

MMF 10 / 2. *Electromagnetisme*

2. Potencial elèctric

S. Xambó

- Definició del potencial elèctric. Equació de Poisson i equació de Laplace.
- Interpretació del potencial
- Energia potencial d'una distribució discreta
- Solucions de l'equació de Poisson
- Potencial creat per conductors carregats. Capacitat d'un conductor.
- Mètode de les imatges

Sigui

$$E_{q,a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

el camp creat per una càrrega puntual q situada a $\mathbf{a}$. Llavors

$$\phi_{q,a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}$$

és un potencial per a $E_{q,a}$:

$$-\partial_{\mathbf{r}} \phi_{q,a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = E_{q,a}.^{\text{N1}}$$

Pel principi de superposició,

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \phi_{q_i, \mathbf{a}_i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}_i|}$$

és un potencial per al camp creat per les càrregues puntuals q_i situades en els punts $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, n$). En el cas d'una distribució contínua, cal

substituir la suma per una integral. Per exemple, en el cas d'una distribució volumètrica, el potencial és

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\mathbf{x}.$$



Poisson 1781-1840

Corol·lari (Primera equació fonamental de l'electrostàtica)
 $\text{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$.

Corol·lari (Equació de Poisson). $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Corol·lari (Equació de Laplace = equació de Poisson quan $\rho = 0$): $\Delta\phi = 0$.



Laplace 1749-1827

Corol·lari (Interpretació del potencial)

Per a tot camí γ amb extrems $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$,

$$\tau_\gamma(\mathbf{E}) = \int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_\gamma \partial\phi \cdot d\mathbf{l} = - \int_\gamma d\phi = \phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2).$$

Per a qualsevol camí γ d'extrems $\mathbf{r}$ i ∞ ,

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi(\mathbf{r}).$$

És a dir, el potencial $\phi(\mathbf{r})$ és el treball que fa el camp elèctric per moure una càrrega unitat des de $\mathbf{r}$ fins a l'infinit.

Expressió de ρ en termes de $\mathbf{E}$ i ϕ , de $\mathbf{E}$ en termes de ρ i ϕ , i de ϕ en termes de ρ i $\mathbf{E}$.

	ρ	$\mathbf{E}$	ϕ
ρ	—	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{ \mathbf{r}-\mathbf{x} ^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x})$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})}{ \mathbf{r}-\mathbf{x} } d\mathbf{x}$
$\mathbf{E}$	$\epsilon_0 \text{div}(\mathbf{E})$	—	$\int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
ϕ	$-\epsilon_0 \Delta\phi$	$-\partial\phi$	—

Remarca. La unitat SI per al potencial és el volt (V). L'equació $\mathbf{E} = -\partial\phi$ implica que V/m és la unitat de camp elèctric, d'on $\text{V/m} = \text{N/C}$, o bé $\text{V} = \text{Nm/C}$.

Corol·lari. L'energia potencial W del sistema de càrregues puntuals q_i situades en punts $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$) ve donada per l'expressió

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Alternativament, $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i$, on ϕ_i és el potencial creat per totes les càrregues llevat q_i .

Prova. Per inducció respecte de n . Per $n = 1$, els dos membres són 0. Suposant $n > 1$ i que l'afirmació és vàlida per a $n - 1$, tenim l'energia potencial de les càrregues $q_1, \dots, q_{n-1}$ és $W' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j < n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$. Per altra banda, el potencial en el punt $\mathbf{r}_n$ del camp creat per $q_1, \dots, q_{n-1}$ és $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < n} \frac{q_i}{r_{in}}$, i l'energia que cal aportar per dur q_n des de l'infinit fins a $\mathbf{r}_n$ és $W'' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < n} \frac{q_i q_n}{r_{in}}$. Ara basta observar que l'energia potencial de la distribució final és $W = W' + W''$ i que $W' + W'' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$.

