

MMF 10 / **2. *Electromagnetisme***

S. Xambó

1. Camp elèctric
2. Potencial elèctric
3. Dipol elèctric (i multipols)
4. Força magnètica
5. Camp magnètic produït per un corrent. Llei d'Ampère.
6. Potencial magnètic
7. Corrent de desplaçament
8. Inducció electromagnètica. Llei de Faraday.
9. Equacions de Maxwell
10. Ones electromagnètiques
11. Potencials electromagnètics
12. Energia del camp electromagnètic

MMF 10 / 2. *Electromagnetisme*

1. Camp elèctric

S. Xambó

- Càrrega elèctrica
- Distribucions de càrrega
- Principi de conservació de la càrrega
- Llei de Coulomb
- Principi de superposició
- Camp elèctric
- Llei de Gauss

Càrrega elèctrica

$$e = 1.60217653 \times 10^{-19} \text{ C}$$

(*càrrega elemental* = càrrega d'un protó).

$$1 \text{ C} = 6.24150948 \times 10^{18} e \text{ (coulomb, unitat SI de càrrega)}$$

Quantificació de la càrrega

Tota càrrega és un múltiple *enter* de e . Un nucli atòmic amb N protons té càrrega Ne . La capa electrònica d'un àtom amb N' electrons té càrrega $-N'e$, i la càrrega total d'aquest àtom és $(N - N')e$. Usualment, els àtoms són *neutres* ($N = N'$). Quan $N' \neq N$, es diu que l'àtom és in *ió* (*positiu*, o *catió*, si $N' < N$; *negatiu*, o *anió*, si $N' > N$).

Distribucions de càrrega

- discretes: càrregues puntuals q_i situades en punts $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$).
La denotarem $\{q_i, \mathbf{r}_i\}$ ($i = 1, \dots, n$).
- contínues

volumètriques: $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}, Q(W) = \int_W \rho(\mathbf{x}) d\omega$

($W \subseteq V$, $Q(W)$ càrrega continguda a W)

superficials: $\sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, Q(S) = \int_S \sigma ds$

(Σ superfície, $S \subseteq \Sigma$)

lineals: $\lambda: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, Q(C) = \int_C \lambda dl$

(Γ corba, $C \subseteq \Gamma$).

Principi de conservació de la càrrega

En un sistema isolat, la suma algebraica de les càrregues elementals és constant.

Principi de continuïtat. Si ρ és una distribució continua de matèria o de càrrega, i W és una regió regular (és a dir, amb vora ∂W llisa), llavors

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho d\omega = \int_W (\partial_t \rho) d\omega$$

és l'increment instantani de matèria o càrrega dins la regió W . Com que

$$-\phi_{\partial W}(\rho \mathbf{v}) = - \int_{\partial W} (\rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_W \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\omega$$

és la quantitat de matèria o càrrega que entre a W , el principi de conservació de la matèria o de la càrrega exigeix que

$$\int_W (\partial_t \rho) d\omega = - \int_W \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\omega$$

Essent W arbitrària, aquesta relació equival a l'equació

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

En el cas de càrregues elèctriques, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ s'anomena *corrent* (o *densitat de corrent*), de manera que ens queda

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0.$$

En particular tenim que

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0 \Leftrightarrow \partial_t \rho = 0$$

(condició de *distribució estacionària*, és a dir, que el valor de ρ en cada punt no depèn del temps).

Llei de Coulomb

La força sobre una càrrega puntual q situada en el punt $\mathbf{r}$ exercida per una càrrega puntual q' situada en el punt $\mathbf{x}'$ ve donada per l'expressió

$$\mathbf{F} = \kappa \frac{qq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|^2} \mathbf{u} = \kappa \frac{qq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x}'),$$

κ constant.

