

Geometria / GQ

3. Còniques projectives

© S. Xambó

- Definició de cònica projectiva
- Canvi de coordenades
- Exemples de còniques no degenerades
- Exemples de còniques degenerades
- Reducció a forma diagonal
- Índex d'una cònica projectiva
- Teorema de classificació
- Càlcul de l'índex
- Punts conjugats. Recta polar d'un punt
 - Exemple: polar del centre i polar d'un focus
 - Exemple: polar d'un punt de la cònica
- La polar d'un punt a una cònica és la tangent
 - Aplicació: determinació de l'eix i el vèrtex d'una paràbola
- Propietat harmònica de la polar
 - Aplicació: el centre és el punt mitjà de qualsevol diàmetre

Definició de cònica projectiva

Una *cònica projectiva* queda definida, respecte d'un sistema de coordenades ξ_0, ξ_1, ξ_2 del pla projectiu real, per una equació de la forma

$$a_{00}\xi_0^2 + 2a_{01}\xi_0\xi_1 + 2a_{02}\xi_0\xi_2 + a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 = 0.$$

Notem que l'expressió de l'esquerra és un polinomi homogeni de grau 2 en les coordenades ξ_0, ξ_1, ξ_2 , diguem-ne $q(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$, i que

$$q(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

o, en forma compacte, $q(\xi) = \xi A \xi^T$.

A partir d'ara suposarem que q no és idènticament nul, o, equivalentment, $A \neq 0$. Direm que A és la *matriu de la cònica* respecte de les coordenades ξ_0, ξ_1, ξ_2 .

Canvi de coordenades

Si efectuem un canvi de coordenades $\xi \rightarrow \xi'$, de manera que $\xi = \xi' M$ per una certa matriu M invertible d'ordre 3, aleshores

$$\xi A \xi^T = \xi' M A M^T \xi'^T = \xi' A' \xi',$$

amb $A' = M A M^T$. És a dir, A' i $\xi' A' \xi'^T = 0$ són la matriu i l'equació de la cònica respecte de les coordenades ξ'_0, ξ'_1, ξ'_2 .

Rang. Del rang r de A en diem *rang* de la cònica $\xi A \xi^T = 0$. Està ben definit, ja que el rang de $A' = M A M^T$ és igual al rang de A per a tota matriu invertible M . Si $r = 3$ (equivalent a $\det(A) \neq 0$), diem que la cònica és *no degenerada*, o *no singular*. Altrament diem que és *degenerada* o *singular*.

Punts dobles. Els punts $[\xi]$ que satisfan $\xi A = 0$ són anomenats *punts dobles* de la cònica projectiva. Adonem-nos que la condició per ser punt doble no depèn del sistema de coordenades, ja que si fem un canvi $\xi = \xi' M$,

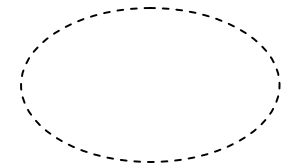
$$\xi A = 0 \Leftrightarrow \xi' M A = 0 \Leftrightarrow \xi' A' (M^T)^{-1} = 0 \Leftrightarrow \xi' A' = 0.$$

■ El conjunt D de punts dobles és una varietat lineal de dimensió $2 - r$.

Exemples de còniques no degenerades

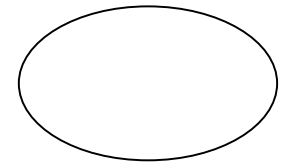
$$(C_0) \quad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$$

Com que no té punts reals, diem que és *imaginària*.



$$(C_1) \quad \xi_0^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$$

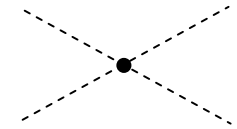
Com que té punts reals, com ara $[1, 0, 1]$, diem que és *real*.



