

Geometria / GQ

4. Quàdriques analítiques

© S. Xambó

Quàdrica general

Donat un polinomi quadràtic real

$$\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gxz + 2hyz + 2px + 2qy + 2rz + d$$

en les coordenades rectangulars (x, y, z) , diem que l'equació

$$\phi(x, y, z) = 0$$

defineix una quàdrica analítica, que denotarem Q_ϕ . D'ara endavant convindrem, a més, que la *part principal* de ϕ ,

$$\phi_2(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gxz + 2hyz,$$

no és idènticament nul·la.

Un punt (α, β, γ) *pertany a la quàdrica* Q_ϕ si i només si $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. El punt es diu *real* si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, i es diu *imaginari* si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ i no tots

tres són reals. Si (α, β, γ) és un punt imaginari, direm que $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ és el seu *punt conjugat*. Com que $\phi(x, y, z)$ és un polinomi real, $\mathcal{Q}_\phi$ conté, amb cada un dels seus punts imaginaris, el seu conjugat.

Canvi de coordenades

Si (x', y', z') és un altre sistema de coordenades rectangulars i

$$\begin{aligned}\phi'(x', y', z') = & a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 \\ & + 2f'x'y' + 2g'x'z' + 2h'y'z' \\ & + 2p'x' + 2q'y' + 2r'z' + d\end{aligned}$$

és un polinomi quadràtic real en (x', y', z') , diem que $\mathcal{Q}_\phi$ *coincideix amb* $\mathcal{Q}_{\phi'}$, o que les equacions $\phi(x, y, z) = 0$ i $\phi'(x', y', z') = 0$ defineixen la *mateixa quàdrica*, si i només si existeix un nombre real no nul ρ tal que

$$\phi'(x', y', z') = \rho \tilde{\phi}(x', y', z'),$$

on $\tilde{\phi}(x', y', z')$ denota el polinomi en (x', y', z') que s'obté substituint les coordenades (x, y, z) en el polinomi $\phi(x, y, z)$ per les expressions del canvi a les coordenades (x', y', z') . En particular, dos polinomis $\phi(x, y, z)$ i $\phi'(x, y, z)$ en les mateixes coordenades rectangulars defineixen la mateixa quàdrica si i només si existeix un nombre real no nul ρ tal que $\phi(x, y, z) = \rho\phi'(x, y, z)$ (i en aquest cas direm que els polinomis ϕ i ϕ' són *equivalents*).

Matriu i matriu principal

Posem $A = \begin{pmatrix} a & f & g \\ f & b & h \\ g & h & c \end{pmatrix}$ i diem que és la *matriu principal* del polinomi

$\phi(x, y, z)$. Anàlogament, definim

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & f & g & p \\ f & b & h & q \\ g & h & c & r \\ p & q & r & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & \mathbf{w}^T \\ \hline \mathbf{w} & d \end{array} \right), \quad \mathbf{w} = (p, q, r),$$

i diem que és la matriu del polinomi $\phi(x, y, z)$.

El coneixement de A equival al coneixement de la part principal de $\phi(x, y, z)$, ja que

$$\phi_2(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T.$$

Anàlogament, el coneixement de $\bar{A}$ equival al coneixement de $\phi(x, y, z)$, ja que

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z, 1)\bar{A}(x, y, z, 1)^T, \quad \phi_2(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T.$$

Notem, però, que la quàdrica $\mathcal{Q}_\phi$ només determina $\bar{A}$ llevat d'un factor real no nul i és per aquesta raó que, quan ens calgui tenir en compte aquest indeterminació en referir-nos a $\bar{A}$ (o a A), escriurem $[\bar{A}]$ (o $[A]$).

Quàdrica projectiva i cònica de l'infinit

Si $\bar{A}$ és la matriu de $\phi(x, y, z)$, i $\xi = (X, Y, Z, W)$ són les coordenades projectives corresponents a les coordenades $\mathbf{x} = (x, y, z)$, direm que l'equació

$$[*] \quad \xi \bar{A} \xi^T = 0$$

defineix la *quàdrica projectiva* $\bar{\mathcal{Q}}_\phi$ associada a la quàdrica $\mathcal{Q}_\phi$. L'equació

[*] determina la quàdrica $\mathcal{Q}_\phi$, ja que si fem la substitució $\xi = \bar{\mathbf{x}} = (x, y, z, 1)$ tenim $\bar{\mathbf{x}} \bar{A} \bar{\mathbf{x}}^T = \phi(\mathbf{x})$. Notem que si definim

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(\xi) = & aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fXY + 2gXZ + 2hYZ \\ & + 2pXW + 2qYW + 2rZW + dW^2\end{aligned}$$

(direm que aquest polinomi homogeni és el resultat d'*homogeneïtzar* $\phi(x, y, z)$), llavors

$$\bar{\phi}(x) = \xi \bar{A} \xi^T.$$

Els *punts de l'infinit* de la quàdrica $\bar{Q}_\phi$ són els punts $[X, Y, Z, 0]$ tals que

$$(X, Y, Z, 0) \bar{A} (X, Y, Z, 0)^T = 0,$$

és a dir, tal que $W = 0$ i $(X, Y, Z) A (X, Y, Z)^T = 0$. Direm que aquesta equació determina la *cònica de l'infinit* de la quàdrica $\bar{Q}_\phi$ (o de Q_ϕ).

