini infinit d'intensitat I , el camp magnètic en un punt a distància r del fil és

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi r^2} \mathbf{I} \wedge \mathbf{r} ,$$

on (x, r, φ) són coordenades cilíndriques amb eix Ox la recta del corrent, orientada segons el



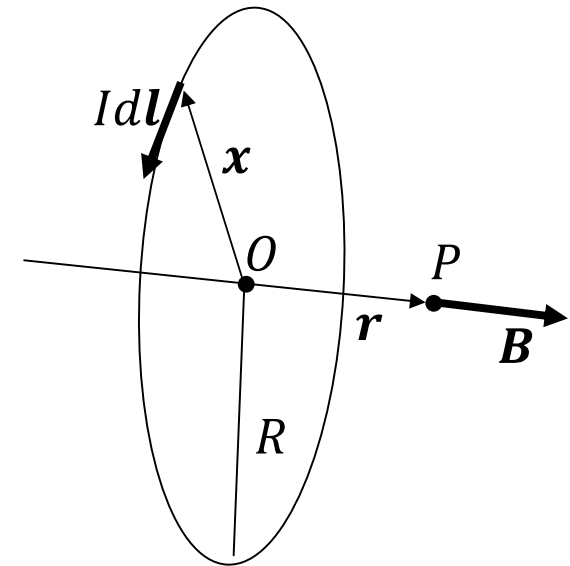
sentit d'aquest, i $\mathbf{I} = I\mathbf{e}_x$. Els vectors $\mathbf{e}_x$ i $\mathbf{e}_\varphi$ són els vectors unitaris corresponents a les coordenades x i φ . Noteu que $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_r$.

En efecte, $d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x}) = (dx \mathbf{e}_x) \wedge \mathbf{r} = (dx)r\mathbf{e}_\varphi$, i posant $\xi = x/r$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} r \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \right) \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \right) \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi .$$

Exemple. Considerem un corrent filiforme d'intensitat I en un circuit circular de radi R . Si gui O el centre del cercle i P un punt tal que $\mathbf{r} = P - O$ és perpendicular al pla del cercle. Per raons de simetria, el camp magnètic produït per I en el punt P és paral·lel a OP i el seu mòdul resulta serà

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} R^2 / (R^2 + r^2)^{3/2}, \text{ on } r = \overline{OP}.$$



En efecte, de $d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x})$ només ens cal tenir en compte $-d\mathbf{l} \wedge \mathbf{x}$, ja que $d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}$ és perpendicular a OP . Com que

$$-d\mathbf{l} \wedge \mathbf{x} = -(R\mathbf{e}_\varphi) \wedge (R\mathbf{e}_r) = R^2\mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \right) \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x.$$

Remarca. La unitat SI del camp magnètic és el *tesla* (T). En termes de les dimensions fonamentals tenim $T = \text{Ns/C m} = \text{N/Am}$. S'aconsegueixen camps de l'ordre de 1T amb electroimants mitjans, o amb els imants més potents (els imants en forma de ferradura de mitjana potència produeixen camps magnètics de l'ordre de 0.01T). Els camps més forts que s'aconsegueixen al laboratori, amb solenoides superconductors, s'apropen a 100T. Els més grans de què es té notícia, de l'ordre de 10^8T , es manifesten a la superfície de les estrelles de neutrons. En l'altre extrem tenim que la magnitud del camp magnètic de la Terra (el nucli de la qual és com un gran imant) és, en la seva superfície, de l'ordre de 10^{-4}T ; que el

de l'espai interestel·lar és de l'ordre de 10^{-10}T ; i que els instruments actuals més precisos arriben a detectar camps de 10^{-14}T .

Força d'un camp magnètic sobre un corrent

Si un corrent elèctric és en el si d'un camp magnètic $\mathbf{B}$, la força de Lorentz que $\mathbf{B}$ exerceix sobre l'element $d\omega$ és igual a

$$(\rho d\omega)\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})d\omega .$$

