

MMF 10 / **2. *Electromagnetisme***

3. Dipol elèctric d'una distribució i aplicacions

S. Xambó

- **Força i moment de forces produït per un camp elèctric uniforme sobre una distribució de càrregues.**
- **Dipol elèctric d'una distribució.**

Força i moment de forces produït per un camp elèctric uniforme sobre una distribució de càrregues

Proposició. La força total que un camp elèctric uniforme $\mathbf{E}_0$ exerceix sobre una distribució de càrregues és $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_0$, on Q és la càrrega total de la distribució.

Prova. La força total que un camp $\mathbf{E}_0$ (no necessàriament uniforme) exerceix sobre la distribució de densitat ρ és $\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{E}_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Si $\mathbf{E}_0$ és uniforme, $\mathbf{E}_0$ és independent de $\mathbf{x}$ i per tant

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{E}_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbf{E}_0 \int \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = Q\mathbf{E}_0.$$

Proposició. El moment de forces $\mathbf{M}$ exercit per un camp elèctric uniforme $\mathbf{E}_0$ sobre una distribució de càrregues ve donat per la fórmula

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \wedge \mathbf{E}_0, \text{ on } \mathbf{P} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}.$$

Prova. Per definició de $\mathbf{M}$, i per un camp $\mathbf{E}_0$ arbitrari, tenim

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{x} \wedge (\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x})\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = \int (\rho(\mathbf{x})\mathbf{x}) \wedge \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Si $\mathbf{E}_0$ és uniforme, el podem treure fora del signe integral i ens queda

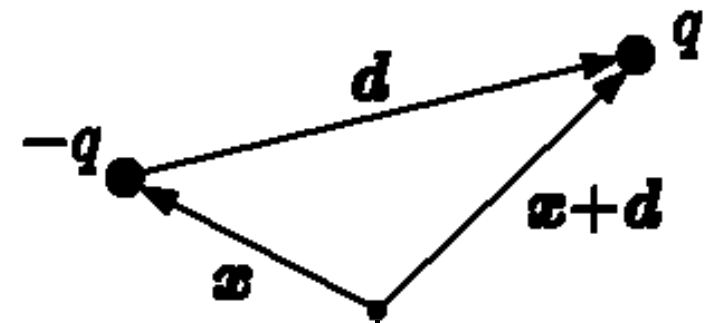
$$\mathbf{M} = \left(\int \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}d\mathbf{x} \right) \wedge \mathbf{E}_0 = \mathbf{P} \wedge \mathbf{E}_0 .$$

Dipol elèctric d'una distribució

El vector $\mathbf{P} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}$ s'anomena **moment elèctric (dipolar)**, o simplement **dipol elèctric**, de la distribució. En el cas de càrregues puntuals $q_1, \dots, q_n$ situades en els punts $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, el dipol elèctric es defineix per la fórmula $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{x}_i$.

Exemple. Un **dipol clàssic** és el dipol elèctric d'una distribució formada per dues càrregues, una negativa i l'altra positiva, del mateix valor absolut q , situades en punts $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x} + \mathbf{d}$, és a dir,

$$\mathbf{P} = -q\mathbf{x} + q(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = q\mathbf{d}.$$



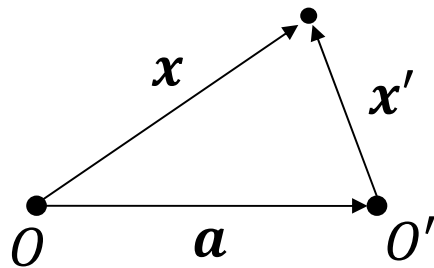
El vector $\mathbf{d}$ és el vector de posició de la càrrega positiva respecte de la negativa i s'anomena vector **desplaçament** del dipol clàssic.

Remarca. El dipol $\mathbf{P}$ depèn de l'origen escollit. Si $\mathbf{a}$ és el vector de posició d'un origen O' respecte de l'origen inicial O , llavors

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + Q\mathbf{a},$$

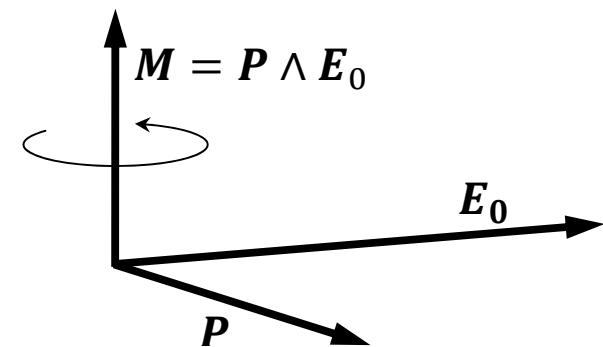
on $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ són els dipols calculats amb origen O i O' , respectivament, i on Q és la càrrega total de la distribució.