Transformació de A i $\bar{A}$ per un canvi de coordenades

Si fem un canvi de coordenades

$$(x, y, z)^T = M(x', y', z')^T + (\alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, 1)^T = \bar{M}(x', y', z', 1)^T, \quad \bar{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & \boldsymbol{\tau}^T \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad \boldsymbol{\tau} = (\alpha, \beta, \gamma),$$

l'expressió $(x, y, z, 1)\bar{A}(x, y, z, 1)^T$ es transforma en

$$\phi'(x', y', z') = (x', y', z', 1)\bar{M}^T \bar{A} \bar{M}(x', y', z', 1)^T, \text{ amb}$$

$$\phi'_2(x', y', z') = (x', y', z')M^T A M(x', y', z')^T.$$

Resumidament,

$$\bar{A}' = \bar{M}^T \bar{A} \bar{M}, \quad A' = M^T A M.$$

Si les noves coordenades també són rectangulars, llavors M és ortogonal ($M^T = M^{-1}$) i

$$A' = M^{-1} A M.$$

En particular, A i A' tenen el mateix polinomi característic:

$$[*] \quad Q_{A'}(\lambda) = Q_A(\lambda) .$$

Notem a més que si els dos sistemes de coordenades tenen el mateix origen ($\tau = 0$) llavors $\bar{M}$ també és ortogonal i per tant en aquest cas $Q_{\bar{A}'} = Q_{\bar{A}}(\lambda)$.

En el que segueix suposarem que $\phi_2 \neq 0$.

Diagonalització de la part principal

Atès que una matriu simètrica real diagonalitza en una base ortonormal, sempre podem fer un canvi ortogonal de coordenades, de manera que A' sigui diagonal:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Fixem-nos que la igualtat $[*]$ ens diu que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ són els valors propis de A . Així, doncs, podem suposar, per seguir el nostre estudi, que

$$\phi(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2px + 2qy + 2rz + d.$$

Equacions reduïdes

Direm que el polinomi quadràtic $\phi'(x', y', z', 1)$ és *reduït*, o que la quàdrica $Q_{\phi'}$ és *reduïda*, si la seva forma és una de la taula que segueix:

Tipus	Formes reduïdes de les quàdriques
1. Centrat	$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \mu \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 \neq 0)$
2. Parabòlic	$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 2z' \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 \neq 0)$
3. Cilíndric centrat	$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 \neq 0)$
4. Cilíndric parabòlic	$\lambda_1 x'^2 - 2y' \quad (\lambda_1 > 0)$
5. Plans paral·lels	$\lambda_1 x'^2 + \mu \quad (\lambda_1 > 0)$

Remarca. En el tipus cilíndric centrat, es pot excloure el cas en què $\mu < 0$ i $\lambda_2 < 0$, ja que, si es compleixen aquestes condicions, la forma reduïda equivalent $-\lambda_2 y'^2 - \lambda_1 x'^2 - \mu$ compleix $-\lambda_2, -\mu > 0$ i $-\lambda_1 < 0$.

Transformació en forma reduïda

Proposició. Donat un polinomi quadràtic $\phi(x, y, z)$ en les coordenades rectangulars (x, y, z) , existeix un sistema de coordenades rectangulars (x', y', z') i un polinomi reduït $\phi'(x', y', z')$ tals que les equacions $\phi(x, y, z) = 0$ i $\phi'(x', y', z')$ defineixen la mateixa quàdrica.

Prova. Després d'un canvi de coordenades rectangular, podem suposar que la part principal de $\phi(x, y, z)$ és diagonal, amb la qual cosa

$$\phi(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2px + 2qy + 2rz + d.$$

Cas $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ (equival a $\det(A) \neq 0$). Completant tres quadrats, la qual cosa equival a un canvi d'origen, podem suposar que l'equació de la quàdrica és de la forma

$$(I) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \mu = 0.$$

En aquest cas podem suposar que hi ha dos valors propis positius, ja que altrament podem canviar l'equació de signe. De fet podem suposar, canviant si cal l'ordre de les variables, que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. És a dir, es tracta d'una equació reduïda de tipus centrat.

Cas d'un únic valor propi nul. Canviant l'ordre de les variables si cal, podem suposar que $\lambda_1\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Completant dos quadrats, veiem que podem suposar que l'equació té la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2rz + d' = 0.$$

Si $r \neq 0$, el canvi $z \mapsto z - d'/2r$ ens permet eliminar el terme independent, amb la qual cosa veiem que ens queden dues classes d'equacions reduïdes

$$(II) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2rz' = 0 \quad (\text{tipus parabòlic})$$

$$(III) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu = 0 \quad (\text{tipus cilíndric centrat}).$$

Notem que en els dos casos podem suposar, per un argument similar al del cas I, que $\lambda_1 > 0$.