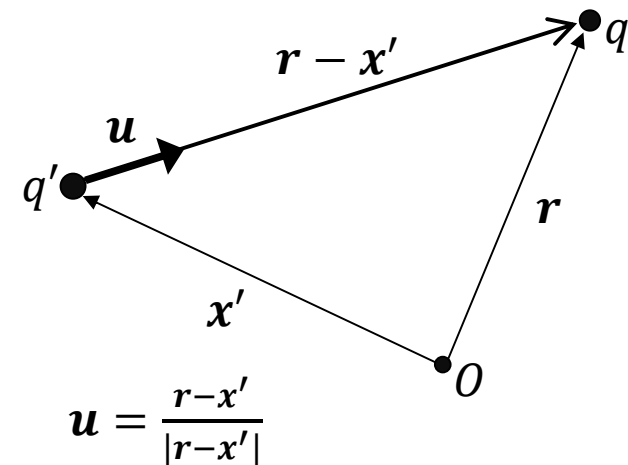
En el sistema SI,

$$\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12} \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$$

(*constant elèctrica*, o *permitivitat del buit*)

Remarca. Amb les convencions actuals del SI, aquest valor és exacte. Fixem-nos que $\kappa \simeq 8.98755 \times 10^9$, aproximadament 9×10^9 .



Remarca. La força elèctrica és molts ordres de magnitud més gran que la força gravitatòria. Per exemple, el quocient entre els mòduls de la força gravitatòria i la força elèctrica entre dos electrons (protons) és

$$4\pi\epsilon_0 G m_e^2 / e^2 = 2.4 \times 10^{-43} \quad (4\pi\epsilon_0 G m_p^2 / e^2 = 8.1 \times 10^{-37}).$$

El quocient entre els mòduls de la força gravitatòria i de la força elèctrica entre dues masses d'un kg carregades cadascuna amb un C és

$$\kappa/G \simeq 7.4257 \times 10^{-21}.$$

Això implica, per exemple, que la força d'atracció gravitatòria entre la Terra i la Lluna quedaria compensada carregant aquests cossos amb 1C per a cada 11.6 milions de tones mètriques.

Principi de superposició

La força sobre una càrrega puntual q situada en el punt $\mathbf{r}$ exercida per una distribució discreta de càrregues $\{q_i, \mathbf{x}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, ve donada per l'expressió

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_i)$$

En el cas d'una distribució volumètrica,

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}) d\omega}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x})$$

(i fórmules anàlogues per a distribucions superficials o lineals).

Camp elèctric

D'una càrrega puntual q' situada a $\mathbf{x}'$:

$$\mathbf{E}_{q,\mathbf{x}'}(\mathbf{r}) = \kappa \frac{q'}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x}')$$

De la distribució discreta $\Delta = \{q_i, \mathbf{x}_i\}$ ($i = 1, \dots, n$):

$$\mathbf{E}_{\Delta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_i)$$

D'una distribució volumètrica de densitat ρ :

$$\mathbf{E}_{\rho}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})d\omega}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{x})$$

(i fórmules anàlogues per a distribucions superficials o lineals).

En tots els casos,

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E}}$$

Proposició. $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0$ en tot punt on $\rho(\mathbf{x}) = 0$.

Prova. Pel principi de superposició, és suficient considerar el cas del camp creat per una càrrega puntual q situada a l'origen. En aquest cas, $r^2 E = \kappa q$ és una constant, i el resultat és una conseqüència immediata del fet que $\operatorname{div}(\mathbf{E})$ en un punt $\mathbf{r}$ és $r^{-2} \partial_r(r^2 E)$.

Remarca. Es pot arribar al resultat amb un càlcul directe. En coordenades cartesianes, i posant q a l'origen,

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = \kappa q \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Per tant $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$. Però tenim

$$\begin{aligned} \partial_x E_x &= \kappa q \left((x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - \frac{3}{2} 2x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \right) \\ &= \kappa q (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} ((x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2), \end{aligned}$$

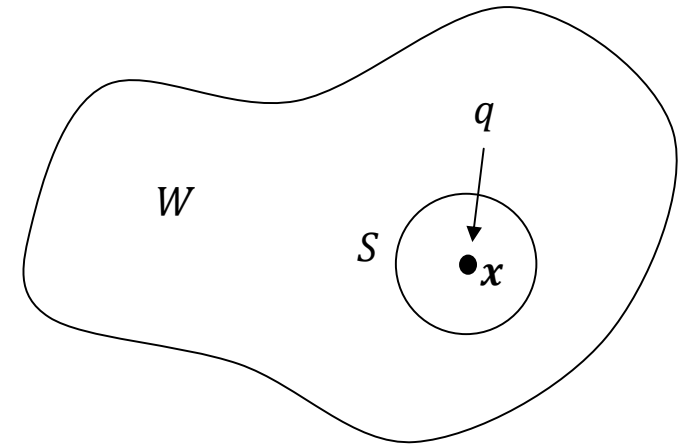
i expressions anàlogues per a $\partial_y E_y$ i $\partial_z E_z$, d'on la conclusió s'obté immediatament.