Remarca. En el cas d'una distribució contínua, $W = \frac{1}{2} \int \rho \phi d\mathbf{x}$. Usant que $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}(\mathbf{E})$,

$$\rho \phi = \varepsilon_0 \operatorname{div}(\mathbf{E}) \phi = \varepsilon_0 \operatorname{div}(\phi \mathbf{E}) - \varepsilon_0 (\partial \phi) \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \operatorname{div}(\phi \mathbf{E}) + \varepsilon_0 E^2,$$

d'on resulta, tenint en compte que $\phi \mathbf{E} = O(r^{-3})$, que

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 d\mathbf{x}.$$

Remarca. L'equació de Poisson ens mostra que $\int_W \Delta \phi d\mathbf{r} = -\frac{Q(W)}{\varepsilon_0}$. En el cas del potencial d'una càrrega puntual q situada en un punt $\mathbf{a}$, sabem $\Delta \phi$ no està definida a $\mathbf{a}$ i que $\Delta \phi = \operatorname{div}(\partial \phi) = -\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0$ en tots els punts $\mathbf{r} \neq \mathbf{a}$. Tanmateix, si volguéssim que l'equació $\int_W \Delta \phi d\mathbf{r} = -\frac{Q(W)}{\varepsilon_0}$ fos certa per aquest cas, tindríem que

$$\int_W \Delta \phi d\mathbf{r} = \begin{cases} -\frac{q}{\varepsilon_0} & \text{si } \mathbf{a} \in W \\ 0 & \text{si } \mathbf{a} \notin W \end{cases}$$

Aquestes relacions mostren que $\Delta\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, on δ és la “funció” de Dirac (*delta de Dirac*), és a dir, $\Delta_r \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, o bé

$$\Delta_r \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}).^{\text{N2}}$$

Des del punt de vista matemàtic, δ no és una funció en el sentit usual del terme, sinó una “distribució”,^{N3} i operacionalment queda caracteritzada per la relació

$$\int_W \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\mathbf{r} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{a} \in W \\ 0 & \text{si } \mathbf{a} \notin W \end{cases}$$

o, més generalment,

$$\int_W f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\mathbf{r} = \begin{cases} f(\mathbf{a}) & \text{si } \mathbf{a} \in W \\ 0 & \text{si } \mathbf{a} \notin W \end{cases}$$

Solucions de l'equació de Poisson

Teorema. L'equació de Poisson admet la solució

$$\phi_{\text{Poisson}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\mathbf{x}.$$

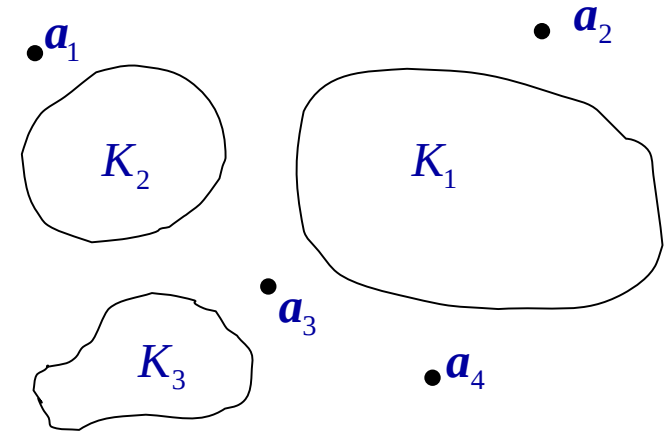
$$\begin{aligned} \textbf{Prova}^*. \Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\mathbf{x} \right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}) (-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})) d\mathbf{x} = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

(L'asterisc indica que usem la fórmula $\Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$).

Solució de l'equació de Poisson. La solució general de l'equació de Poisson és la suma de $\phi_{\text{Poisson}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\mathbf{x}$ i una solució arbitrària de l'equació de Laplace.

Condicions suficients per a la unicitat de la solució de l'equació de Laplace.

Considerem un obert U que és el complementari de regions regulars $K_1, \dots, K_n$, dues a dues disjunts, i d'un conjunt finit de punts $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ exteriors als K_i i en els quals suposarem que tenim càrregues



puntuals $q_1, \dots, q_r$. Ens interessen les solucions ϕ de l'equació de Laplace diferenciables sobre U , contínues sobre $U \cup S_1 \cup \dots \cup S_n$, on $S_i = \partial K_i$, i que compleixen les *condicions de contorn* següents:

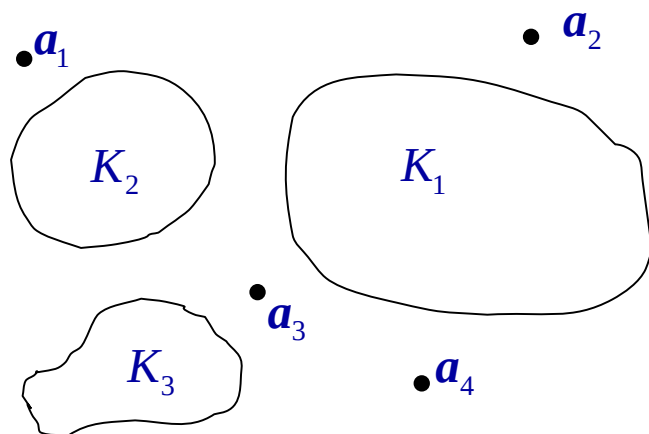
1. $\varphi_i = \phi|_{S_i}$ són funcions contínues donades, $i = 1, \dots, n$.
2. En l'entorn de cada $\mathbf{a}_j$, $\phi - \phi_{q_j, \mathbf{a}_j}$ és una funció diferenciable en el punt $\mathbf{a}_j$.
3. $\phi(\mathbf{r}) \cdot (\partial\phi)(\mathbf{r})$ és $O(r^{-3})$ per $r \gg 0$.

Aleshores:

Teorema (Unicitat de les solucions de l'equació de Laplace). *Per a funcions ϕ que satisfan les condicions de contorn 1, 2 i 3, l'equació de Laplace $\Delta\phi = 0$ sobre U té com a molt una solució.*

Conjunts que apareixen en la prova

U	Obert complementari dels K_i i a_j
U'	Obert complementari dels K_i ($= U \cup \{a_1, \dots, a_r\}$)
$\bar{U}$	$U' \cup S_1 \cup \dots \cup S_n$
B_0	Bola que conté els K_i i els a_j
$\bar{U}_0$	Resulta d'extreure de B_0 els interiors dels K_i
S_0	∂B_0 ; notem que $\partial \bar{U}_0 = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n$



Prova. Veurem que si ϕ' i ϕ'' són solucions de l'equació de Laplace sobre U , amb les mateixes condicions de contorn, llavors $\phi' = \phi''$. Per demostrar-ho, veurem que $\phi = \phi' - \phi''$ és nul·la sobre U . Ens basarem en el fet que ϕ és

una solució de l'equació de Laplace sobre l'obert U' complementari de les regions K_i (ja que ϕ és diferenciable en els punts $\mathbf{a}_i$) i que s'anul·la sobre cada una de les superfícies $S_i = \partial K_i$.

Per veure que $\phi = 0$, aplicarem el teorema de la divergència al camp vectorial $\phi \partial \phi$ sobre la regió $\bar{U}_0$ obtinguda extraient els interiors dels K_i d'una bola tancada B_0 que conté les regions K_i i els punts $\mathbf{a}_j$. Si $S_0 = \partial B_0$,

$$\int_{\bar{U}_0} \operatorname{div}(\phi \partial \phi) = \int_{\partial \bar{U}_0} \phi \partial \phi \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_0} \phi \partial \phi \cdot d\mathbf{s}$$

ja que ϕ s'anul·la sobre les superfícies $S_1, \dots, S_n$. Tenint en compte que la darrera expressió és $O(r^{-1})$ per $r \gg 0$ (per la hipòtesi 3 de les condicions de contorn), obtenim que la darrera integral tendeix a 0 quan el radi de S_0 tendeix a infinit i, per tant, que

$$\int_{\bar{U}} \operatorname{div}(\phi \partial \phi) = 0,$$

on $\bar{U}$ és el complementari dels interiors dels K_i . Però

$$\operatorname{div}(\phi \partial \phi) = \phi \Delta \phi + (\partial \phi)^2$$

i $\Delta \phi = 0$ sobre $\bar{U}$, d'on resulta que

$$\int_{\bar{U}} \operatorname{div}(\phi \partial \phi) = \int_{\bar{U}} (\partial \phi)^2.$$

Com que l'integrand és no negatiu i la integral és nul·la, veiem que $\partial \phi = 0$. Per tant, ϕ és constant. Però aquesta constant ha de ser 0, ja que ϕ és 0 sobre les superfícies S_i .

Remarca. Si en lloc de la condició de contorn (1), $\phi|_{S_i} = \varphi_i$ (pàg. 9), usem

$$(1') \quad \partial \phi|_{S_i} = \mathbf{u}_i,$$

on $\mathbf{u}_i$ és un camp vectorial definit sobre S_i , la prova anterior es pot adaptar per mostrar que l'equació de Laplace té com a molt una solució, llevat de constants additives.