Remarca. Una cònica C de la forma $\lambda_0 \xi_0^2 + \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 = 0$ amb $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ és equivalent a C_0 si $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tenen el mateix signe; altrament és equivalent a C_1 . Si, per exemple, és $\lambda_0, \lambda_1 > 0$, llavors el canvi $\xi_0 = \xi'_0 / \sqrt{\lambda_0}$, $\xi_1 = \xi'_1 / \sqrt{\lambda_1}$ i $\xi_2 = \xi'_2 / \sqrt{|\lambda_2|}$ mostra que C és equivalent C_0 si $\lambda_2 > 0$ i a C_1 si $\lambda_2 < 0$.

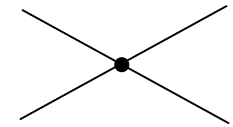
Exemples de còniques degenerades

$$(P_0) \quad \xi_0^2 + \xi_1^2 = 0 .$$



Té rang 2. És la unió de les rectes $\xi_0 = i\xi_1$ i $\xi_0 = -i\xi_1$. La intersecció d'aquestes rectes és el punt $[0, 0, 1]$, que és l'únic punt doble, i l'únic punt real. Diem que és un *parell de rectes imaginàries conjugades*.

$$(P_1) \quad \xi_0^2 - \xi_1^2 = 0 .$$



Té rang 2. És la unió de les rectes reals $\xi_0 = \xi_1$ i $\xi_0 = -\xi_1$. La intersecció d'aquestes rectes és el punt $[0, 0, 1]$, que és l'únic punt doble. Diem que és un *parell de rectes reals*.

Remarca. Una cònica C de la forma $\lambda_0\xi_0^2 + \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 = 0$ és equivalent a P_0 o a P_1 si hi ha exactament un i tal que $\lambda_i = 0$ i les altres dues λ tenen el mateix o diferent signe, respectivament.

$$(D) \quad \xi_0^2 = 0.$$

Té rang 1. Els seus punts són els de la recta $\xi_0 = 0$, que coincideix amb el conjunt de punts dobles. Diem que D és una **recta doble**.

Remarca. Una cònica C de la forma $\lambda_0 \xi_0^2 + \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 = 0$ és equivalent a D si hi ha exactament dos índexs i tals que $\lambda_i = 0$.

Teorema. Donada una cònica projectiva

$$a_{00}\xi_0^2 + 2a_{01}\xi_0\xi_1 + 2a_{02}\xi_0\xi_2 + a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 = 0,$$

existeix un canvi de coordenades projectives $\xi \rightarrow \xi'$ que transforma la seva equació en una de la forma

$$\lambda_0 \xi_0'^2 + \lambda_1 \xi_1'^2 + \lambda_2 \xi_2'^2 = 0.$$

Prova. Suposem primer que $a_{00} \neq 0$. Després de dividir per $\lambda_0 = a_{00}$, podem suposar que l'equació de la cònica té la forma

$$\xi_0^2 + 2a_{01}\xi_0\xi_1 + 2a_{02}\xi_0\xi_2 + \bar{q} = 0,$$

on $\bar{q}$ no depèn de ξ_0 . Però aquesta darrera equació es pot escriure en la forma

$$(\xi_0 + a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2)^2 - (a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2)^2 + \bar{q} = 0,$$

la qual cosa mostra que l'equació original és equivalent a una de la forma

$$\lambda_0 \xi_0'^2 + a'_{11} \xi_1'^2 + 2a'_{12} \xi_1' \xi_2' + a'_{22} \xi_2'^2 = 0.$$

Per inducció sobre el nombre de variables,

$$a'_{11} \xi_1'^2 + 2a'_{12} \xi_1' \xi_2' + a'_{22} \xi_2'^2$$

és equivalent $\lambda_1 \xi_1'^2 + \lambda_2 \xi_2'^2$ i això acaba la prova en aquest cas. Un argument similar es pot aplicar si $a_{11} \neq 0$ o $a_{22} \neq 0$.