Per tant, la força magnètica total de $\mathbf{B}$ sobre el corrent és

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) d\omega .$$

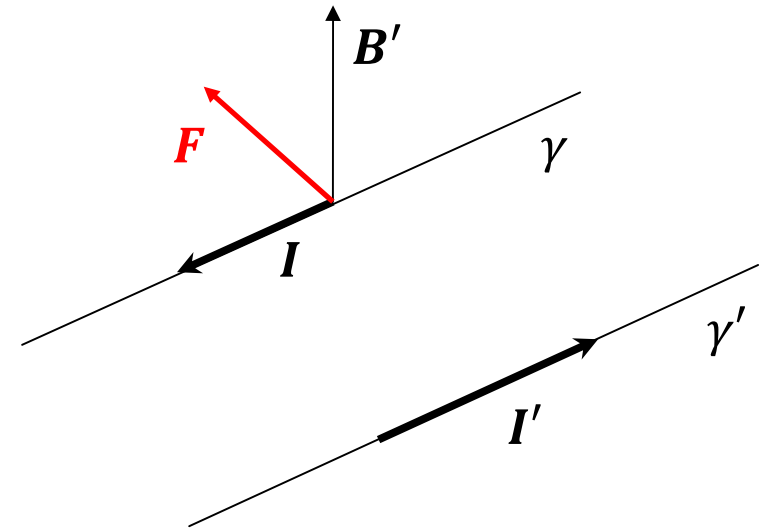
Exemple (Fórmula d'Ampère per a la força que un camp magnètic exerceix sobre un corrent filiforme). Usualment $\mathbf{j}$ es redueix a corrents filiformes. En aquest cas, l'expressió de la força ve donada, d'acord amb la regla que hem vist abans, per una integral de línia sobre el fil γ del corrent:

$$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} .$$

Càrregues en moviment	Creen $\mathbf{B}$
q' a velocitat $\mathbf{v}$ en el punt $\mathbf{x}'$	$\mathbf{B}_{q',\mathbf{x}',\mathbf{v}'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{ \mathbf{r}-\mathbf{x}' ^3} (\mathbf{v}' \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x}'))$
q_i a velocitat $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, r$)	$\sum_i \mathbf{B}_{q_i,\mathbf{x}_i,\mathbf{v}_i}$ (Principi superposició)
Corrent $\mathbf{j}$	$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \wedge (\mathbf{r}-\mathbf{x})}{ \mathbf{r}-\mathbf{x} ^3} d\omega$
Corrent filiforme	$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r}-\mathbf{x})}{ \mathbf{r}-\mathbf{x} ^3}$
Càrregues en moviment en un $\mathbf{B}$	Força magnètica $\mathbf{F}_m$
q a velocitat $\mathbf{v}$	$q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (Llei de Lorentz)
q_i a velocitat $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, r$)	$\sum_i q_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)$ (Principi superposició)
Corrent $\mathbf{j}$	$\int \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} d\omega$
Corrent filiforme	$I \int d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$

Forces entre dos circuits filiformes. Considerem un altre corrent filiforme d'intensitat I' en un circuit γ' . La força que el seu camp magnètic exerceix sobre el corrent filiforme d'intensitat I en el circuit γ es pot expressar per la *fórmula d'Ampère*:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}) \wedge (d\mathbf{l}'(\mathbf{x}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{x}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}'|^3} . \quad \text{N1b}$$



Exemple. La força per metre que un corrent filiforme rectilini infinit d'intensitat I exerceix sobre un corrent similar paral·lel d'intensitat I' és perpendicular als fils, paral·lela al pla que els conté, i el seu mòdul és $\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \cdot I'}{d}$. La força és atractiva si els dos corrents tenen el mateix sentit i repulsiva en cas contrari.

[Com que $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{kg m C}^{-2}$, veiem que en el sistema SI es pot definir la unitat d'intensitat, l'amperi (A), com el corrent que han de dur cadas-

cun de dos fils rectilinis infinits paral·lels, separats 1 m, per tal que la força en un d'ells sigui de 2×10^{-7} N/m. De fet aquesta és la definició actual de la unitat d'intensitat, de la qual es deriva la unitat de càrrega: $1\text{C} = 1\text{A s}$.

Fórmules auxiliars

Sigui $\mathbf{j}$ un camp vectorial de suport compacte tal que $\text{div}(\mathbf{j}) = 0$. Llavors:

$$(1) \int (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\partial} f) d\omega = 0, \text{ per a tota funció } f.$$

$$(2) \int \mathbf{j} d\omega = 0.$$

$$(3) \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) \mathbf{x} d\omega = - \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega, \text{ per a qualsevol camp uniforme } \mathbf{a}.$$

$$(4) \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x})) \wedge \mathbf{r} d\omega, \text{ per a qualsevol camp uniforme } \mathbf{r}.$$

Prova. (1) $\mathbf{j} \cdot \partial f = \text{div}(f\mathbf{j})$, ja que $\text{div}(\mathbf{j}) = 0$. Per tant,

$$\int (\mathbf{j} \cdot \partial f) d\omega = \int \text{div}(f\mathbf{j}) d\omega = \int_B \text{div}(f\mathbf{j}) d\omega = \phi_{\partial B}(f\mathbf{j}) = 0,$$

on B és qualsevol bola que contingui totes les càrregues que formen el corrent $\mathbf{j}$.