Teorema (Llei de Gauss). Per a tota regió regular W ,

$$\phi_{\partial W}(\mathbf{E}) = Q(W)/\varepsilon_0 ,$$

on $Q(W)$ és la càrrega continguda a la regió W .

Prova. Considerem primer el cas del camp $\mathbf{E}$ creat per una càrrega puntual q situada en un punt x i en el qual W és l'esfera S de centre x i radi r . Per la llei de Coulomb, $\mathbf{E}$ té la mateixa direcció i sentit que el vector normal unitari exterior de S , i el seu mòdul és $E = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Per tant, el flux de $\mathbf{E}$ a través de S és igual al producte de E per l'àrea de l'esfera, és a dir, $\phi_S(\mathbf{E}) = 4\pi r^2 E = q/\varepsilon_0$.



Suposem ara que W és una regió que conté la càrrega q i sigui S una petita esfera amb centre el punt x continguda a W . Si considerem la

regió W' obtinguda traient l'interior de S de W , d'on $\partial W' = \partial W - S$, d'una banda tenim

$$\phi_{\partial W'}(\mathbf{E}) = \phi_{\partial W}(\mathbf{E}) - \phi_S(\mathbf{E}),$$

i de l'altra, pel teorema de la divergència,

$$\phi_{\partial W'}(\mathbf{E}) = \int_{W'} \operatorname{div}(\mathbf{E}) dv = 0,$$

ja que $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0$ a W' (v. Proposició, pàg. 10). Així, doncs, obtenim que $\phi_{\partial W}(\mathbf{E}) = \phi_S(\mathbf{E}) = q/\varepsilon_0$.

Si la càrrega q fos exterior a W , llavors $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0$ sobre W i $\phi_{\partial W}(\mathbf{E}) = 0$ pel teorema de la divergència, amb la qual cosa veiem que la llei de Gauss és vàlida per al camp creat per una càrrega puntual.

El cas general s'obté fàcilment usant el principi de superposició: si $\mathbf{E}$ és el camp creat per càrregues puntuals q_i situades en els punts $\mathbf{x}_i$ ($i =$

$1, \dots, n$), i de manera que $\mathbf{x}_i \in W$ per $i = 1, \dots, k$ i $\mathbf{x}_i \notin W$ altrament, llavors el flux de $\mathbf{E}$ a través de ∂W és

$$\sum_{i=1}^n \phi_{\partial W}(\mathbf{E}_i) = \sum_{i=1}^k \phi_{\partial W}(\mathbf{E}_i) = (\sum_{i=1}^k q_i) / \varepsilon_0,$$

on $\mathbf{E}_i$ és el camp creat per la càrrega q_i .

Remarca. El resultat val també si algunes de les càrregues q_i estan situades en punts llisos de ∂W , sempre i quan fem el compte pensant que mitja càrrega és dins de W i mitja fora (vegeu E.3.2).

En el cas d'una distribució contínua, posem que sigui volumètrica amb densitat ρ , les sumes s'han de canviar en integrals i obtenim que

$$\phi_{\partial W}(\mathbf{E}) = (\int_W \rho(\mathbf{x}) d\omega) / \varepsilon_0 = Q(W) / \varepsilon_0.$$

Corol·lari (Llei de Gauss en forma diferencial). $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0$.