Podem, doncs, suposar que $a_{00} = a_{11} = a_{22} = 0$. Si $a_{01} \neq 0$, el canvi de coordenades

$$\xi_0 = \xi_0' + \xi_1', \quad \xi_1 = \xi_0' - \xi_1', \quad \xi_2 = \xi_2'$$

converteix l'equació en una de la forma

$$a_{01} \xi_0'^2 - a_{01} \xi_1'^2 + a_{02} (\xi_0' + \xi_1') \xi_2' + a_{12} (\xi_0' - \xi_1') \xi_2',$$

la qual es pot tractar com en el cas anterior. I un argument similar es pot aplicar si $a_{02} \neq 0$ o $a_{12} \neq 0$.

Índex d'una cònica projectiva

Si $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ són totes no negatives, o totes no positives, diem que la cònica té **índex** 0; altrament (això és, si entre les $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ n'hi ha almenys una de positiva i almenys una de negativa) diem que l'índex és 1.

- L'índex és independent de l'equació diagonal usada per calcular-lo, ja que el rang es conserva (és el mateix en qualsevol sistema de coordenades) i l'índex és 1 (calculat en un sistema de coordenades en què la matriu es diagonal) si i només si la cònica té punts reals que no són dobles (condició que ja no depèn del sistema de coordenades).

Teorema de classificació

- a) Una cònica projectiva no degenerada d'índex j és equivalent a C_j ($j = 0, 1$).
- b) Una cònica projectiva de rang 2 i índex j és equivalent a P_j ($j = 0, 1$).
- c) Una cònica projectiva de rang 1 és equivalent a D .

Càlcul de l'índex

Sigui A la matriu d'una cònica projectiva respecte de les coordenades ξ_0, ξ_1, ξ_1 . Sigui $d_k = \text{tr}_k(A)$, $k = 1, 2, 3$:

$$d_1 = \text{tr}_1(A) = a_{00} + a_{11} + a_{22} = \text{tr}(A),$$

$$d_2 = \text{tr}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \text{tr}_3(A) = \det(A).$$

Teorema. L'índex d'una cònica projectiva és 1 si $d_2 < 0$ o $d_1 d_3 < 0$, i 0 altrament (és a dir, si $d_2 \geq 0$ i $d_1 d_3 \geq 0$).

Prova. Siguin $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ els valors propis de A . Atès que $\text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ és la matriu de la cònica en unes coordenades $\xi = \xi' M$ tals que amb M ortogonal, l'índex és 0 si les λ_i no nul·les tenen el mateix signe i 1 en cas contrari.

Si els no nuls tenen el mateix signe, és clar que d_2 i $d_1 d_3$ són no negatius, ja que

$$d_1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2, d_2 = \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2, d_3 = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2.$$

Recíprocament, si $d_2 \geq 0$ i $d_1 d_3 \geq 0$, vegem que els valors propis no nuls de A han de tenir el mateix signe. Això és obvi si només hi ha un valor propi no nul. Si hi ha exactament dos valors propis no nuls, llavors d_2 és el producte d'ells i, atès que suposem $d_2 \geq 0$, han de tenir el mateix signe.

Manca examinar el cas en què els tres valors propis són no nuls. Com que les relacions $d_2 \geq 0$ i $d_1 d_3 \geq 0$ no depenen de l'ordre dels valors propis i, a més, romanen les mateixes condicions si canviem tots tres valors de signe, podem suposar que $\lambda_0, \lambda_1 > 0$. Si aquest és el cas, es tracta de veure que $\lambda_2 > 0$. Ara bé, la relació $d_2 \geq 0$ ens dóna

$$\lambda_0 \lambda_1 \geq -\lambda_2 (\lambda_0 + \lambda_1)$$

i la relació $d_1 d_3 \geq 0$ ens dóna

$$\lambda_2 (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \geq 0$$

Si fos $\lambda_2 < 0$, tindríem $-\lambda_2 \geq \lambda_0 + \lambda_1$ i, per tant, $\lambda_0 \lambda_1 \geq (\lambda_0 + \lambda_1)^2$, la qual cosa és clarament absurda. $\square$

Punts conjugats. Recta polar d'un punt

Sigui A la matriu d'una cònica projectiva respecte de les coordenades ξ_0, ξ_1, ξ_1 . Donats punts $[\eta] = [\eta_0, \eta_1, \eta_2]$ i $[\zeta] = [\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2]$, diem que $[\zeta]$ és *conjugat* de $[\eta]$ si $\eta A \zeta^T = 0$.