(2) Per a qualsevol vector $\mathbf{a}$ es compleix $\mathbf{a} \cdot \int \mathbf{j} d\omega = 0$, atès que $\mathbf{a}$ és el gradient de la funció lineal $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$.

(3) Apliquem (1) a la funció $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})$, on $\mathbf{b}$ és un vector arbitrari. Com que el gradient de f és $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}) d\omega + \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) d\omega \\ &= \mathbf{b} \cdot \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) \mathbf{x} d\omega + \mathbf{b} \cdot \int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega, \end{aligned}$$

i la fórmula resulta per ser $\mathbf{b}$ és arbitrari.

(4) Per la fórmula del doble producte vectorial,

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x})) \wedge \mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}(\mathbf{x}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}))\mathbf{x}.$$

Ara és suficient multiplicar per $d\omega$ i adonar-se que la integral de l'expressió de la dreta és igual, tenint en compte (3), a

$$2 \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega.$$

Moment $\mathbf{M}$ de les forces d'un camp magnètic uniforme $\mathbf{B}$ sobre un corrent $\mathbf{j}$.

Proposició. Si $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x})) d\omega$, llavors $\mathbf{M} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$.

Prova. La força de Lorentz que $\mathbf{B}$ exerceix sobre les càrregues contingudes a $d\omega$ és

$$(\rho(\mathbf{x})d\omega)(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{B}) d\omega.$$

Per tant, el moment d'aquesta força és

$$\mathbf{x} \wedge (\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{B}) d\omega.$$

Sumant sobre tots els elements de volum, tenim

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{x} \wedge (\mathbf{j}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{B}) d\omega = \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\omega - \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) \mathbf{B} d\omega.$$

Com que $\mathbf{B}$ és uniforme, el segon terme és igual a

$$\left(\int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) d\omega \right) \mathbf{B},$$

i aquesta expressió s'anul·la, perquè $\mathbf{x} = \partial_{\mathbf{x}}(\frac{1}{2} \mathbf{x}^2)$ i podem aplicar la primera fórmula. Per altra banda, la quarta fórmula auxiliar ens diu que el primer terme és igual a

$$\frac{1}{2} \int (\mathbf{x} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{x})) \wedge \mathbf{B} d\omega ,$$

que coincideix amb $\mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$ per ser $\mathbf{B}$ uniforme i per la definició de $\mathbf{m}$.

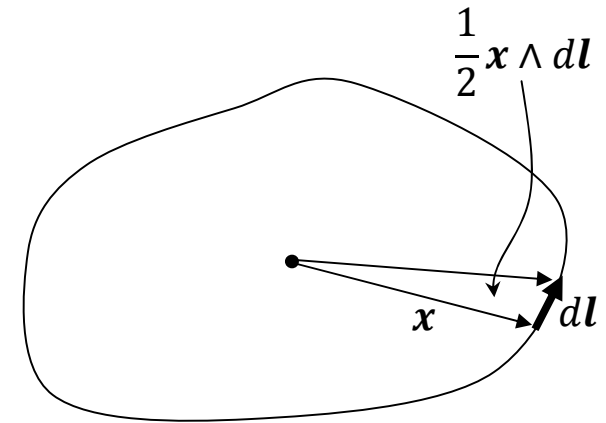
Diem que $\mathbf{m}$ és el *moment magnètic dipolar*, o el *dipol magnètic*, del corrent $\mathbf{j}$. En el cas d'un corrent filiforme d'intensitat I en un circuit γ , la fórmula apropiada per al corresponent moment magnètic és

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \int_{\gamma} \mathbf{x} \wedge d\mathbf{l} .$$

Remarca. L'expressió $\mathbf{M} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$ ens diu que $\mathbf{B}$ tendeix a alinear el dipol magnètic $\mathbf{m}$ d'un circuit amb $\mathbf{B}$, en direcció i sentit, anàlogament a com un camp elèctric uniforme aplicat a una distribució de càrregues tendeix a alinear el dipol elèctric d'aquesta distribució amb el camp elèctric.

Igual que en el cas elèctric, el potencial del dipol magnètic $\mathbf{m}$ en el si del camp magnètic $\mathbf{B}$ és $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$.