Exemple (Potencial creat per conductors carregats). Suposem que K_i ($i = 1, \dots, n$) són cossos conductors carregats i que $q_1, \dots, q_r$ són càrregues situades en punts $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ exteriors als K_i ($r \geq 0$). Suposem que K_i té una càrrega neta total Q_i . Aquestes càrregues es distribueixen a la superfície dels conductors i, junt amb les q_j , creen un camp elèctric a l'exterior dels conductors (a l'interior, en canvi, el camp és nul). Aquest camp elèctric té un potencial ϕ que satisfà l'equació de Laplace fora dels conductors (i dels punts $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$). Posem $\varphi_i = \phi|_{\partial K_i}$, de manera que φ_i és el potencial del conductor K_i (una constant). L'objecte d'aquest exemple és veure que la transformació $(Q_1, \dots, Q_n) \mapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ és lineal. En particular resulta que si les càrregues $Q_1, \dots, Q_n$ són nul·les, aleshores els potencials $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ també són nuls.

En efecte, si posem $\phi^{(i)}$ per denotar el potencial corresponent a una unitat de càrrega sobre K_i i càrrega nul·la sobre els demás conductors, demostrarem que

$$\phi = Q_1 \phi^{(1)} + \dots + Q_n \phi^{(n)},$$

i d'aquí resulta l'enunciat, ja que restringint a ∂K_i obtenim

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_{ij},$$

on $\varphi_{ij} = \phi^{(i)}|_{\partial K_j}$.

Per veure la igualtat en qüestió, posem $\psi = Q_1 \phi^{(1)} + \dots + Q_n \phi^{(n)}$. Com que les $\phi^{(i)}$ satisfan l'equació de Laplace fora dels conductors (i dels punts $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$), ψ també la satisfà. El camp elèctric que defineix ψ és $-\partial\psi = \sum_i Q_i \mathbf{E}_i$, on $\mathbf{E}_i$ és el camp elèctric definit per $\phi^{(i)}$. Si restringim aquest camp a ∂K_j , i recordem la relació entre el camp elèctric a la superfície d'un conductor i la densitat superficial de càrrega, obtenim la relació

$$\sigma_j = \sum_i Q_i \sigma_{ij},$$

on σ_j i σ_{ij} són les densitats superficials sobre K_j degudes als potencials ψ i $\phi^{(i)}$. Integrant sobre ∂K_j obtenim, si Q'_j és la càrrega total sobre K_j deguda al potencial ψ ,

$$Q'_j = \sum_i Q_i \delta_{ij} = Q_j,$$

ja que per construcció la càrrega total de σ_{ij} és 0 si $i \neq j$ i 1 si $i = j$, i d'això resulta que $\psi = \phi$.

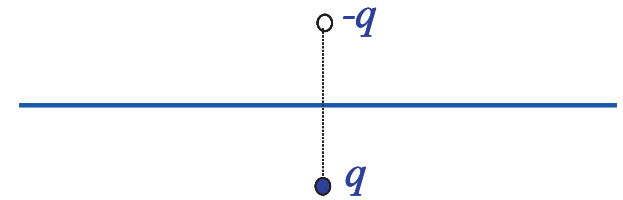
Remarca (Capacitat d'un conductor). L'exemple anterior mostra que el potencial φ d'un conductor isolat carregat amb una càrrega Q compleix $Q = C\varphi$, on C és una constant que només depèn del conductor. La constant C s'anomena *capacitat* del conductor.

Exemple. Làmina plana conductora infinita, a potencial 0 (connectada a terra) i una càrrega q situada a una certa distància de la làmina. La presència de q origina una distribució de càrregues a la làmina (aquest fenomen s'anomena *inducció*)



electrostàtica) i el problema és obtenir el potencial ϕ del camp creat per aquesta distribució i q en el semiespai definit per la làmina i q .

Les condicions de contorn d'aquest problema són la presència de la càrrega q , diguem en el punt $\mathbf{a}$, i que el potencial a la superfície de la làmina és nul. El que volem és trobar una funció amb les mateixes condicions de contorn i que satisfaci l'equació de Laplace. A tal fi, considerem el potencial ϕ' de la càrrega q i el potencial ϕ'' d'una càrrega imaginària $-q$ situada en el punt $\mathbf{a}'$ simètric de $\mathbf{a}$ respecte del pla de la làmina. Llavors $\phi = \phi' + \phi''$ satisfà l'equació de Laplace (fora dels punts $\mathbf{a}$ i $\mathbf{a}'$). És a més clar, per la manera com s'ha definit ϕ , que sobre el pla de la làmina val 0. Com que ϕ'' és diferenciable en el semiespai de q , resulta que ϕ és la solució del problema. Notem, però, que ϕ no dona el potencial en l'altre semiespai, el semiespai de la càrrega imatge $-q$, ja que aquest potencial és diferenciable i en canvi ϕ no està definida en el punt $\mathbf{a}'$.