Cas d'un únic valor propi no nul. Canviant l'ordre de les variables si cal, podem suposar que $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2, \lambda_3 = 0$. Completant un quadrat, veiem que podem suposar que l'equació té la forma

$$\lambda_1 x'^2 + 2qy + 2rz + d' = 0.$$

Aquesta equació es pot reduir a una de les dues formes següents:

$$(IV) \quad \lambda_1 x'^2 + 2q'y' = 0 \quad (\text{tipus cilíndric parabòlic})$$

(V) $\lambda_1 x'^2 + \mu = 0$ (tipus parell de plans paral·lels)

Al tipus (V) s'hi arriba si $2qy + 2rz = 0$. Altrament, podem fer un canvi ortogonal de la forma

$$\bar{x} = x', \quad \bar{y} = (qy + rz)/\sqrt{q^2 + r^2}, \quad \bar{z} = (-ry + qz)/\sqrt{q^2 + r^2},$$

que ens condueix a una equació de la forma $\lambda_1 \bar{x}^2 + 2k\bar{y} + d' = 0$, $k = \sqrt{q^2 + r^2}$, que podem transformar en la forma (IV) fent el canvi $\bar{y} \mapsto \bar{y} - d'/2k$.

Equacions canòniques

Tipus centrat no degenerat ($\mu \neq 0$). Posant

$$a = \sqrt{|\mu|/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{|\mu|/\lambda_2}, \quad c = \sqrt{|\mu|/|\lambda_3|},$$

i atenent als diversos signes de μ i λ_3 , tenim les possibilitats següents:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{el·lipsoide})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{hiperboloide d'un full o reglat})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (\text{hiperboloide de dos fulls})$$

Tipus centrat degenerat ($\mu = 0$). Posant

$$a = \sqrt{1/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{1/\lambda_2}, \quad c = \sqrt{1/|\lambda_3|},$$

tenim, atenent al signe de λ_3 , les possibilitats següents:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\text{con imaginari})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\text{con real})$$

Tipus parabòlic. Posant

$$a = \sqrt{1/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{1/|\lambda_2|},$$

tenim, atenent al signe de λ_2 , les possibilitats següents:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2rz = 0 \quad (\text{paraboloide el·líptic})$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2rz = 0 \quad (\text{paraboloide hiperbòlic o reglat})$$

Tipus cilíndric centrat. La discussió d'aquest cas és idèntica a la de les còniques de tipus centrat. Posant

$$a = \sqrt{|\mu|/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{|\mu|/|\lambda_2|} \quad \text{si } \mu \neq 0, \text{ o}$$

$$a = \sqrt{1/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{1/\lambda_2} \quad \text{si } \mu = 0,$$

ens queden les possibilitats següents

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{cilindre el·líptic})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{cilindre el·líptic imaginari})$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{cilindre hiperbòlic})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\text{parell de plans imaginaris conjugats})$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\text{parell de plans reals})$$

Notem que no cal considerar el cas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, ja que equival a $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, que és també un cilindre hiperbòlic.

Tipus cilíndric parabòlic. La discussió d'aquest cas és idèntica a la de les còniques de tipus parabòlic. Posant $p = q'/\lambda_1$, l'equació adopta la forma

$$x^2 + 2py = 0 \quad (\text{cilindre parabòlic}).$$

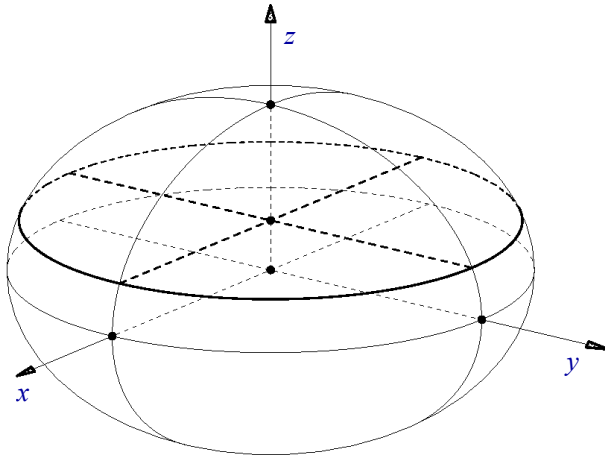
Tipus parell de plans paral·lels. Posant $k = \sqrt{|\mu|/\lambda_1}$ si $\mu \neq 0$, tenim les possibilitats següents:

$$x^2 - k^2 = 0 \quad (\text{parell de plans paral·lels reals})$$

$$x^2 + k^2 = 0 \quad (\text{parell de plans paral·lels imaginaris conjugats}).$$

$$x^2 = 0 \quad (\text{pla doble})$$

Estudi geomètric de les formes canòniques reals



El·lipsoide. Un *el·lipsoide* és una quàdrica que en un cert sistema de coordenades rectangulars ve donat per l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

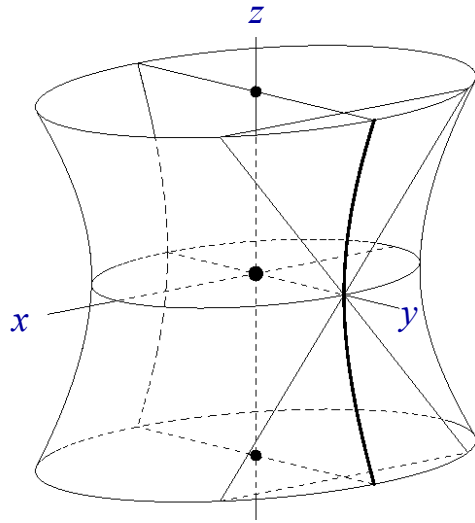
on a, b, c són nombres reals positius (diem que són els *semieixos* de l'el·lipsoide).