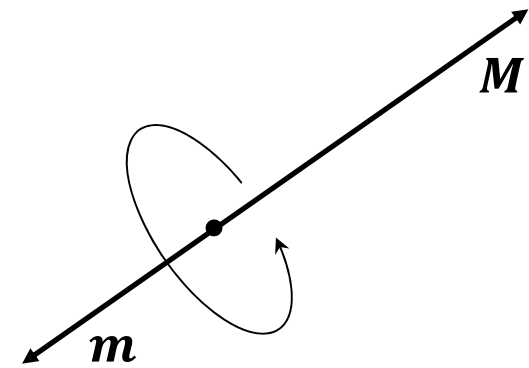
Exemple. El moment magnètic d'un corrent filiforme d'intensitat I que circula en un circuit simplement tancat situat en el pla xy és el vector $I\mathbf{s}$, on $\mathbf{s}$ és l'àrea vectorial associada al circuit (és a dir, $\mathbf{s} = (0,0,\pm s)$, s l'àrea del circuit, amb el signe $+$ si l'orientació del circuit és antihorària i signe $-$ altrament).



Remarca. En general, si γ és un circuit recorregut per un corrent d'intensitat I , i existeix una superfície S tal que $\gamma = \partial S$, llavors el moment magnètic d'aquest es

pot calcular per la fórmula $\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{s}$ (notem que en particular $\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{s}$ només depèn de γ , i no de la superfície S). En efecte, si $\mathbf{b}$ és un vector arbitrari, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{b} = I \int_\gamma \frac{1}{2} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}$, que pel teorema d'Stokes i la fórmula $\text{rot}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{x}) = 2\mathbf{b}$ és igual a $I \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = (I \int_S d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{b}$, d'on $\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{s}$.

Exemple (Moment magnètic dels àtoms i nuclis atòmics, i teorema de Larmor). El moment magnètic electrònic (nuclear) total d'un àtom, $\mathbf{m}$, és proporcional al corresponent moment angular $\mathbf{M}$, diguem $\mathbf{m} = -\gamma \mathbf{M}$, on γ és un factor que depèn de l'àtom (nucli) i del seu estat.^{N5} Anem a veure que $\mathbf{M}$, sota un camp magnètic uniforme $\mathbf{B}$, efectua un moviment de precessió uniforme de freqüència angular γB al voltant d'un eix paral·lel a $\mathbf{B}$ (teorema de Larmor), és a dir, $\mathbf{M}$ té mòdul constant i gira al voltant d'un eix paral·lel a $\mathbf{B}$, formant un angle constant amb $\mathbf{B}$, amb freqüència angular constant $\omega = \gamma B$ (*freqüència de Larmor*).



En efecte, podem suposar que $\mathbf{B} = (0,0,B)$. Tenim

$$\mathbf{m} = -\gamma\mathbf{M} = -\gamma(M_x, M_y, M_z)$$

i el moment de les forces produïdes per $\mathbf{B}$ sobre l'àtom (nucli atòmic) és

$$\mathbf{m} \wedge \mathbf{B} = -\gamma\mathbf{M} \wedge \mathbf{B} = -\gamma B(M_y, -M_x, 0).$$

Com que el moment de les forces produïdes per $\mathbf{B}$ sobre l'àtom també és

$$\dot{\mathbf{M}} = (\dot{M}_x, \dot{M}_y, \dot{M}_z),$$

tenim les equacions

$$\dot{M}_x = -\gamma B M_y, \quad \dot{M}_y = \gamma B M_x, \quad \dot{M}_z = 0.$$

Així M_z és constant i si escollim l'origen del temps de forma que $\mathbf{M} = (M', 0, M_z)$ per $t = 0$, llavors

$$M_x = M' \cos(\omega t), \quad M_y = M' \sin(\omega t),$$

on $\omega = \gamma B$, i això estableix el que volíem veure.

Remarca. La precessió dels nuclis atòmics en un camp magnètic uniforme és la base de l'anomenada *ressonància magnètica nuclear* (RMN). Hi ha també una *ressonància magnètica electrònica*, basada en la precessió del moment magnètic electrònic.

Altres exemples d'aplicació de la teoria del moment magnètic

Materials dia-, para- i ferromagnètics. Un material és *diamagnètic* si el moment magnètic dels seus constituents (àtoms o molècules) és nul. Un material es diu que és *paramagnètic* si el moment magnètic dels seus àtoms o molècules és no nul, però l'orientació d'aquests moments elementals és a l'atzar. En aquest cas, els àtoms o molècules tendiran a alinear-se amb un camp magnètic aplicat al material i el material estarà (feblement) magnetitzat mentre el camp persisteixi. En els materials *ferromagnètics*, a causa de la relativament elevada intensitat del moment magnètic dels seus àtoms o molècules, el volum del material es divideix espontàniament en cel·les (generalment microscòpiques) en cadascuna de les quals els moments magnètics elementals són paral·lels, però

l'orientació de les diverses cel·les és aleatòria. En aplicar un camp magnètic a un material d'aquesta mena, el moment magnètic resultant és ordres de magnitud més gran que en el cas paramagnètic. Per acabar, cal dir que els materials diamagnètics també reaccionen, encara que molt feblement, als camps magnètics, però el moment magnètic té orientació oposada al camp (l'origen d'això és una mena de dissociació a nivell atòmic o molecular produïda pel camp).