Remarca. També és interessant trobar la distribució de càrregues sobre la làmina. En efecte, si restringim el camp elèctric $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ a la làmina, obtenim el vector $\frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{n}$, on σ és la densitat de càrregues i $\mathbf{n}$ és el vector normal unitari a la làmina dirigit cap el semiespai de q . Si prenem coordenades de manera que la làmina sigui el pla yz i a el punt $(a, 0, 0)$, llavors resulta que $\sigma = \sigma(y, z)$ ve donada per la fórmula

$$\sigma(y, z) = -\frac{qa}{2\pi(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

En coordenades polars del pla yz , $\sigma = \sigma(r)$, $\sigma(r) = -\frac{qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}$. ^{N4}

Integrant, es pot veure que la càrrega total de la distribució $\sigma(y, z)$ és $-q$.

Mètode de les imatges

El mètode que hem seguit a l'exemple anterior per trobar el potencial creat per una càrrega prop d'una làmina conductora infinita, i la corres-

ponent distribució de càrregues sobre la làmina, és un cas particular de l'anomenat *méthode de les imatges*. El que hem fet és substituir el camp creat per la distribució sobre la làmina, que en principi és desconeguda, pel camp creat per una càrrega $-q$ (càrrega anomenada *imatge*) situada en el punt $\mathbf{a}'$. En general, el mètode s'aplica a potencials de la forma

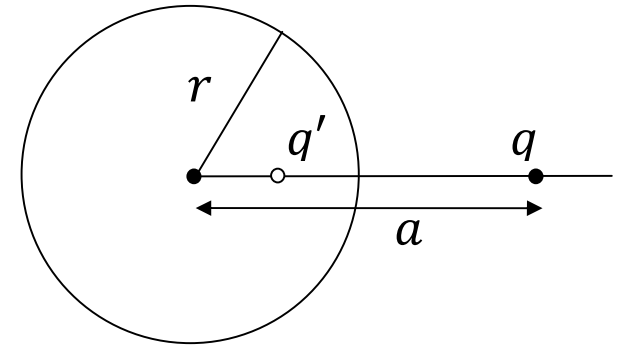
$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} d\mathbf{x}$$

on ϕ_1 és una funció coneguda i on la integral és la contribució de la càrrega superficial (en principi desconeguda) sobre tots els conductors que apareguin al problema. Pot succeir, i aquesta és l'essència del mètode, que l'últim terme d'aquesta equació pugui ser substituït per un potencial ϕ_2 degut a una distribució de càrregues especificada, generalment càrregues puntuals o lineals. Les càrregues imaginàries que produeixen ϕ_2 s'anomenen *càrregues imatge*. Tal com passa a l'exercici **E.2.1**, aquestes càrregues poden trobar-se a l'interior dels conductors.

Exercicis E.2 (Potencial elèctric)

E.2.1. Considereu una esfera conductora de radi r que es manté a potencial $\phi = 0$ i una càrrega q situada a una distància $a > r$ del seu centre.

1. Demostreu que el potencial fora de l'esfera és igual al potencial de q més el potencial d'una càrrega imatge de valor $q' = -qr/a$ situada sobre el segment que uneix el centre amb el punt en el que està situada q a una distància $b = r^2/a$.



2. Quina és la força que l'esfera exerceix sobre q ?

3. Calculeu la densitat de càrrega superficial induïda sobre l'esfera per la presència de q .

4. Què canvia si l'esfera conductora es manté a un potencial ϕ no necessàriament nul?

E.2.2. Sabem que el camp elèctric creat per un fil rectilini infinit carregat amb una densitat lineal constant λ és, a una distància r del fil,

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}.$$

Mostreu que el potencial ϕ d'aquest camp, a una distància r de fil, té la forma

$$\phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C,$$

on C és una constant arbitrària.