El pla $z = k$, on k és un nombre real arbitrari, el talla en els punts (x, y, k) tals que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$. Si $|k| < c$, es tracta d'una el·lipse amb centre el punt $(0, 0, k)$, eixos paral·lels a Ox i Oy , i semieixos

$$a\sqrt{1 - k^2/c^2} \text{ i } b\sqrt{1 - k^2/c^2}.$$

És, doncs, una el·lipse semblant a l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, amb raó de semblança $\sqrt{1 - k^2/c^2}$. Si $|k| = c$, la figura que obtenim és un parell de rectes imaginàries conjugades. L'únic punt real d'aquesta intersecció és $(0,0,c)$. Finalment, si $|k| > c$, la secció és una el·lipse imaginària. Les seccions pels plans $x = k$ o $y = k$ tenen propietats similars.

Notem que els plans de coordenades són plans de simetria. En particular, els eixos de coordenades són eixos binaris de simetria i l'origen és centre de simetria. Si es compleix $a = b$ (per exemple), llavors és un el·lipsoide de revolució respecte de l'eix Oz . En el cas $a = b = c$, l'el·lipsoide és una *esfera* de radi a i centre a l'origen.



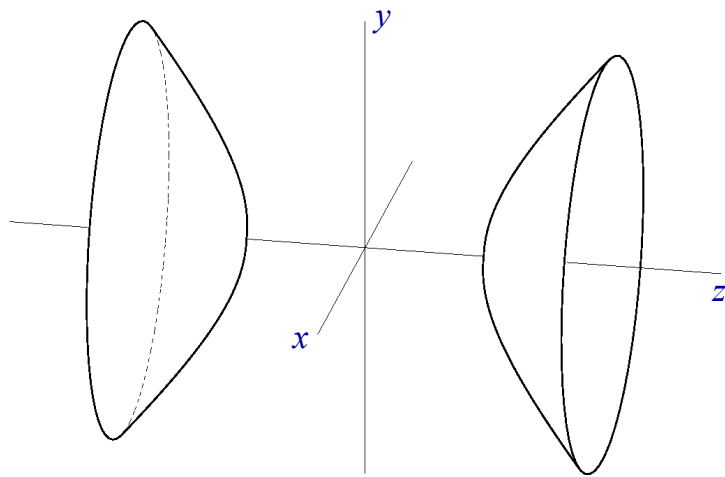
Hiperboloide d'un full (o reglat). Té per equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La secció pel pla $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, és una el·lipse amb centre $(0,0,k)$, eixos principals paral·lels a Ox i Oy , i amb semieixos $a\sqrt{1 + k^2/c^2}$ i $b\sqrt{1 + k^2/c^2}$.

Són el·lipses semblants entre elles (circumferències si $a = b$) i que creixen indefinidament quan $|k|$ creix indefinidament. La més petita d'aquestes el·lipses s'obté per $k = 0$ i l'el·lipse que en resulta s'anomena **el·lipse de gola** de l'hiperboloide.

Les seccions pels plans $y = k$ (o $x = k$), $k \in \mathbb{R}$, són hipèrboles quan $|k| = b$ (respectivament $|k| = a$), amb eix principal paral·lel a l'eix Oz o a l'eix Ox (resp. Oy), segons que $|k| < b$ (resp. $|k| < a$) o $|k| > b$ (resp. $|k| > a$), i un parell de rectes reals quan $|k| = b$ (resp. $|k| = a$). En particular, l'hiperboloide d'un full conté rectes, propietat que s'evoca usualment dient-ne un **hiperboloide reglat**. En general, les rectes contingudes en una quàdrica s'anomenen **generatrius**.



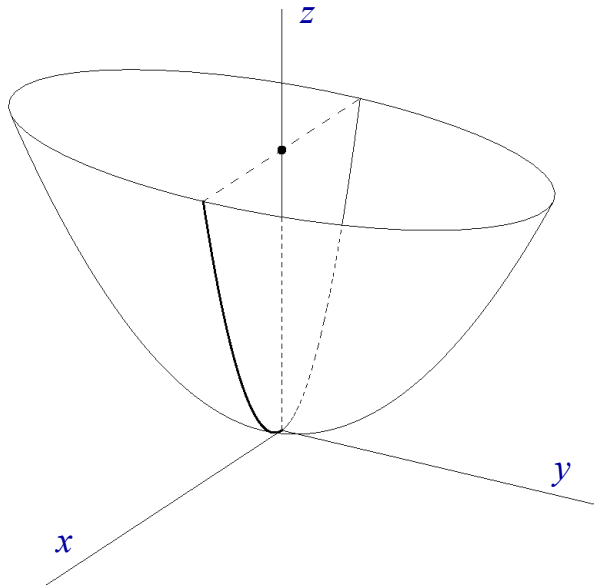
Hiperboloide de dos fulls (o no reglat). És la figura

