

MMF 10 / 0. Preliminars matemàtics

1. Camps vectorials, formes i teorema d'Stokes

8.2.10 SX

Nomenclatura i notacions

Sempre que no diem el contrari explícitament, per *diferenciable* enten-
drem una funció de classe C^∞ .

Si U és un obert de $\mathbb{R}^n$, i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable, en lloc de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ so-
vint escriurem $\partial_{x_i} f$, o simplement $\partial_i f$ si les coordenades $x_1, \dots, x_n$ queden
clarament especificades pel context.

Posarem df per denotar la *diferencial* de f , és a dir,

$$df = (\partial_1 f)dx_1 + \dots + (\partial_n f)dx_n$$

Proposició. Si $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\langle df, \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} (f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})) \Big|_{t=0} = (D_{\mathbf{v}}f)(\mathbf{x})$.

Remarca. $(D_{\mathbf{v}}f)(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} (f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})) \Big|_{t=0}$ és la *derivada de f en la direcció $\mathbf{v}$* (en el punt $\mathbf{x}$).

Camps vectorials

Per *camp vectorial* $\mathbf{v}$ sobre un obert U de $\mathbb{R}^n$ entendrem una aplicació diferenciable $\mathbf{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Donar $\mathbf{v}$ equival a donar n funcions diferenciables $v_1, \dots, v_n$ definides sobre U :

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

Exemple: gradient d'una funció

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable, posarem

$$\partial f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

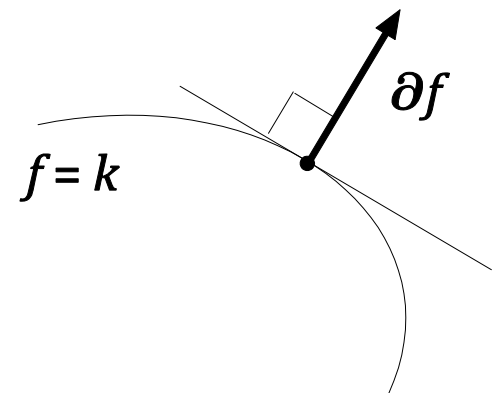
D'aquest camp vectorial (definit sobre U) en diem *gradient* de f , i també posarem $\mathbf{grad}(f)$, o ∇f , per denotar-lo. Dels camps de la forma ∂f , per alguna funció f , en direm *camps conservatius*.

Proposició. Si $\mathbf{v}$ és un camp vectorial definit sobre U , llavors

$$\partial f \cdot \mathbf{v} = \langle df, \mathbf{v} \rangle.$$

Prova. Basta recordar que $\langle dx_i, \mathbf{v} \rangle = v_i$.

Corol·lari. ∂f és perpendicular a les hipersuperfícies de nivell $f = k$.



Posarem $\mathcal{V}(U)$ per denotar l'espai vectorial dels camps diferenciables definits sobre U .

La **divergència** d'un camp $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}(U)$, $\text{div}(\boldsymbol{v})$, es defineix per l'expressió

$$\text{div}(\boldsymbol{v}) = \partial_1 v_1 + \cdots + \partial_n v_n.$$

Simbòlicament,

$$\text{div}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

(l'operador $\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\nabla}$ s'anomena **del** o **nabla**, segons el símbol usat). Dels camps $\boldsymbol{v}$ tals que $\text{div}(\boldsymbol{v}) = 0$ se'n diu que són **solenoidals**.

Exemple (Laplaciana d'una funció). Si f és una funció, $\text{div}(\boldsymbol{\partial} f) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$. És a dir, $\text{div}(\boldsymbol{\partial} f) = \Delta f$, on $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$. Diem que Δ és l'*operador laplaciana*. Simbòlicament, $\Delta = \boldsymbol{\partial}^2 = \boldsymbol{\nabla}^2$, notació que és usada per un bon nombre d'autors, especialment pels de l'àmbit de la física. De les funcions f tals que $\Delta f = 0$ es diu que són **harmòniques**.

En el cas $n = 3$, i posant (x, y, z) en lloc de (x_1, x_2, x_3) , el *rotacional* d'un camp $\mathbf{v}$, $\text{rot}(\mathbf{v})$, es defineix per l'expressió

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = (\partial_y v_z - \partial_z v_y, \partial_z v_x - \partial_x v_z, \partial_x v_y - \partial_y v_x).$$

Simbòlicament, i posant $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ per denotar una base ortonormal positiva,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\partial} \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Dels camps $\mathbf{v}$ tals que $\mathbf{rot}(\mathbf{v}) = 0$ es diu que són *irrotacionals*.