- Com que A és simètrica, $\eta A \zeta^T = 0$ és equivalent a $\zeta A \eta^T = 0$, de manera que $[\zeta]$ és conjugat de $[\eta]$ si i només si $[\eta]$ és conjugat de $[\zeta]$.
- Un punt doble és conjugat de tots els punts, i recíprocament.
- Els punts d'una cònica són precisament els autoconjugats.

Recta polar d'un punt. Els punts conjugats d'un punt simple $[\eta]$ formen la recta de coordenades $\eta^* = \eta A$.

Pol d'una recta. Donada una cònica projectiva no degenerada, el *pol* d'una recta L és el punt P la polar del qual és L . Si $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ són les coordenades projectives de L , les coordenades projectives de P són αA^{-1} .

Exemple. La polar del punt (1,2) respecte de la cònica

$$3x^2 - 2y^2 - 4x + 1 = 0$$

és la recta amb coordenades

$$[1,2,3] \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, -4, -1].$$

La seva equació afí és

$$x - 4y = 1.$$

El pol de la recta $x = 1$ és el punt que té coordenades

$$[1,0,-1] \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [5,0,-3]$$

que correspon al punt de coordenades afins $(-5/3, 0)$.

Exemple: recta polar del centre d'una cònica. Considerem la cònica no degenerada

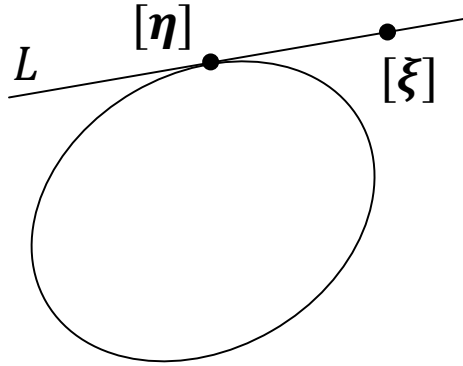
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Si és centrada, el seu centre és $C \equiv -\mathbf{m}A^{-1}$, $\mathbf{m} = (d, e)$. La recta polar de $\bar{C} \equiv [-\mathbf{m}A^{-1}|1]$

és $[-\mathbf{m}A^{-1}|1] \begin{bmatrix} A & \mathbf{m}^T \\ \mathbf{m} & f \end{bmatrix} = [0, 0, k]$, on $k \neq 0$. Per tant, la recta polar del centre d'una el·lipse o d'una hipèrbola és la recta de l'infinit.

Exemple: recta polar d'un focus d'una cònica. Considerem la cònica $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ i el focus $F \equiv (c, 0)$, on $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ en el cas de l'el·lipse i $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ en el cas de la hipèrbola. La polar del punt $\bar{F} \equiv [c, 0, 1]$ té coordenades $[c/a^2, 0, 1]$, és a dir, és la recta $x = a^2/c$. Com que $\frac{a^2}{c} = a/e$, és clar que es tracta de la directriu de F . Per tant, la recta polar d'un focus d'una cònica centrada no degenerada és la directriu d'aquest focus.

Teorema (la polar d'un punt de la cònica és la tangent). Sigui C una cònica no degenerada real. Sigui $[\eta]$ un punt de C i L la recta polar del punt $[\eta]$. Aleshores:

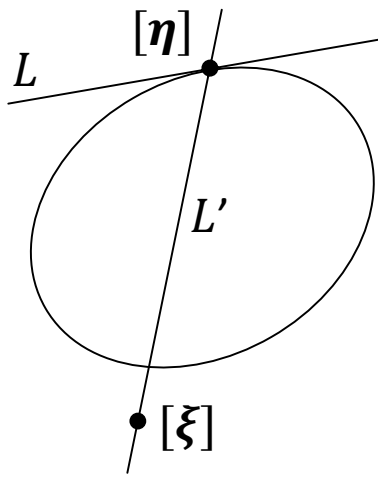


1. $[\eta]$ és l'únic punt d'intersecció de L amb C .
2. Per a qualsevol altra recta L' per $[\eta]$, la intersecció $L' \cap C$ està formada pel punt $[\eta]$ i un altre punt $[\eta'] \neq [\eta]$.