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Les seccions per $z = k$ són el·lipses reals (imaginàries) si $|k| > c$ (si $|k| < c$) i dues rectes imaginàries conjugades per $|k| = c$. Si $|k| > c$, el centre de l'el·lipse que resulta de tallar pel pla $z = k$ és $(0,0,k)$, els seus eixos principals són paral·lels a Ox i Oy , i el valor dels seus semieixos és

$$a\sqrt{k^2/c^2 - 1} \text{ i } b\sqrt{k^2/c^2 - 1},$$

respectivament. Aquests fets són els que justifiquen que ens referim a aquesta figura dient que té dos fulls. Les seccions per x constant, i per y constant, són hipèrboles amb eix principal paral·lel a l'eix Oz .



Paraboloide el·líptic (o no reglat). Té l'equació

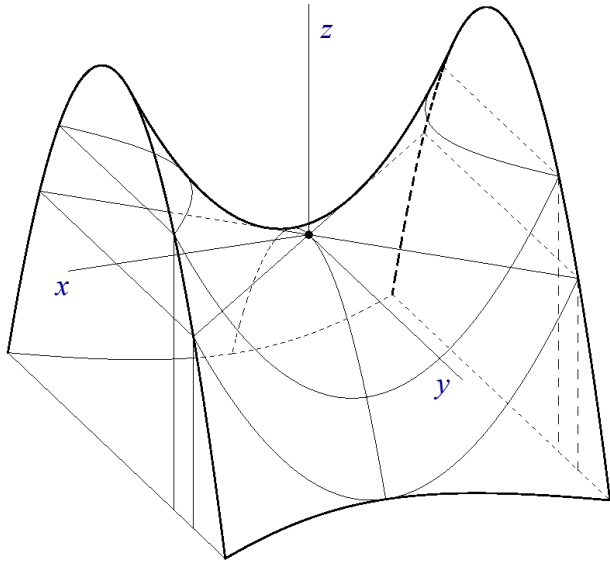
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

amb a i b nombres reals positius. La secció amb el pla $x = k$ (el pla $y = k$), k constant, és la paràbola

$$y^2 = 2b^2(z - k^2/a^2)$$

(la paràbola $x^2 = 2a^2(z - k^2/2b^2)$). En canvi, la secció per $z = k$ és una el·lipse real si $k > 0$, una el·lipse imaginària si $k < 0$, i dues rectes imaginàries conjugades si $k = 0$.

Si es compleix que $a = b$, el paraboloide el·líptic és de revolució respecte de l'eix Oz .



Paraboloide hiperbòlic (o reglat). És la quàdrica donada per l'equació

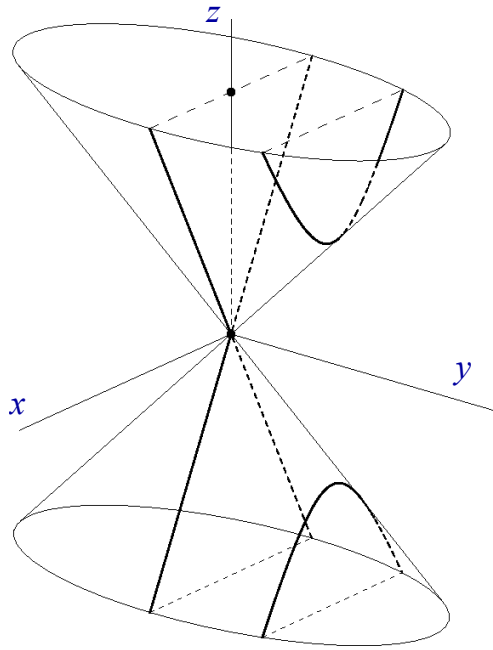
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Les seccions per $z = k$ són hipèrboles si $k \neq 0$. Més precisament, si $k > 0$ (si $k < 0$), la secció pel pla $z = k$ és una hipèrbola amb eix principal

paral·lel a Ox (a Oy), eix secundari paral·lel a Oy (a Ox), i amb semieixos

$$a\sqrt{2k} \text{ i } b\sqrt{2k} \text{ (} a\sqrt{-2k} \text{ i } b\sqrt{-2k}\text{)}.$$

La secció pel pla $z = 0$ és un parell de rectes reals. Les seccions per $x = k$ o $y = k$ són paràboles amb eix paral·lel a Oz , en el primer cas amb orientació contrària (paràbola amb un màxim) i en el segon amb orientació coincident (paràbola amb un mínim).