Brúixoles. En materials com la magnetita, els moments magnètics dels seus àtoms són paral·lels a una direcció, de manera que aquests materials tenen un moment magnètic no nul. Per tant, situada una petita porció d'aquest material en el si d'un camp magnètic, el material experimentarà un moment de força que tendirà a alinear el seu moment magnètic amb el camp magnètic.

Aquest fet és el que està a la base del funcionament de les brúixoles, inicialment fetes de magnetita (també dita pedra d'imat): una agulla de magnetita, tallada en la direcció del moment magnètic (convencionalment denotada S-N), equival a un petit dipol magnètic i aquest tendeix a alinear-se en la direcció sud-nord de

la Terra perquè aquesta és la direcció (aproximadament) del camp magnètic de la Terra (cf. la Nota N3 al final).

Imants i electroimants. En els materials anomenats *ferromagnètics* els moments magnètics dels àtoms són no nuls i susceptibles de ser orientats en una direcció donada (aquesta orientació es pot aconseguir aplicant un camp magnètic en la direcció desitjada, cosa que es pot fer fàcilment amb una bobina a la qual s'hi fa circular un corrent). Si aquest és el cas, tenim un material amb un moment magnètic no nul, és a dir, un imant.

Depenent del material, aquests imants poden ser *permanents* (si conserven el moment magnètic quan el camp magnètic desapareix) o *temporals* (si el moment magnètic desapareix en desaparèixer el camp). Els materials temporalment imantables, com és el cas de certes varietats de Fe, s'usen per fer electroimants, els quals estan formats per una bobina al voltant d'una barra del material en qüestió. Pel que hem dit, és clar que la barra es comportarà com un imant precisament quan hi hagi corrent a la bobina. Tal com hem dit a la re-

marca de la pàgina 17, d'aquesta manera s'aconsegueixen camps magnètics de l'ordre de 100 T.

Imants i solenoides. Sabem que un solenoide recorregut per un corrent produeix un camp magnètic $\mathbf{B}$. També té un moment magnètic $\mathbf{m}$. Per a solenoides llargs, $\mathbf{B}$ és pràcticament uniforme en el seu interior i paral·lel a $\mathbf{m}$. Un solenoide es comporta, doncs, com un imant de barra. Recíprocament, en un imant de barra els corrents circulen en plans perpendiculars a l'eix de l'imat, en petits circuits de dimensions atòmiques, i això fa que en cadascun d'aquests plans l'únic corrent net sigui el que recorre la superfície lateral.

Un imant de barra es comporta, quan el situem en un camp magnètic perpendicular a la barra, com si hi hagués en els seus extrems dues *càrregues magnètiques* de signes oposats (aquestes càrregues també s'anomenen *pols magnètics*). A més, si el camp magnètic és el d'un altre imant de barra, l'atracció o repulsió segueix una llei anàloga a la de Coulomb per a les càrregues elèctriques. Però resulta que aquestes *càrregues magnètiques* no tenen una entitat separada; només es saben produir en parelles de signes oposats. De fet, és clar per les ex-

plicacions que hem donat sobre els imants que si intentem dividir-ne un per la meitat, el resultat no són dos pols individuals (o *monopols*) i de signes contraris, sinó dos imants similars a l'inicial, però cadascun amb un moment magnètic igual a la meitat de l'inicial.

Si existís un monopol magnètic^{N6} en el punt $\mathbf{x}$, i la seva càrrega magnètica fos Q , llavors el camp magnètic produït per Q seria

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x})$$

i la força que aquest monopol exerciria sobre un segon monopol situat a $\mathbf{x}'$ i amb càrrega magnètica Q' seria

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{QQ'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}).$$

Una raó per l'interès en especular sobre els monopols magnètics és que aporta llum sobre la quantificació de la càrrega elèctrica, un dels fenòmens més fonamentals, i ensems misteriosos, de la natura. En efecte, tal com va mostrar Dirac el 1931, la quantificació de la càrrega elèctrica es pot deduir de l'existència d'un sol monopol magnètic. A més, l'argument de Dirac també prova que la càrrega

magnètica està quantificada i fins i tot dóna el mínim valor possible de la càrrega magnètica elemental.

Exercicis E.3 (Força magnètica)

E.4.1. Proveu que per una càrrega puntual q , de massa m , movent-se per un camp electromagnètic estàtic l'expressió $E = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi$ és constant, on ϕ és el potencial elèctric.