Prova. Sigui $[\xi]$ un punt de L tal que $[\xi] \notin C$ (existeix, ja que C no conté rectes). En particular, $[\xi] \neq [\eta]$, de manera que els punts de $L \cap C$ tenen la forma $[t\xi + \eta]$, per algun $t \in \mathbb{R}$, i han de complir

$$t^2 \xi A \xi^T + 2t \xi A \eta^T + \eta A \eta^T = 0.$$

Però $\eta A \eta^T = 0$, ja que $[\eta] \in C$, i $\xi A \eta^T = 0$, ja que $[\xi]$ és conjugat de $[\eta]$. Així doncs l'equació es redueix a $t^2 \xi A \xi^T = 0$, que només té la solució $t = 0$. Com que t correspon al punt $[\eta]$, això prova (1).



Per veure (2), sigui $[\xi] \in L'$, $[\xi] \notin C$ (en particular $[\xi] \neq [\eta]$). En aquest cas tenim $\xi A \eta^T \neq 0$, ja que altrament seria $L' = L$. Raonant com en el cas (1), els punts de $L' \cap C$ són els de la forma $[t\xi + \eta]$ tals que $t(t\xi A \xi^T + 2\xi A \eta^T) = 0$. La solució $t = 0$ ens dóna el punt $[\eta]$, i la solució $t = -2\xi A \eta^T / \xi A \xi^T$ ens dóna un punt $[\eta'] \neq [\eta]$.

De la polar L d'un punt P d'una cònica no degenerada real en direm la (recta) *tangent* a la cònica en el punt P . També direm que P és el *punt de contacte* de L amb la cònica.

Exemple. La tangent a la paràbola $y = ax^2$ en el punt $P \equiv (s, as^2)$ té coordenades (projectives)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ as^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} as \\ -1/2 \\ -as^2/2 \end{bmatrix}.$$

Per tant, la seva equació afí és

$$asx - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}as^2 = 0,$$

és a dir,

$$y = 2asx - as^2.$$

Notem que el seu pendent és $2as$ (el valor de la derivada de ax^2 en el punt $x = s$).

Com que els punts de l'infinit de la paràbola $y = ax^2$ són els punts $[X, Y, 0]$ tals que $aX^2 = 0$, veiem que la intersecció de la paràbola amb la recta de l'infinit es redueix al punt $[0, 1, 0]$. Per tant, **la paràbola és tangent a la recta de l'infinit i el punt de contacte és el punt de l'infinit del seu eix.**

Exemple. Els punts de l'infinit de la hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ són $P \equiv [a, b, 0]$ i $P' \equiv [a, -b, 0]$. Les coordenades de la polar de P són

$$[a, b, 0] \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1/a, 1/b, 0].$$

Per tant, la tangent a la hipèrbola en el punt $[a, b, 0]$ és l'asíptota

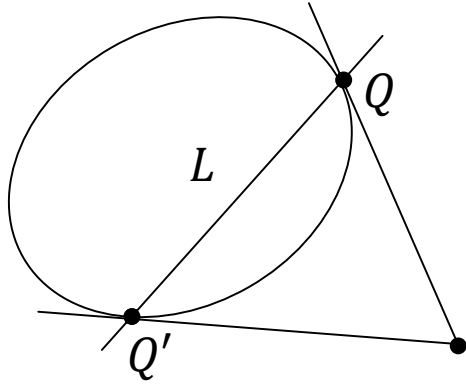
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

De la mateixa manera es veu que la tangent en el punt $[a, -b, 0]$ és l'asíptota

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

La conclusió és, doncs, que les asíptotes són les tangents de la hipèrbola en els punts de l'infinit (que coincideixen amb els punts de l'infinit de les asíptotes).