Exemples. El camp $\mathbf{r} = (x, y, z)$ compleix $\text{div}(\mathbf{r}) = 3$, $\mathbf{rot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Si $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ és un vector constant, llavors $\text{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0$ i $\mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}$.

Exercici. Si $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, posem $\mathbf{v}^\nabla = v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z$. Llavors

$$\boldsymbol{\partial}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot}(\mathbf{w}) + \mathbf{w} \times \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}^\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w}^\nabla \mathbf{v}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\text{div}(\mathbf{v})\mathbf{w} + \text{div}(\mathbf{w})\mathbf{v} - \mathbf{v}^\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w}^\nabla \mathbf{v}$$

per a qualsevol $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$.

Formes diferencials

Posarem $\Lambda_0 = \Lambda_0(U) = \mathcal{F}(U)$ per denotar les funcions diferenciables definides en l'obert U (també s'anomenen **0-formes** diferencials) i $\Lambda_1 = \Lambda_1(U)$ per denotar les **1-formes** diferencials definides sobre U , és a dir, l'espai vectorial de les expressions α de la forma

$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n, \quad \alpha_i \in \mathcal{F}(U).$$

Notem que tenim una aplicació lineal

$$d : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1, \quad df = (\partial_1 f) dx_1 + \cdots + (\partial_n f) dx_n.$$

Més en general, posarem $\Lambda_k = \Lambda_k(U)$ per denotar l'espai de les **k-formes** diferencials definides sobre U , i $d : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{k+1}$ per denotar la **diferencial exterior**. Com que de moment només ens cal el cas $n = 3$, vegem de moment com es concreten aquests objectes en aquest cas. Posarem (x, y, z) en lloc de (x_1, x_2, x_3) .

$$\Lambda_2 = \{ \beta_x dy \wedge dz + \beta_y dz \wedge dx + \beta_z dx \wedge dy \mid \beta_x, \beta_y, \beta_z \in \mathcal{F}(U) \},$$

$$\Lambda_3 = \{ \gamma dx \wedge dy \wedge dz \mid \gamma \in \mathcal{F}(U) \}$$

Notem que tenim isomorfismes

$$\mathcal{V} \simeq \Lambda_1, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \widehat{\boldsymbol{v}} = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

$$\mathcal{V} \simeq \Lambda_2, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{v}} = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy$$

$$\mathcal{F} \simeq \Lambda_3, \quad f \mapsto f^* = f dx \wedge dy \wedge dz$$

Pel que fa a la diferencial exterior,

$$df = (\partial_x f) dx + (\partial_y f) dy + (\partial_z f) dz$$

$$\begin{aligned} d(\alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz) &= (\partial_y \alpha_z - \partial_z \alpha_y) dy \wedge dz \\ &\quad + (\partial_z \alpha_x - \partial_x \alpha_z) dz \wedge dx \\ &\quad + (\partial_x \alpha_y - \partial_y \alpha_x) dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\beta_x dy \wedge dz + \beta_y dz \wedge dx + \beta_z dx \wedge dy) \\ = (\partial_x \beta_x + \partial_y \beta_y + \partial_z \beta_z) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Proposició

$df = \widehat{\partial f}$	$\widetilde{\text{rot}(\boldsymbol{v})} = d\widehat{\boldsymbol{v}}$	$d\widetilde{\boldsymbol{v}} = \text{div}(\boldsymbol{v})^*$
-----------------------------	--	--

Equivalentment, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\Lambda_0 & \xrightarrow{d} & \Lambda_1 & \xrightarrow{d} & \Lambda_2 & \xrightarrow{d} & \Lambda_3 \\
\parallel & & \uparrow^{\wedge} & & \uparrow^{\sim} & & \uparrow^* \\
\mathcal{F} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathcal{V} & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{F}
\end{array}$$

és commutatiu. En particular tenim (atès que $d^2 = 0$)

$$\mathbf{rot}(\partial(\mathbf{v})) = 0 \text{ i } \text{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{v})) = 0,$$

relacions que per altra banda es poden comprovar directament a partir de les definicions.