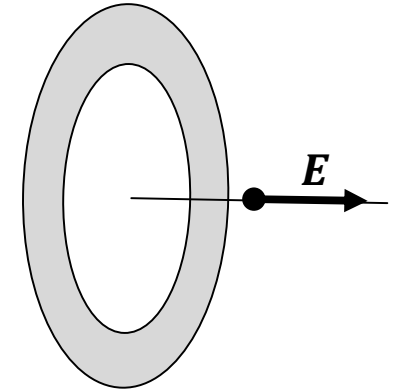
Prova. En efecte, per a tota regió regular W tenim

$$\int_W \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\omega = \phi_{\partial W}(\mathbf{E}) = \int_W \operatorname{div}(\mathbf{E}) d\omega,$$

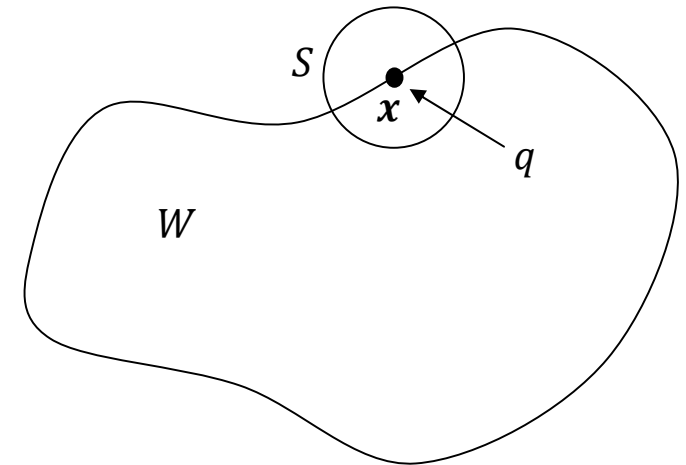
i això implica la igualtat de l'enunciat.

Exercicis E.1 (Camp elèctric)

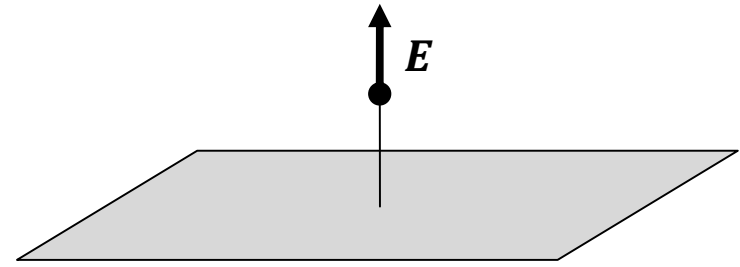
E.1.1. Supposeu que teniu una corona circular carregada amb una densitat superficial constant σ . Calculeu el camp elèctric creat per aquesta distribució en els punts de la recta perpendicular al pla de la corona que passa pel seu centre. Discutiu el resultat quan el radi interior tendeix a zero (cas d'un disc) i quan el radi exterior tendeix a infinit.



E.1.2. Si una càrrega puntual q està situada en un punt llis de ∂W , on W és una regió tancada, i $\mathbf{E}$ és el camp elèctric produït per q , proveu que $\phi_{\partial W}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \frac{q}{\epsilon_0}$ (v. la remarca de la pàgina 13). Si $x \in \partial W$ no és llis, el resultat pot ser diferent (v., per exemple, E.3.8).



E.1.3. Demostreu que el camp creat per una làmina plana infinita carregada amb una densitat superficial constant σ és, en qualsevol punt fora de la làmina, $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{n}$, on $\mathbf{n}$ és el



vector normal unitari perpendicular a la làmina dirigit cap al semiespai en el qual està el punt.

E.1.4. Proveu que el camp creat per dues làmines planes paral·leles infinites, carregades amb densitats superficials constants σ i $-\sigma$, és perpendicular a les dues làmines, que $E = \sigma/\epsilon_0$ a la regió entre les dues làmines i zero altrament, i que està dirigit de la làmina amb càrrega positiva envers la de càrrega negativa.

E.1.5. El camp a l'interior d'un cos conductor en equilibri electrostàtic és nul (altrament les càrregues lliures del conductor estarien en moviment), i en els punts de la seva superfície és perpendicular a aquesta (si el camp elèctric a la superfície tingués component tangencial, també hi hauria càrregues en moviment). El teorema de Gauss implica que la densitat de càrrega a l'interior del conductor és 0 i, per tant, la càrrega està distribuïda a la superfície del

conductor. Proveu que la intensitat del camp en un punt de la superfície és $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$, on σ és la densitat superficial de càrrega en el punt i $\mathbf{n}$ el vector normal unitari a la superfície del conductor.