En particular tenim que el dipol és independent de l'origen usat per calcular-lo si $Q = 0$ (com per exemple en el cas d'un dipol clàssic).



$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \sum q_i \mathbf{x}_i = \sum q_i (\mathbf{x}'_i + \mathbf{a}) \\ &= \sum q_i \mathbf{x}'_i + \sum q_i \mathbf{a} = \mathbf{P}' + Q\mathbf{a}\end{aligned}$$

Remarca. L'expressió $\mathbf{M} = \mathbf{P} \wedge \mathbf{E}_0$ del moment mostra que l'efecte d'un camp uniforme $\mathbf{E}_0$ sobre una distribució de càrregues és tendir a fer coincidir el dipol $\mathbf{P}$ de la distribució, en direcció i sentit, amb el camp $\mathbf{E}_0$.



Proposició. L'energia potencial d'una distribució de càrregues respecte d'un camp elèctric uniforme $\mathbf{E}_0$ és $V = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$, on $\mathbf{P}$ és el dipol de la distribució. En particular, aquesta energia és mínima si i només si $\mathbf{P}$ coincideix, en direcció i sentit, amb $\mathbf{E}_0$.

Prova. Observem primer que la funció

$$\phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$$

és un potencial del camp uniforme $\mathbf{E}_0$. Per tant, l'energia potencial de la distribució de càrregues relativament a aquest camp és

$$V = \int \rho(\mathbf{x})(-\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} = -\mathbf{E}_0 \cdot \int \rho(\mathbf{x})\mathbf{x} d\mathbf{x} = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{P} .$$

Per acabar, notem que V és mínim si i només si $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{P}$ és màxim, i aquesta condició equival a dir que $\mathbf{P}$ i $\mathbf{E}_0$ tenen la mateixa direcció i sentit.

Remarca. La proposició anterior dóna una altra explicació del fet que el camp $\mathbf{E}_0$ tendeix a alinear el dipol $\mathbf{P}$ de la distribució amb $\mathbf{E}_0$, ja que el potencial V tendeix a ser mínim.

Proposició. Si $Q = Q(K)$ és la càrrega total d'una distribució (K denota una regió que conté la distribució) i $\mathbf{P}$ el seu dipol, llavors

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + O(r^{-3})$$

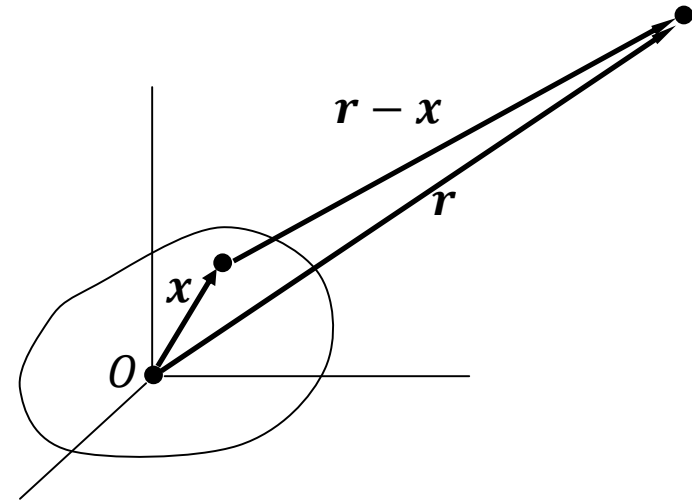
Prova. Per un punt $\mathbf{x} \in K$, podem escriure

$$|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2 = r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} + x^2 = r^2 \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \right).$$

Així, doncs,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}}{r^2} + \dots \right) \quad [*]$$

on els punts suspensius indiquen termes d'ordre ≥ 2 en x/r . Aleshores,



$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \left(\frac{\rho(\mathbf{x})}{r} + \frac{\rho(\mathbf{x})}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{x} + \dots \right) d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} d\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_K \frac{\rho(\mathbf{x})}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \dots \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots
\end{aligned}$$