E.4.2. Estimeu la velocitat v dels electrons d'un corrent filiforme d'intensitat 15 A en un fil de coure (Cu) de secció transversal 1 mm^2 (la densitat del Cu és 8.96 g/cm^3 , el seu pes atòmic és 63.55 uma, i podeu suposar que cada àtom de Cu contribueix al corrent amb un electró lliure (recordem la unitat de massa atòmica, **uma** o **dalton**, es defineix com $\frac{1}{12}$ del pes d'un àtom de carboni, la qual cosa resulta ser equivalent a $1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$)).

Solució. Pel que hem dit, $v = I/\rho s$, on I és la intensitat del corrent, s la superfície transversal del fil i ρ la densitat de càrrega. Segons el que s'especifica a l'enunciat, $\rho = ne$, on n és el nombre d'àtoms de Cu per unitat de volum i e la càrrega elemental ($1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$). Però

$$n = \left(8.96 \times \frac{10^{-3}\text{kg}}{10^{-6}\text{m}^3}\right) / 63.55 \text{ uma} \times 1.66 \times \frac{10^{-27}\text{kg}}{\text{uma}} = 8.4935 \times 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3},$$

$$\rho = ne = 8.4935 \times 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \times 1.60 \times 10^{-19}\text{C} = 1.359 \times 10^{10} \text{ C/m}^3,$$

$$\rho s = \rho \times 10^{-6}\text{m}^2 = 1.359 \times 10^5 \text{ C/m}$$

$$v = \frac{15}{1.359 \times 10^5} \frac{\text{A} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 0.0011 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

E.4.3. Considereu un disc de radi R i centre O carregat elèctricament amb densitat superficial uniforme σ . Suposeu que el disc gira a velocitat angular constant ω al voltant de la recta OZ perpendicular al disc. Calculeu:

1. La densitat superficial de corrent.
2. El camp magnètic creat en un punt P de l'eix OZ .
3. El moment dipolar magnètic del disc.

Com es mourà una càrrega puntual q que inicialment estigui sobre OZ , a una distància a de l'origen, i amb velocitat v_0 en la direcció d' OZ ?

E.4.4. Considereu una superfície esfèrica de radi R carregada uniformement amb una densitat superficial σ . Suposem que la superfície gira al voltant d'un diàmetre amb una velocitat angular constant ω .

1. Calculeu la densitat superficial de corrent generada per la rotació de la superfície.
2. Proveu que el camp magnètic en el centre de l'esfera degut a la rotació és

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega.$$

E.4.5. Un corrent estacionari $\mathbf{j}$ es diu que és simètric respecte d'un pla π si, per a qualsevol parell de punts P i P' simètrics respecte de π , els vectors $\mathbf{j}(P)$ i $\mathbf{j}(P')$ són també simètrics respecte de π (i.e., les components tangencials al pla coincideixen i les normals només difereixen en el signe). Proveu que si $\mathbf{j}$ és simètric respecte de π , llavors el camp magnètic $\mathbf{B}$ generat per $\mathbf{j}$ és antisimètric respecte de π (i.e., $\mathbf{B}(P')$ és menys el simètric de $\mathbf{B}(P)$). Deduïu-ne en particular que $\mathbf{B}$ és perpendicular a π en tot punt de π .

Notes

N1a. [pàg. 4] La força magnètica que q exerceix sobre q' és

$$\mathbf{F}'_m(-\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq'}{r^3} \mathbf{v}' \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{r})$$

no compleix el tercer postulat de Newton: com que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{r}) &= \mathbf{v} \wedge (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{r}) + (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{r} \quad (\text{identitat Jacobi}) \\ &= -\mathbf{v} \wedge (\mathbf{v}' \wedge (-\mathbf{r})) + (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{r}, \end{aligned}$$

resulta que $\mathbf{F}'_m(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_m(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')$,

i el terme $\mathbf{r} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')$ només és nul si $\mathbf{r}$ és coplanari amb $\mathbf{v}'$.