E.1.6. Apliqueu el teorema de Gauss per mostrar que el camp elèctric a l'interior d'una esfera de radi R carregada amb una densitat superficial constant σ és nul, i que a l'exterior és equivalent al camp creat per una càrrega puntual de valor $q = 4\pi R^2 \sigma$ situada al centre de l'esfera.

E.1.7. Suposem que en la llei de Coulomb canviem r^{-2} per $r^{-\alpha}$, $\alpha \neq 2$. Proveu que aleshores el camp elèctric a l'interior d'una esfera carregada amb una densitat superficial constant σ és no nul.

[Atès que experimentalment es constata que el camp és nul, podem interpretar aquest fet com una confirmació de la llei de Coulomb]

E.1.8. Una càrrega puntual q està situada en un vèrtex d'un cub. Calculeu el flux del camp elèctric creat per aquesta càrrega a través de d'una cara qualsevol del cub.

E.1.9. Utilitzant la llei de Coulomb per a distribucions contínues de càrrega, calculeu el camp elèctric creat en els punts indicats per a cadascuna de les distribucions següents:

1. En els punts d'una mediatriu qualsevol d'un segment rectilini de longitud L i carregat uniformement amb una densitat lineal λ .
2. Com en el cas anterior, però en els punts de la recta perpendicular per un dels extrems del segment.
3. En els punts de la recta perpendicular que passa pel centre d'una espira quadrada de costat a i carregada uniformement amb densitat lineal λ .

E.1.10. Utilitzant la llei de Gauss, calculeu el camp elèctric creat per a cadascuna de les distribucions de càrrega en els punts indicats:

1. En els punts a distància r d'un fil rectilini infinit carregat uniformement amb una densitat lineal λ .
2. En els punts a l'interior d'un cilindre infinit carregat amb una densitat volumètrica $\rho = kr$, on k és una constant i r la distància a l'eix del cilindre.

3. En els punts interiors i exteriors d'una closca esfèrica de radi interior a i exterior b i carregada amb una densitat volumètrica inversament proporcional a la distància al centre.

Indicacions

E.1.1. En coordenades polars (r, φ) sobre la corona, l'element d'àrea és $r \, dr d\varphi$. La contribució de la càrrega sobre aquest element, $\sigma r \, dr d\varphi$, al camp elèctric $\mathbf{E}$ és

$$\kappa \frac{\sigma r \, dr d\varphi}{d^2} \cdot \frac{x}{d} = \kappa \sigma \frac{rx}{d^3} dr d\varphi.$$

La contribució de la corona de radi r i amplada dr és,

doncs, $2\pi\kappa\sigma \frac{rx}{d^3} dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{rx}{d^3} dr$. Finalment la contribució de tota la corona és

$$E = \int_a^b \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{rx}{d^3} dr = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_a^b \frac{r}{d^3} dr,$$

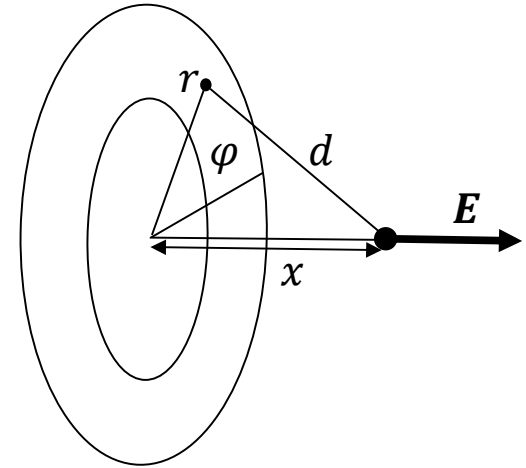
on posem a i b per denotar els seus radis interior i exterior.