Cons. La quàdrica

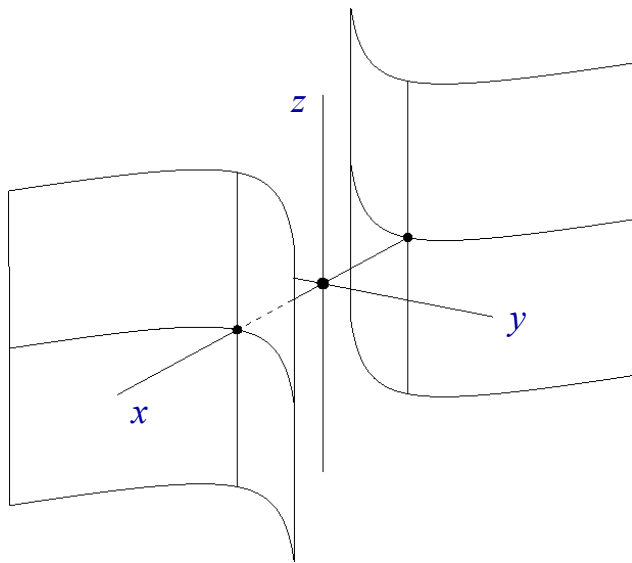
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

és anàloga a un parell de rectes reals i, atès que està formada per rectes que passen per l'origen (per cada punt $P \neq O$ conté la recta PO), en diem **con real**.

És clar que la secció pel pla $z = k$, amb $k \in \mathbb{R}$ no nul, és una el·lipse amb centre en el punt $(0,0,k)$, eixos principals paral·lels a Ox i Oy , i amb semieixos $a|k|/c$ i $b|k|/c$. Així, doncs, les dimensions de l'el·lipse $\mathcal{C}_k$ obtinguda tallant el con amb el pla $z = k$ creixen proporcionalment al valor absolut de k . De fet, l'homotècia de centre O i raó $\rho > 0$ transforma $\mathcal{C}_k$ en $\mathcal{C}_{\rho k}$. A més, per a qualsevol $k \neq 0$, el con és la unió de les rectes OP amb $P \in \mathcal{C}_k$. Diem que O és el **vèrtex** del con i que $\mathcal{C}_k$ és una **directriu**.

La secció pel pla $z = 0$ és un parell de rectes imaginàries conjugades.

Les secció del con amb el pla $y = k$ (el pla $x = k$), $k \in \mathbb{R}$ no nul, és una hipèrbola amb eixos principals paral·lels a Oz i Ox (Oz i Oy) i amb semi-eixos $c|k|/b$ i $a|k|/b$ (resp. $c|k|/a$ i $b|k|/a$). En canvi, la secció amb el pla $y = 0$ (el pla $x = 0$) és un parell de rectes.



Cilindres. Si $q(x, y)$ és un polinomi quadràtic en les coordenades x, y , sabem que la figura de $\mathbb{A}^2$ representada per l'equació $q(x, y) = 0$ és una cònica $\mathcal{C}$. Ara bé, si mirem el polinomi $q(x, y)$ com un polinomi en les coordenades (x, y, z) de $\mathbb{A}^3$, llavors la quàdrica $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{A}^3$ representada per l'equació $q(x, y) = 0$ és la

unió de les rectes paral·leles a l'eix Oz que passen per un punt variable de $\mathcal{C}$. Per exemple, si $\mathcal{C}$ és un parell de rectes (reals o imaginàries, diferents o coincidents), llavors $\mathcal{C}'$ és un **parell de plans** (reals o imaginaris, di-

ferents o coincidents). En el cas en què $\mathcal{C}$ és no degenerada, es diu que la quàdrica $\mathcal{C}'$ és un *cilindre* de base $\mathcal{C}$, i que les rectes per un punt de $\mathcal{C}$ paral·leles a Oz són les seves *generatrius*. Com que les generatrius d'un cilindre són concurrents en un punt impropï, *els cilindres són cons amb el vèrtex a l'infinit*. Un cilindre es diu *el·líptic* (real o imaginari), *hiperbòlic* o *parabòlic* segons que la seva base sigui una el·lipse (real o imaginària), una hipèrbola o una paràbola.

Classificació de les quàdriques

Invariants

Definim nombres reals

$$D_i = D_i(\bar{A}), \quad 1 \leq i \leq 4,$$

$$d_i = d_i(A), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

per les fórmules següents:

$$Q_{\bar{A}}(\lambda) = \det(\lambda I_4 - \bar{A}) = \lambda^4 - D_1\lambda^3 + D_2\lambda^2 - D_3\lambda + D_4,$$

$$Q_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - d_1\lambda^2 + d_2\lambda - d_3.$$

L'expressió

$$D_4 = \det(\bar{A})$$

s'anomena *discriminant* de $\phi(x, y, z)$ (o *discriminant de la quàdrica* Q_ϕ *relativament a les coordenades* x, y, z). Anàlogament, l'expressió

$$d_3 = \det(A)$$

s'anomena *discriminant* de la part principal de $\phi(x, y, z)$. Remarquem que

$$d_1 = a + b + c$$

$$d_2 = ab - f^2 + ac - g^2 + bc - h^2.$$

Si (x', y', z') és un altre sistema de coordenades rectangulars, i $\bar{A}'$ i A' són la matriu i la matriu principal de $\phi'(x', y', z')$, respectivament, posarem

$$D'_i = D_i(\bar{A}'), \quad 1 \leq i \leq 4,$$

$$d'_i = d_i(A'), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Proposició. Es compleixen les identitats

$$D'_4 = D_4, \quad d'_3 = d_3, \quad d'_2 = d_2, \quad d'_1 = d_1.$$

Si, a més a més, les dues referències tenen el mateix origen, llavors també es compleixen les identitats

$$D'_3 = D_3, D'_2 = D_2, D'_1 = D_1.$$

Prova. La demostració és anàloga a la de les relacions anàlogues per les còniques. $\square$