N1b. [pàg. 20] La força que el corrent del circuit γ' exerceix sobre el corrent del circuit γ és

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{d\mathbf{l}(x) \wedge (d\mathbf{l}'(x') \wedge (x - x'))}{|x - x'|^3}.$$

Desenvolupant el doble producte vectorial, obtenim

$$d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \wedge (d\mathbf{l}'(\mathbf{x}') \wedge \mathbf{R}) = -(d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}'(\mathbf{x}'))\mathbf{R} + (d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R})d\mathbf{l}'(\mathbf{x}'),$$

on $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$. Però

$$(d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R})d\mathbf{l}'(\mathbf{x}') = (d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot \partial_{\mathbf{x}}\phi)d\mathbf{l}'(\mathbf{x}') , \text{ amb } \phi = -\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$

Com que γ és un circuit tancat, el teorema fonamental del càlcul ens diu que

$$\int_{\gamma} d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot \partial_{\mathbf{x}}\phi = 0,$$

de manera que

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} (d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}'(\mathbf{x}'))\mathbf{R} .$$

Raonant de la mateixa manera amb la força $\mathbf{F}'$ que el segon corrent exerceix sobre el primer,

$$\mathbf{F}' = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_{\gamma'} \int_{\gamma} \frac{d\mathbf{l}'(\mathbf{x}') \wedge (d\mathbf{l}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{x}' - \mathbf{x}))}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3},$$

obtenim que

$$\mathbf{F}' = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} (d\mathbf{l}'(\mathbf{x}') \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{x})) \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}' = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}.$$

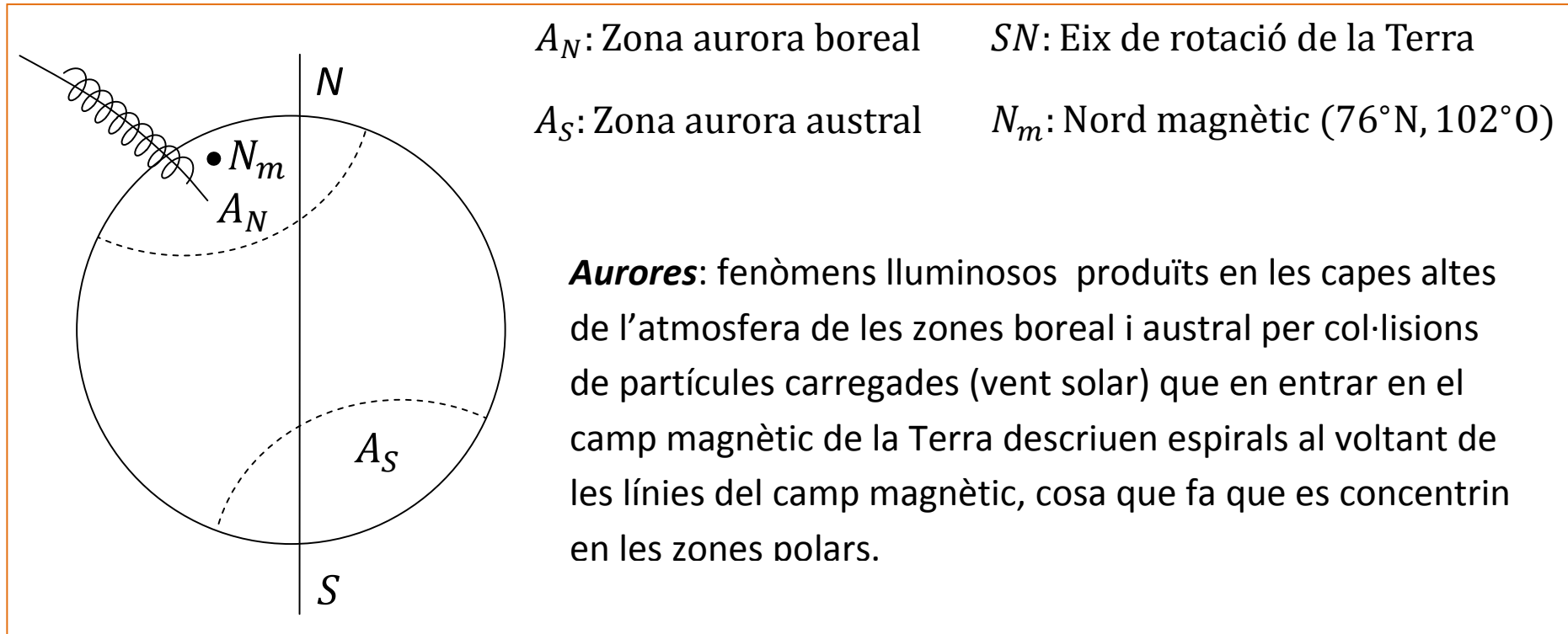
Finalment, com que $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$, obtenim que

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F}.$$

És a dir, encara que la força magnètica entre partícules carregades (o entre elements de corrent) no satisfaci la tercera llei de Newton, la força magnètica entre corrents tancats sí la satisfà.