$d(fg) = f \, dg + g \, df$	$\partial(fg) = f \, \partial g + g \, \partial f$
$ \begin{aligned} \alpha \wedge \alpha' &= (\alpha_y a'_z - \alpha_z a'_y) dy \wedge dz \\ &+ (\alpha_z a'_x - \alpha_x a'_z) dz \wedge dx \\ &+ (\alpha_x a'_y - \alpha_y a'_x) dx \wedge dy \end{aligned} $	$\widehat{\mathbf{v}} \wedge \widehat{\mathbf{v}}' = \widehat{\mathbf{v} \times \mathbf{v}'}$
$d(f\alpha) = f \, d\alpha + df \wedge \alpha$	$\mathbf{rot}(f\mathbf{v}) = f \mathbf{rot}(\mathbf{v}) + \partial f \times \mathbf{v}$
$\alpha \wedge \beta = (\alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z) dx \wedge dy \wedge dz$	$\widehat{\mathbf{v}} \wedge \widetilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^*$
$d(f\beta) = df \wedge \beta + f \, d\beta$	$\text{div}(f\mathbf{v}) = f \text{div}(\mathbf{v}) + \partial f \cdot \mathbf{v}$

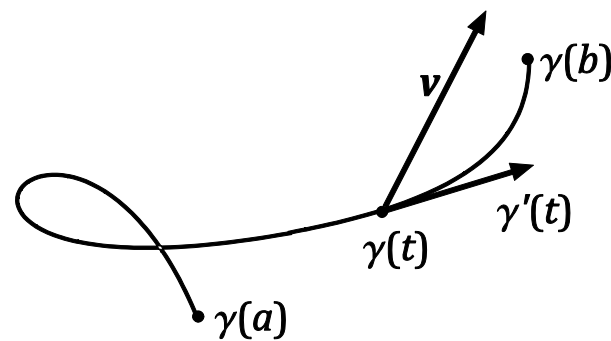
Una forma diferencial $\omega \in \Lambda_k$ es diu que és **tancada** si $d\omega = 0$ i que és **exacta** si $\omega = d\eta$ per alguna $\eta \in \Lambda_{k-1}$. Les formes exactes són tancades, ja que $d(d\eta) = 0$. El recíproc, però, no és en general cert. El resultat que segueix, que ens limitem a enunciar en el cas particular que necessitem, és una condició suficient sobre l'obert U per garantir-ne la validesa.

Lema de Poincaré. Sigui U un obert estrellat de $\mathbb{R}^3$. Si $\xi \in \Lambda_k(U)$, $k = 1, 2$, és tancada, llavors ξ és exacta. En particular resulta que si $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(U)$ és irrotacional (respectivament solenoïdal), llavors existeix $f \in \mathcal{F}(U)$ (respectivament $\mathbf{w} \in \mathcal{V}(U)$) tal que $\mathbf{v} = \mathbf{d}f$ (respectivament $\mathbf{v} = \mathbf{rot}(\mathbf{w})$).

Circulació d'un camp vectorial i integració de 1-formes

Sigui $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camí diferenciable i $\mathbf{v}$ un camp definit en un entorn de la imatge de γ . Es defineix **circulació de $\mathbf{v}$ al llarg de γ** , $\tau_\gamma(\mathbf{v})$, com

$$\tau_\gamma(\mathbf{v}) = \int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\gamma = \int_a^b \mathbf{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$



Anàlogament, si $\alpha \in \Lambda_1$ és una 1-forma definida en un entorn de la imatge de γ , llavors definim $\int_\gamma \alpha$ per la fórmula

$$\begin{aligned}\int_\gamma \alpha &= \int_a^b \langle \alpha(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \left(\alpha_x(\gamma(t)) \gamma'_x(t) + \alpha_y(\gamma(t)) \gamma'_y(t) + \alpha_z(\gamma(t)) \gamma'_z(t) \right) dt.\end{aligned}$$

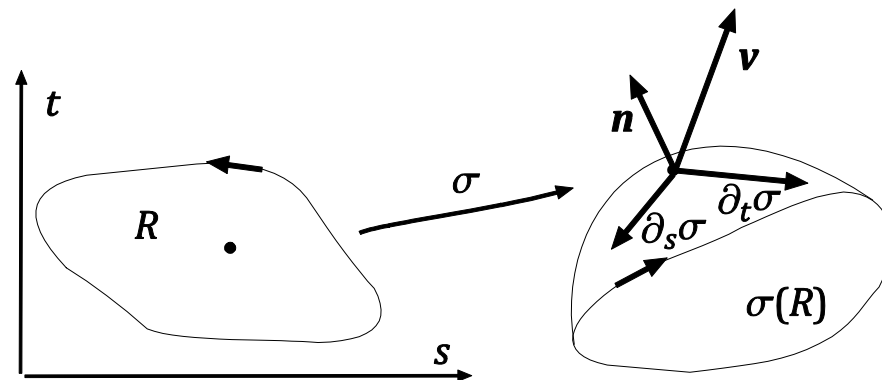
Proposició. $\tau_\gamma(v) = \int_\gamma \hat{v}$.