Remarca. Si en lloc de $\bar{A}$ uséssim $\rho\bar{A}$, ρ un escalar no nul, per calcular $\bar{A}'$, llavors obtindríem

$$D'_4 = D_4(\rho\bar{A}) = \rho^4 d_4, \quad d'_i = d_i(\rho A) = \rho^i d_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

En resulta que expressions com ara D_4/d_1^4 (suposant $d_i \neq 0$), D_4/d_2^2 (suposant $d_2 \neq 0$), o D_4^3/d_3^4 (suposant $d_3 \neq 0$) són independents del sistema de coordenades i de l'equació que emprem per representar la quàdrica. Aquesta és la raó per la qual expressions com les considerades s'anomenen *invariants euclidians* (absoluts) de les quàdriques.

Observem també que l'anul·lació o no de D_4 , d_3 , d_2 , o d_1 tampoc no depèn de l'equació de la cònica emprada per verificar-les. El mateix passa amb relacions com ara $D_4 > 0$, $d_3 d_1 > 0$ o $d_2 > 0$. Com que aquesta mena de relacions apareixen freqüentment en els enunciats, sovint, per abús de llenguatge, també ens referim D_4 , d_3 , d_2 , i d_1 dient que són *invariants euclidians* de les quàdriques.

Propietats similars es poden afirmar de les expressions D_3 , D_2 i D_1 si les dues referències tenen el mateix origen, però no en general. És per aquesta raó que, d'aquestes expressions, en direm *semiinvariants euclidians* de les quàdriques.

Índex principal d'una quàdrica. En la classificació efectiva de les quàdriques hi intervé encara una noció més, que anomenarem *índex*, o *índex de la part principal* per ser més precisos, i que per definició és l'índex j de la cònica de l'infinit (és a dir, 0 o 1 segons que les arrels no nul·les del poli-

nomi característic de A tinguin totes el mateix signe o que passi el contrari, és a dir, qui hi hagi almenys una arrel positiva i una arrel negativa).

Classificació mitjançant invariants. Els cons, els cilindres i els parells de plans (reals o imaginaris conjugats, distints o coincidents) formen les quàdriques dites *degenerades*, per contrast amb el·lipsoides, hiperboloides i paraboloides, que són les *no degenerades*.

Lema. Una quàdrica és degenerada si i només si $D_4 = 0$.

Prova. El càlcul de D'_4 en termes de les equacions reduïdes ens dona

Formes reduïdes	D'_4
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \mu \ (\lambda_1, \lambda_2 > 0, \ \lambda_3 \neq 0)$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu = d_3 \mu$
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 2z' \ (\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 \neq 0)$	$-\lambda_1 \lambda_2 r^2$
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu \ (\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 \neq 0)$	0
$\lambda_1 x'^2 - 2y' \ (\lambda_1 > 0)$	0
$\lambda_1 x'^2 + \mu \ (\lambda_1 > 0)$	0

i la conclusió resulta directament de les definicions i les propietats del discriminant. $\square$

Quàdriques no degenerades. En el cas de les quàdriques no degenerades és clar que la quàdrica és un paraboloides si $d_3 = 0$ i un el·lipsoide o un hiperboloides si $d_3 \neq 0$. A més, aquests dos darrers casos es poden distingir per la condició $j = 0$ i $j = 1$, respectivament. La taula anterior mostra a més que $D_4 < 0$ caracteritza els el·lipsoïdes reals entre els el·lipsoïdes, els hiperboloides de dos fulls entre els hiperboloides, i els paraboloides hiperbòlics entre els paraboloides.

L'equació reduïda d'una quàdrica de tipus centrat és

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{D_4}{d_3} = 0.$$

Per aquestes quàdriques hi ha un únic centre de simetria: l'origen de coordenades per a les coordenades reduïdes o el punt de coordenades

$-(p, q, r)A^{-1}$ en termes de coordenades arbitràries. L'argument és anàleg a l'usat per a les còniques centrades i es pot deixar com a exercici.

L'equació reduïda d'una quàdrica de tipus parabòlic és

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 2 \sqrt{-\frac{D_4}{d_2}} z = 0.$$

Quàdriques degenerades. Per a les quàdriques degenerades ($D_4 = 0$), és clar que la condició $d_3 \neq 0$ equival a dir que la quàdrica és un con, real si $j = 1$ i imaginari si $j = 0$. Les quàdriques degenerades tals que $d_3 = 0$ corresponen, doncs, a quàdriques en l'equació reduïda de les quals hi apareixen dues o menys coordenades. El seu tractament és, doncs, del tot paral·lel al de les còniques d'un pla.