N2. [pàg. 7] El fet que $F_m \ll F_e$ per a velocitats petites comparades amb la de la llum podria fer pensar que la força magnètica hauria de ser negligible en moltes de les situacions ordinàries. Però això no és així, com ho mostra l'exemple d'un corrent en un fil conductor. En efecte, en aquest cas les càrregues positives (fixes) i negatives (mòbils) tenen una densitat de càrrega total nul·la, i, lluny del conductor, produeixen un camp elèctric nul, però en canvi, com veiem més avall, les càrregues mòbils produeixen un camp magnètic no nul.

N3. [pàg. 9] Quan $v^{\parallel} = 0$, la partícula descriu un cercle. Aquest fet és la base del *ciclotró*. En tot cas, el resultat d'aquest exercici és una de les claus per explicar les aurores boreals, tal com mostra la il·lustració.



N4. [pàg. 13] Aquesta fórmula és anàloga a la fórmula

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})(\mathbf{r}-\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^3} d\omega$$

que dóna el camp elèctric corresponent a la distribució de càrregues ρ .

N5 (Moment magnètic dels àtoms i nuclis atòmics). [pàg. 26] Considerem un dels electrons d'un àtom. Si ens imaginem que descriu una trajectòria circular de radi r , el seu moment angular $\mathbf{M}$ és perpendicular al pla de l'òrbita i té mòdul $M = m_e v r$. També podem imaginar que en el seu moviment l'electró crea un corrent circular d'intensitat $I = -\frac{ev}{2\pi r}$ (ja que $v/2\pi r$ és la freqüència en què l'electró passa per un punt donat de l'òrbita), a la qual correspon un moment magnètic $\mathbf{m}$ perpendicular al pla de l'òrbita i de magnitud $m = \pi r^2 I = -evr/2$. En resulta que $\mathbf{m} = -\gamma_o \mathbf{M}$, amb $\gamma_o = -m/M = e/2m_e$. Com que γ_o només depèn de la massa i càrrega de l'electró, en podem deduir la relació $\mathbf{m}_o = -\gamma_o \mathbf{M}_o$ entre el moment angular orbital total dels electrons, $\mathbf{M}_o$, i el moment magnètic orbital $\mathbf{m}_o$ corresponent al mateix moviment.

La relació anterior s'ha obtingut amb un model clàssic molt simplificat, però sorprenentment el resultat segueix essent vàlid quan els càlculs es fan amb el model de la mecànica quàntica, que s'ha de considerar el correcte. Amb aquest model es troba que les partícules elementals tenen, a causa del seu moment angular intrínsec (espín), $\mathbf{M}_s$, un moment magnètic intrínsec ($\mathbf{m}_s$). En el cas de l'electró s'obté $\mathbf{m}_s = -g\gamma_o \mathbf{M}_s$, on $g = 2$ s'anomena el *factor de Landé* o *raó gi-*

romagnètica. Val a dir que aquest resultat és al que s'arriba mitjançant la mecànica quàntica no relativista, i que una de les prediccions més reeixides de tota la història de la física és la que fa la teoria quàntica de camps (és a dir, la mecànica quàntica relativista) quan per càlcul obté $g = 2.0023193048(8)$ i per experiment $g = 2.0023193048(4)$.

En el cas dels protons i neutrons, la teoria quàntica de camps dona $\mathbf{m}_s = -g\gamma_p \mathbf{M}_s$, on $\gamma_p = e/2m_p$, amb $g = 5.58569478(12)$ en el cas del protó i $-3.8260854(10)$ en el cas del neutró. El valor relativament gran d'aquests factors prové de l'estructura interna dels nucleons (protons i neutrons), però s'ha de remarcar que els moments magnètics són considerablement menors que els de l'electró.

Tot comptat, s'acaba trobant que el moment magnètic electrònic total d'un àtom, $\mathbf{m}$, és proporcional al corresponent moment angular $\mathbf{M}$, diguem $\mathbf{m} = -\gamma \mathbf{M}$, on γ és un factor que depèn de l'àtom, i del seu estat (en forma de factor de Landé, $\gamma = g\gamma_o$). Hi ha una relació semblant per als moments magnètic i angular totals d'un nucli atòmic, $\mathbf{m} = -\gamma \mathbf{M}$ ($\gamma = g\gamma_p$ en forma de factor de

Landé). En la determinació de g hi entren no només els espins dels nucleons, sinó també els moments magnètics corresponents als moviments dels protons. Pel que hem dit abans, el moment magnètic nuclear és considerablement menor que el moment magnètic electrònic.

N6. [pàg. 32] Hem suggerit que no n'hi ha i la realitat és que fins el dia d'avui no se n'ha detectat cap. Tanmateix certes teories quàntiques preveuen que en algun moment de la història de l'Univers se'n van produir.