Flux d'un camp vectorial i integració de 2-formes

Sigui R una regió regular de $\mathbb{R}^2$, és a dir, un conjunt tancat i acotat tal que la seva vora ∂R és una corba diferenciable. Sigui $\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació diferenciable i v un camp definit en un

entorn de la imatge de σ . Es defineix el **flux de v relatiu a σ** , $\phi_\sigma(v)$, com

$$\phi_\sigma(v) = \int_\sigma v \cdot d\sigma = \int_R v(\sigma(s, t)) \cdot (\partial_s \sigma(s, t) \times \partial_t \sigma(s, t)) ds dt.$$



Anàlogament, si $\beta \in \Lambda_2$ és una 2-forma definida en un entorn de la imatge de σ , llavors definim $\int_{\sigma} \beta$ per la fórmula

$$\int_{\sigma} \beta = \int_R (\beta_x \circ \sigma) d\sigma_y \wedge d\sigma_z + (\beta_y \circ \sigma) d\sigma_z \wedge d\sigma_x + (\beta_z \circ \sigma) d\sigma_x \wedge d\sigma_y$$

Proposició. $\phi_{\sigma}(\nu) = \int_{\sigma} \tilde{\nu}$.

Prova. Tenim

$d\sigma_y \wedge d\sigma_z = (\partial_s \sigma_y \partial_t \sigma_z - \partial_t \sigma_y \partial_s \sigma_z) ds \wedge dt = (\partial_s \sigma \times \partial_t \sigma)_x ds \wedge dt$,
i fórmules anàlogues per $d\sigma_z \wedge d\sigma_x$ i $d\sigma_x \wedge d\sigma_y$. L'afirmació resulta ara directament d'aquestes relacions i de la fórmula del flux.

Teorema d'Stokes

Donada una varietat diferenciable M , una varietat compacta orientada W de dimensió k amb vora ∂W , una aplicació diferenciable $\sigma : W \rightarrow M$, i una k -forma β sobre M , definim $\int_{\sigma} \beta = \int_W \sigma^*(\beta)$. Per als propòsits d'aquest curs, podem suposar que M és un obert de $\mathbb{R}^n$ i que W és una regió regular de $\mathbb{R}^k$. En aquest cas $\beta = \sum \beta_I dx_I$, on el sumatori és respecte dels k -

multiíndexs estrictament creixents $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, amb $\beta_I \in \mathcal{F}(M)$ i $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, on $x_1, \dots, x_n$ són les coordenades de $\mathbb{R}^n$. Llavors $\sigma^* \beta = \sum (\beta_I \circ \sigma) d\sigma_I$, on σ_i ($i = 1, \dots, n$) són les components de σ i on $d\sigma_I = d\sigma_{i_1} \wedge \dots \wedge d\sigma_{i_k}$ es calcula tenint en compte que $\wedge$ és multilinear alternat. Si $u_1, \dots, u_k$ són les coordenades $\mathbb{R}^k$, el resultat té la forma $d\sigma_I = \gamma_I du_1 \wedge \dots \wedge du_k$, de manera que finalment és que de $\int_W \sigma^*(\beta) = \int_W (\sum \gamma_I) du_1 \dots du_k$.

Teorema (d'Stokes per a formes diferencials). Donada una $(r - 1)$ -forma diferencial α sobre M , aleshores

$$\int_\sigma d\alpha = \int_{\partial\sigma} \alpha,$$

on $\partial\sigma : \partial W \rightarrow M$ és la restricció de σ a ∂W .

Exemple (Teorema fonamental del càlcul en una varietat). En el cas en què $W = [a, b]$ és un interval tancat de la recta real ($a < b$), $\partial[a, b] = \{\bar{a}, b\}$ (b

positiu i a negatiu), $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ és un camí diferenciable sobre M , $\alpha = f$ és una funció diferenciable de M , $\partial\sigma: \{\bar{a}, b\} \rightarrow M$ és l'aplicació

$$\{a \mapsto \sigma(a), b \mapsto \sigma(b)\},$$

i el teorema d'Stokes ens dóna

$$\int_{\sigma} df = \int_{\partial\sigma} f = \int_{\{\bar{a}, b\}} d \circ \sigma = -f(\sigma(a)) + f(\sigma(b)).$$

És a dir,

$$\boxed{\int_{\sigma} df = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))}$$