Com que $d = (r^2 + x^2)^{1/2}$,

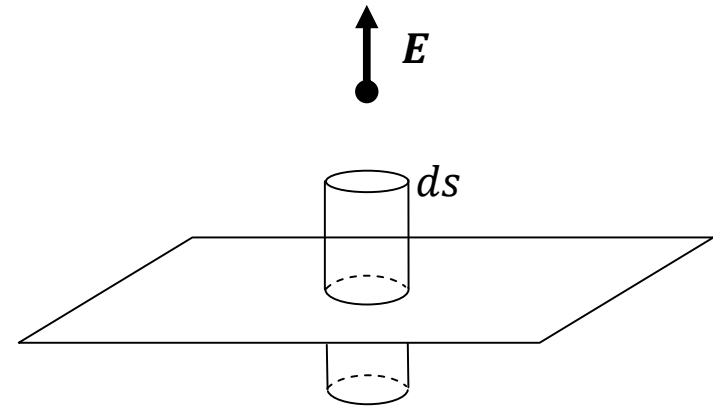
$$\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_a^b \frac{r}{d^3} dr = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_a^b \frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_a^b d((r^2 + x^2)^{-1/2}),$$

d'on

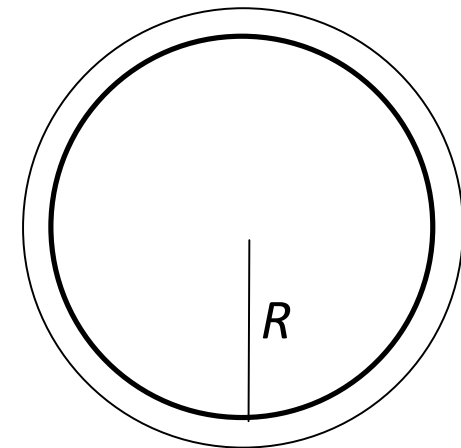
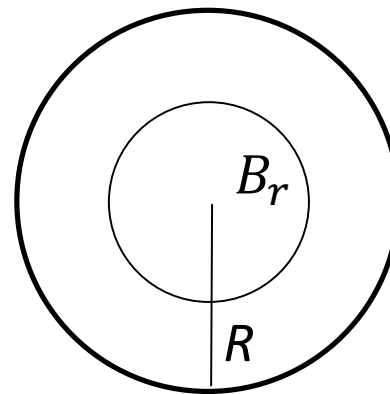
$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right).$$



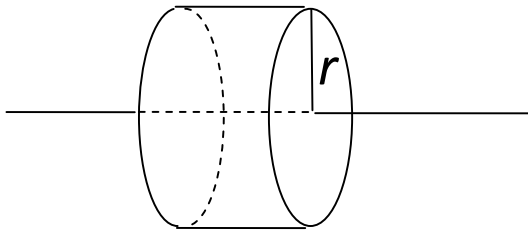
E.1.3. Considerem un cilindre recte de base ds , perpendicular al pla, amb centre sobre el pla i altura $2r$. Com que $\mathbf{E}$ és perpendicular al pla, i E només depèn de la distància r al pla, el flux de $\mathbf{E}$ a través de la vora del cilindre és $2Eds$. Per altra banda, la càrrega continguda en el cilindre és σds , de manera que $2Eds = \sigma ds$, i això prova el que volíem: $E = \sigma/2\epsilon_0$.



E.1.6. El camp creat per l'esfera és radial i basta aplicar la llei de Gauss a una bola B_r de radi r , distingint el cas $r < R$ del cas $r > R$. En el primer cas, la càrrega total continguda a B_r és 0 i en el



segon és $Q = 4\pi R^2 \sigma$. El flux a través de $S_r = \partial B_r$ és $4\pi r^2 E$. Així, doncs, $E = 0$ en el cas $r < R$ i $E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, que és el camp creat per una càrrega puntual Q situada a l'origen.



E.1.10. Considereu un cilindre circular recte amb eix sobre el fil, radi r i una altura arbitrària l . El camp elèctric és radial-cilíndric, i el flux a través de la vora del cilindre és $2\pi r l E$. Com que la càrrega en el seu

interior és $l\lambda$, obtenim que $2\pi r E = \lambda/\epsilon_0$, d'on $E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$.