L'equació reduïda d'una quàdrica de tipus cilíndric centrat és

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{D_3}{d_2} = 0.$$

L'equació reduïda d'una quàdrica de tipus cilíndric parabòlic és

$$\lambda_1 x'^2 - 2 \sqrt{-\frac{D_3}{d_1}} y' = 0.$$

L'equació reduïda d'un parell de plans paral·lels és

$$\lambda_1 x'^2 - 2 \frac{D_2}{d_1} y' = 0.$$

Algorisme de classificació

$$\left\{ \begin{array}{l} D_4 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} d_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} j = 0 \text{ el·lipsoide } \begin{cases} D_4 < 0 \text{ real} \\ D_4 > 0 \text{ imaginari} \end{cases} \\ j = 1 \text{ hiperboloide } \begin{cases} D_4 < 0 \text{ dos fulls} \\ D_4 > 0 \text{ un full o reglat} \end{cases} \\ d_3 = 0 \text{ paraboloides } \begin{cases} D_4 < 0 \text{ el·líptic} \\ D_4 > 0 \text{ hiperbòlic} \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ D_4 = 0 \left\{ \begin{array}{l} d_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} j = 0 \text{ con imaginari} \\ j = 1 \text{ con real} \end{array} \right. \\ \\ d_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} d_2 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} d_2 > 0 \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \begin{cases} d_1 D_3 < 0 \text{ cilindre el·líptic real} \\ d_1 D_3 > 0 \text{ cilindre el·líptic imaginari} \end{cases} \\ D_3 = 0 \text{ parell de plans imaginaris conjugats} \end{array} \right. \\ d_2 < 0 \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \text{ cilindre hiperbòlic} \\ D_3 = 0 \text{ parell de plans reals} \end{array} \right. \\ \\ d_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \text{ cilindre parabòlic} \\ D_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} D_2 < 0 \text{ parell plans } \parallel \text{ reals} \\ D_2 > 0 \text{ parell plans } \parallel \text{ imaginaris conjugats} \\ D_2 = 0 \text{ pla doble} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

Exemple. $2xy - 2xz + 2yz - 4x + 1 = 0$ és un hiperboloide reglat, ja que $D_4 = 2 > 0$, $d_3 = -2 \neq 0$ i $j = 1$ ja que $d_2 = -3 < 0$.

Exemple. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz + 2x + 4y + 6z + 1 = 0$ és un cilindre parabòlic, ja que $D_4 = 0$, $d_3 = 0$, $d_2 = 0$ i $D_3 \neq 0$.

Exemple. $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 6xy - 8yz - 4x - 6y + 4z + a = 0$ és un hiperboloide d'un full si $a < 3$, un con real si $a = 3$ i un hiperboloide de dos fulls si $a > 3$. En efecte,

$$D_4 = 117(3 - a) = \begin{cases} > 0 & \text{si } a < 3 \\ = 0 & \text{si } a = 3 \\ < 0 & \text{si } a > 3 \end{cases},$$

$$d_3 = -117, d_2 = 24, d_1 = 14, j = 1.$$

Exemple. Si suposem que la quàdrica $\mathcal{Q}_\phi$ és un el·lipsoide real, el seu volum en termes dels semieixos és $\frac{4}{3}\pi abc$ i en termes dels invariants és $\frac{4}{3}\pi\sqrt{D_4^3/d_3^4}$. Els arguments són similars als usats per trobar l'àrea d'una el·lipse en termes dels seus semieixos i dels seus invariants.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_4 \neq 0 \\ \\ D_4 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} j=0 \text{ el·lipsoide } \begin{cases} D_4 < 0 \text{ real} \\ D_4 > 0 \text{ imaginari} \end{cases} \\ j=1 \text{ hiperboloide } \begin{cases} D_4 < 0 \text{ dos fulls} \\ D_4 > 0 \text{ un full} \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ d_3 = 0 \text{ paraboloides } \begin{cases} D_4 < 0 \text{ el·líptic} \\ D_4 > 0 \text{ hiperbòlic} \end{cases} \\ \\ d_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} j=0 \text{ con imaginari} \\ j=1 \text{ con real} \end{array} \right. \\ \\ d_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} d_2 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} d_2 > 0 \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} d_1 D_3 < 0 \text{ cilindre el·líptic real} \\ d_1 D_3 > 0 \text{ cilindre el·líptic imaginari} \end{array} \right. \\ D_3 = 0 \text{ parell de plans imaginaris conjugats} \end{array} \right. \\ d_2 < 0 \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \text{ cilindre hiperbòlic} \\ D_3 = 0 \text{ parell de plans reals} \end{array} \right. \\ \\ D_3 \neq 0 \text{ cilindre parabòlic} \\ \\ d_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} D_2 < 0 \text{ parell de plans paral·lels reals} \\ D_2 > 0 \text{ parell de plans paral·lels imaginaris conjugats} \\ D_2 = 0 \text{ pla doble} \end{array} \right. \\ D_3 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.
\end{array}$$