Remarca. El primer terme de la sèrie de la proposició s'anomena *terme monopolar*, i és zero només si la càrrega total neta és nul·la. Quan $Q \neq 0$, llavors el terme monopolar és el dominant. El segon terme del mateix desenvolupament decreix com r^{-2} i diem que és el *potencial dipolar* corresponent (o associat) a $\mathbf{P}$. Denotant-lo $\phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$, tenim

$$\phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

És el terme dominant quan $Q = 0$, com per exemple en el cas del dipol clàssic:

$$\phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Exercicis E.3 (Dipol elèctric)

E.3.1. Si $\mathbf{E}_P(\mathbf{r})$ el camp elèctric corresponent al potencial $\phi_P(\mathbf{r})$, proveu que

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{P} \right).$$

Solució. $\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = -\partial_r \phi_P(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \partial_r ((\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})r^{-3})$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} r^{-3} \mathbf{P} + \frac{3}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) r^{-5} \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{P} \right). \end{aligned}$$

Hem usat que $\partial r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2} \mathbf{r}$, relació que s'obté fàcilment a partir de

$$r^\alpha = (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}.$$

E.3.2. En el desenvolupament $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}{r^3} + \dots$ hem escrit els termes $t^{(1)} = r^{-1}$, $t^{(2)} = r^{-3}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}) = r^{-2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$, on $\mathbf{n} = r^{-1}\mathbf{r}$. Mostreu que el tercer terme $t^{(3)}$ ve donat per l'expressió $\frac{1}{2r^5}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}_x \mathbf{r})$, on $\mathbf{Q}_x = 3\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{x} - x^2 \text{Id}$. Posant $\mathbf{Q} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{Q}_x d\mathbf{x}$, obtenim

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{r}}{r^5} + \dots$$

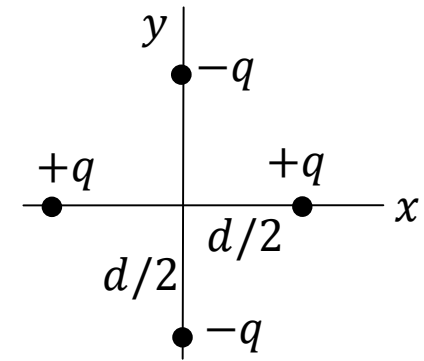
(de l'endomorfisme $\mathbf{Q}$ se'n diu (*tensor del*) *moment elèctric quadrupolar* i de l'expressió $\phi^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{r}}{r^5}$, *potencial quadrupolar* de la distribució). Noteu que $\mathbf{Q}$ és simètric i $\text{Tr}(\mathbf{Q}) = 0$.

Solució. Com que $\left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}{r^2} \right)^2 + \dots$

$$\begin{aligned} t^{(3)} &= \frac{3}{2} r^{-5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})^2 - \frac{1}{2} r^{-5} r^2 x^2 = \frac{1}{2} r^{-5} (3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{x})^2 - r^2 x^2) \\ &= \frac{1}{2} r^{-5} \mathbf{r} \cdot (3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r})\mathbf{x} - x^2 \mathbf{r}) = \frac{1}{2} r^{-5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}_x \mathbf{r}. \end{aligned}$$

E.3.3. D'una distribució com la de la figura se'n diu un *quadrupol*. És immediat comprovar que els termes monopolar i dipolar del potencial d'un quadripol són nuls. Mostreu que els únics termes no nuls de Q són

$$Q_{xx} = -Q_{yy} = \frac{3}{2} q d^2.$$



E.3.4. Una superfície esfèrica de radi R està carregada amb una densitat superficial $\sigma = k \cos \theta$, on θ és l'angle polar i k una constant.

- 1) Calculeu el moment dipolar d'aquesta distribució.
- 2) Trobeu una expressió aproximada per al potencial en els punts allunyats de la superfície.