E.2.3. Una distribució esfèrica de càrrega ve donada per una densitat

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

on $r = |\mathbf{r}|$. Calculeu el camp elèctric i el potencial a l'exterior i a l'interior de la distribució de càrrega i la seva càrrega total Q .

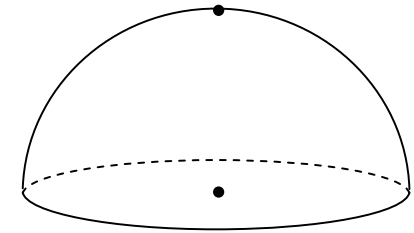
E.2.4. Només un dels camps vectorials següents pot ser el camp electrostàtic creat per una distribució de càrrega. Determineu quin és i calculeu-ne el potencial corresponent (comproveu el resultat calculant el gradient):

(a) $\mathbf{E} = k[(xy)\mathbf{i} + (2yz)\mathbf{j} + (3xz)\mathbf{k}]$

(b) $\mathbf{E} = k[(y^2)\mathbf{i} + (2xy + z^2)\mathbf{j} + (2yz)\mathbf{k}]$

(k una constant). Quina és la distribució de càrrega que crea aquest camp?

E.2.5. L'hemisferi nord d'una esfera està carregat uniformement amb una densitat superficial σ . Calculeu la diferència de potencial entre el pol nord i el centre de l'esfera.



E.2.6 (Teorema de reciprocitat de Green). Siguin $\rho_1(\mathbf{r})$ i $\rho_2(\mathbf{r})$ dues distribucions de càrrega qualssevol. Siguin $V_1(\mathbf{r})$ i $V_2(\mathbf{r})$ els corresponents potencials (s'entén que no totes dues distribucions de càrrega són presents al mateix temps, sinó que corresponen a dues situacions possibles diferents). Proveu que

$$\int \rho_1(\mathbf{r})V_2(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \rho_2(\mathbf{r})V_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}.$$

[Indicació: calculeu $\int (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)d\mathbf{r}$ de dues maneres diferents, una expressant $\mathbf{E}_1$ en termes del corresponent potencial i usant integració per parts, i l'altra fent el mateix però amb $\mathbf{E}_2$]

E.2.7. Considereu dos objectes conductors qualssevol C_1 i C_2 (per exemple, dues esferes metàl·liques separades una certa distància). Sigui V_{12} el potencial de C_2 quan C_1 té una càrrega neta Q i C_2 està descarregat, i sigui V_{21} el potencial de C_1 quan C_2 té una càrrega neta Q i C_1 està descarregat. Proveu, usant el teorema de reciprocitat de Green, que $V_{12} = V_{21}$.^{N6}

E.2.8. Considereu una esfera conductora de radi R a potencial V i amb una càrrega neta Q . Calculeu la densitat superficial de càrrega i la relació entre Q i V .

E.2.9. Considereu el mateix problema de l'esfera conductora i la càrrega puntual q anterior però suposant que l'esfera es manté amb càrrega constant $Q = 0$ enlloc de mantenir-se a potencial constant (esfera neutra aïllada). Determineu quin és el potencial de l'esfera en aquestes condicions.

Notes

N1. $\partial_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} = \left(\partial_{r_1} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}, \partial_{r_2} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}, \partial_{r_3} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} \right),$ i

$$\begin{aligned} \partial_{r_i} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|} &= \partial_{r_i} ((r_1 - x_1)^2 + (r_2 - x_2)^2 + (r_3 - x_3)^2)^{-1/2} \\ &= (-1/2) \cdot 2(r_i - x_i) \cdot ((r_1 - x_1)^2 + (r_2 - x_2)^2 + (r_3 - x_3)^2)^{-3/2} \\ &= -(r_i - x_i) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^3}. \end{aligned}$$

N2. Notem que la relació $\Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ és purament matemàtica, tot i que aquí s'ha “derivat” en el context del potencial elèctric.

N3. Les “distribucions” en el sentit de l'anàlisi funcional són funcionals lineals sobre certs espais de funcions. En el cas de $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, el funcional és $f \mapsto f(\mathbf{a})$, en concordança amb el sentit de l'expressió $\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})d\mathbf{r}$.