Exemple (Teorema d'Stokes clàssic). Suposem que S és una superfície oberta orientada de $\mathbb{R}^3$ amb vora $C = \partial S$ i que $\mathbf{v}$ és un camp vectorial definit en un entorn de S . Aleshores

$$\boxed{\phi_S(\mathbf{rot}(\mathbf{v})) = \tau_C(\mathbf{v})}$$

$$\text{En efecte, } \phi_S(\mathbf{rot}(\mathbf{v})) = \int_S \widetilde{\mathbf{rot}(\mathbf{v})} = \int_S d\hat{\mathbf{v}} = \int_C \hat{\mathbf{v}} = \tau_C(\mathbf{v}).$$

Exemple (Teorema de la divergència). Suposem que W és una regió regular de l'espai euclidià orientat $\mathbb{R}^3$ i $\mathbf{v}$ un camp vectorial definit en un entorn de W . Aleshores

$$\int_W \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \phi_S(\mathbf{v})$$

En efecte, si $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ és la forma de volum de $\mathbb{R}^3$, llavors

$$\int_W \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \int_W \operatorname{div}(\mathbf{v})\omega = \int_W \operatorname{div}(\mathbf{v})^* = \int_W d\tilde{\mathbf{v}} = \int_S \tilde{\mathbf{v}} = \phi_S(\mathbf{v}).$$

Remarca. Hi ha autors que atribueixen aquest teorema a Gauss, altres a Ostrogadski, i encara d'altres a Gauss–Ostrogadski.

Exercicis

PM.1.1. Sigui $\mathbb{D}$ el semiplà dret i $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ l'aplicació donada per $\sigma(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Proveu que $\sigma^*(x dx + y dy) = r dr$ i $\sigma^*\left(\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}\right) = d\theta$. Deduïu-ne que la

1-forma $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ no és exacta.

PM.1.2. Proveu que

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{v})) = \partial(\operatorname{div}(\mathbf{v})) - \Delta \mathbf{v},$$

on $\Delta \mathbf{v} = (\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z)$.

PM.1.3. (Gauss) Sigui W una regió regular de $\mathbb{R}^3$ amb vora $S = \partial W$ i posem $\mathbf{n}$ per denotar el vector unitari normal a S i exterior a W . Sigui f una funció de W i $\mathbf{v}$ un camp vectorial definit en un entorn de W . Proveu que

$$\int_W \mathbf{v} \cdot \partial f + \int_W f \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \int_{\partial W} f(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}).$$

PM.1.4. (Gauss) Amb les mateixes notacions de l'exercici anterior, proveu que

$$\int_W \partial f = \int_{\partial W} f \mathbf{n}$$

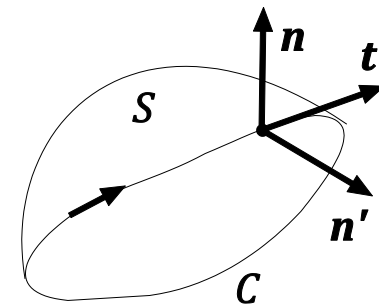
$$\int_W \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \int_{\partial W} \mathbf{n} \times \mathbf{v}$$

(el resultat de cadascuna de les quatre integrals és un vector).

PM.1.5. (Stokes) Sigui S una superfície amb vora $C = \partial S$, $\mathbf{n}$ un vector unitari normal a S i $\mathbf{t}$ el vector tangent unitari a C tal que $\mathbf{n}' = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ és del semiplà tangent exterior en el corresponent punt de C . Donada una funció diferenciable en un entorn de S , proveu que

$$\int_S \mathbf{n} \times \partial f = \int_C f \mathbf{t}$$

(els dos membres són vectors).



PM.1.6. (Primera i segona fórmules de Green) Amb les mateixes notacions que en l'exercici anterior, siguin f, g funcions de W . Proveu que

$$\int_W f \Delta g + \int_W \partial f \cdot \partial g = \int_{\partial W} f (\partial g \cdot \mathbf{n}),$$

$$\int_W (g \Delta f - f \Delta g) = \int_{\partial W} (g (\partial f \cdot \mathbf{n}) - f (\partial g \cdot \mathbf{n})).$$

PM.1.7. Siguin (r, φ, z) les coordenades cilíndriques associades a l'eix z de les coordenades cartesianes (x, y, z) . Posem

$$\hat{\mathbf{r}} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0), \hat{\boldsymbol{\varphi}} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0), \hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1).$$

Proveu que

$$\boldsymbol{\partial} f = (\partial_r f) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} (\partial_\varphi f) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + (\partial_z f) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{r} \partial_r (r v_r) + \frac{1}{r} \partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{1}{r} (\partial_\varphi v_z) - \partial_z v_\varphi \right) \hat{\mathbf{r}} + (\partial_z v_r - \partial_r v_z) \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r} (\partial_r (r v_\varphi) - \partial_\varphi v_r) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f$$