E.3.5. El núvol electrònic en un dels estats excitats de l'àtom d'hidrogen es pot descriure per una densitat

$$\rho = -\frac{q_e}{64\pi a_0^5} r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \sin^2 \theta ,$$

on $-q_e$ es la càrrega de l'electró i a_0 el radi de Bohr ($5.29 \times 10^{-11} \text{m} \simeq 53 \text{ pm} = 0.53 \text{ Å}$). Calculeu els moments monopolar, dipolar i quadupolar d'aquesta distribució. [cf. Cook, *The theory of the electromagnetic field*, P4-44e]

Solució. Una distribució $\rho = \rho(r, \theta)$ com la de l'enunciat és invariant per rotacions al voltant de l'eix Oz , amb la qual cosa la càrrega total ve donada per l'expressió $2\pi \int_{r=0}^{r=\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \rho(r, \theta) r^2 \sin \theta d\theta dr$. En el cas que ens ocupa, la càrrega total serà

$$-2\pi \frac{q_e}{64\pi a_0^5} \left(\int_{r=0}^{r=\infty} r^4 e^{-\frac{r}{a_0}} dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta d\theta \right).$$

Fent la substitució $\xi = r/a_0$, el valor d'aquesta expressió resulta ser

$$-\frac{q_e}{32} \left(\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} \xi^4 e^{-\xi} d\xi \right) \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta d\theta \right).$$

Posant $I_n = \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi} d\xi$ i integrant per parts obtenim fàcilment que $I_n = nI_{n-1}$, és a dir, $I_n = n! I_0 = n!$. Per tant,

$$\int_0^\infty \xi^4 e^{-\xi} d\xi = I_4 = 24.$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \cos^2 \theta (d \cos \theta) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

La càrrega total és doncs $-\frac{q_e}{32} \cdot 24 \cdot \frac{4}{3} = -q_e$.

Atesa la simetria cilíndrica al voltant de l'eix Oz , el moment dipolar té la forma $\mathbf{P} = (0, 0, P_z)$, on (atès que $z = r \cos \theta$)

$$P_z = 2\pi \int_{r=0}^{r=\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \rho(r, \theta) r^3 \sin \theta \cos \theta d\theta dr.$$

Per tant, la part de la integral corresponent a la variable θ és

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^3 \theta d(\sin \theta) = 0,$$

d'on resulta que $P_z = 0$ (i, per tant, $\mathbf{P} = 0$).

Per estudiar el tensor Q del moment quadrupolar, adonem-nos primer que podem escriure

$$\rho d\omega = k f(r) g(\theta) d\alpha d\theta dr, \text{ amb}$$

$$k = -\frac{q_e}{64\pi a_0^5}, \quad f(r) = r^4 e^{-\frac{r}{a_0}} \quad \text{i} \quad g(\theta) = \sin^3 \theta.$$

Com que la relació entre coordenades cartesianes i esfèriques és

$$x = r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta,$$

resulta que

$$\rho x y d\omega = k (r^2 f(r)) (g(\theta) \sin^2 \theta) (\sin \alpha \cos \alpha) d\alpha d\theta dr.$$

Com que $\int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = 0$, veiem que

$$Q_{xy} = \int \rho x y d\omega = 0.$$

D'una manera similar es veu que $Q_{xz} = Q_{yz} = 0$. Per tant Q és diagonal.

Ara el càlcul dels valors de la diagonal queda simplificat pel fet que

$$Q_{xx} = Q_{yy} \text{ (per raons de simetria) i que, en ser } \text{Tr}(Q) = 0,$$

$$Q_{zz} = -(Q_{xx} + Q_{yy}) = -2Q_{xx} = -2Q_{yy} .$$

Això mostra que és suficient calcular

$$Q_{zz} = \int \rho (2z^2 - x^2 - y^2) d\omega .$$

Amb la substitució

$$2z^2 - x^2 - y^2 = 2r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2(3 \cos^2 \theta - 1),$$

resulta que

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= k \int r^2 f(r) g(\theta) (3 \cos^2 \theta - 1) d\alpha d\theta dr \\ &= 2\pi k \left(\int_0^\infty r^2 f(r) dr \right) \left(\int_0^\pi g(\theta) (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta \right) \\ &= 2\pi k a_0^7 \cdot 720 \cdot (-8/15) = 12q_e a_0^2 . \end{aligned}$$

En resum,

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = 6q_e a_0^2$$

i el potencial de la distribució té la forma $\phi = -\kappa \frac{q_e}{r} + \frac{1}{2} \kappa \lambda \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} + \dots$