N4. [Pàg. 17] La distribució $\sigma(r) = -\frac{qa}{2\pi(a^2+r^2)^{3/2}}$ del pla yz ha de crear el camp $-E_{q,a}$ en la regió $x < 0$, ja que el potencial en aquesta regió és nul ($\phi = 0$ satisfà l'equació de Laplace i $\phi|_{\{x=0\}} = 0$). Tanmateix, això no és fàcil d'establir en general, ja que la integral per obtenir el camp creat per la distribució σ en un punt arbitrari no sembla fàcil de resoldre. La comprovació és més manejable per als punts de l'eix $-Ox$, ja que el valor d'aquest camp en el punt $(-x, 0, 0)$ és, usant la fórmula establerta a la Remarca de la pàg. 17,

$$-\frac{aqx}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty r(r^2 + x^2)^{-3/2}(r^2 + a^2)^{-3/2} dr = \frac{aqx}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2ax+x^2+a^2}{xa(a^2-x^2)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a+x)^2}$$

Hem usat que

$$\int r(r^2 + a^2)^{-3/2}(r^2 + b^2)^{-3/2} dr = -\frac{1}{(b^2-a^2)^2} \frac{2r^2+a^2+b^2}{(r^2+a^2)^{-1/2}(r^2+b^2)^{-1/2}}.$$

N5. [Pàg. 19] $q' = -qR/a$ està situada a $b = R^2/a$.

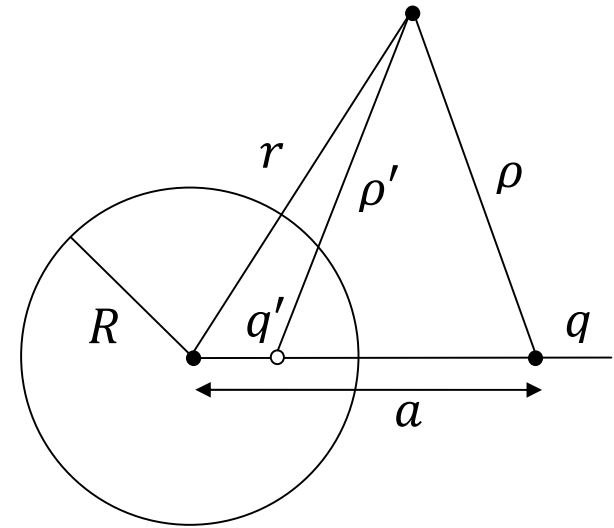
$$\phi_q = \kappa q/\rho, \phi_q = \kappa q'/\rho'.$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi}$$

$$\rho' = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi}$$

$$= \sqrt{r^2 + R^4/a^2 - 2\left(\frac{rR^2}{a}\right) \cos \varphi}$$

$$= \frac{R}{a} \sqrt{\left(\frac{ra}{R}\right)^2 + R^2 - 2rR^2/a \cos \varphi}$$



N6. [E.2.7, pàg. 22: Considereu dos objectes conductors qualssevol C_1 i C_2 . Sigui V_{12} el potencial de C_2 quan C_1 té una càrrega neta Q i C_2 està descarregat, i sigui V_{21} el potencial de C_1 quan C_2 té una càrrega neta Q i C_1 està descarregat. Proveu, usant el teorema de reciprocitat de Green, que $V_{12} = V_{21}$.]

La densitat ρ_1 corresponent al cas en què C_1 té càrrega Q i C_2 càrrega 0 es redueix a distribucions superficials de càrregues sobre C_1 i C_2 , diguem-ne σ_{11} i σ_{12} , respectivament. Per tant, la integral $\int \rho_1(\mathbf{r})V_2(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ s'ha d'interpretar com $\int_{\partial C_1} \sigma_{11}V_{21}ds_1 + \int_{\partial C_2} \sigma_{12}V_{22}ds_2$, on hem posat V_{21} i V_{22} per denotar la restricció de V_2 (la funció potencial quan C_2 té càrrega Q i C_1 està descarregat) a ∂C_1 i a ∂C_2 , respectivament. Però V_{21} i V_{22} són constants, de manera que el valor de $\int \rho_1(\mathbf{r})V_2(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ és

$$V_{21} \int_{\partial C_1} \sigma_{11}ds_1 + V_{22} \int_{\partial C_2} \sigma_{12}ds_1 = V_{21}Q.$$

D'una manera similar es veu que el valor de $\int \rho_2(\mathbf{r})V_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ és $V_{12}Q$. Finalment, el teorema de reciprocitat de Green (E.2.6) ens permet concloure que $V_{21}Q = V_{12}Q$, és a dir, que $V_{21} = V_{12}$.