Tangents des d'un punt a una cònica



Sigui C una cònica projectiva real no degenerada. Sigui $P \notin C$ i L la seva polar. Aleshores $L \cap C = \{Q, Q'\}$, $Q \neq Q'$, i les rectes PQ i PQ' són les tangents a C que passen per P .

En efecte, $L \cap C$ conté dos punts distints, possiblement imaginaris conjugats (només podrien ser iguals si la polar de P és tangent, i això només passa si $P \in C$). Per altra banda, la polar de Q conté Q i P , i això mostra que PQ és tangent a C en el punt Q . Anàlogament es veu que PQ' és tangent a C en el punt Q' .

- Si $P = [\eta]$, un punt $X = [\xi]$ pertany a $PQ \cup PQ'$ si i només si

$$(\eta A \xi)^2 - (\eta A \eta^T)(\xi A \xi^T) = 0,$$

com es veu imposant que $PX \cap C$ es redueixi a un punt.

Aplicació: determinació de l'eix i el vèrtex d'una paràbola

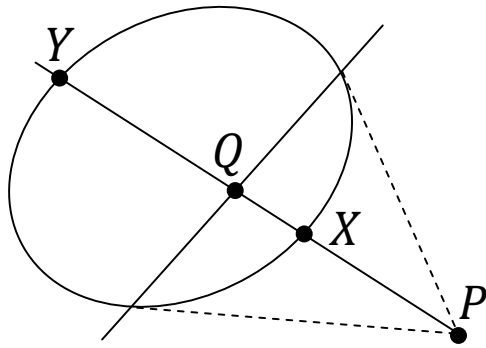
Suposem que hem determinat que una cònica C ,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

és una paràbola. Llavors, coneixem el paràmetre focal, $p = \sqrt{-D_3/d_1^3}$, però ens manca conèixer l'eix i el vèrtex per tal de tenir una determinació completa de la figura.

La direcció de l'eix és immediata: com que l'eix de C és $O'y'$ (en coordenades canòniques), tot vector propi no nul $v \equiv (\alpha, \beta)$ de valor propi 0 ($= \lambda_2$) és un vector director de l'eix de la paràbola, i $[\alpha, \beta, 0]$ és l'únic punt a l'infinit de la paràbola.

Per determinar el vèrtex, sigui $v' \equiv (-\beta, \alpha)$ i considerem el punt $v' \equiv [-\beta, \alpha, 0]$ de la recta de l'infinit. Atès que l'eix de la paràbola és perpendicular a la tangent en el vèrtex, diguem-ne L , el punt $[v']$ és de L . Per tant, $[v']$ és un punt de la recta polar del vèrtex. Per la reciprocitat de la polar, en resulta que el vèrtex és incident amb la polar, diguem-ne L' , de $[v']$. Com que la recta de l'infinit és tangent a la paràbola en el punt $[v]$ (el punt de l'infinit de l'eix), L' també passa per $[v]$. En resulta que l'eix de la paràbola és L' i que el vèrtex és el punt d'intersecció diferent de $[v]$ de L' amb C .



Proposició (Propietat harmònica de la polar)

Sigui A la matriu d'una cònica projectiva no degenerada C en una certa referència. Siguin $P = [\xi]$ i $Q = [\eta]$ dos punts conjugats respecte de C i tals que $P, Q \notin C$. Siguin X i Y els punts d'intersecció de la recta PQ amb C . Llavors

$$\rho(P, Q, X, Y) = -1.$$

Prova. Com que els punts de la recta PQ distints de Q tenen la forma $[\xi + t\eta]$, $t \in \mathbb{R}$, els punts de $PQ \cap C$ corresponen a les solucions t de l'equació

$$\xi A \xi^T + t^2 \eta A \eta^T = 0,$$

ja que $\xi A \eta^T = 0$ per ser P i Q conjugats. Així doncs

$$X = [\xi + t\eta], \quad Y = [\xi - t\eta], \quad \text{on } t = \sqrt{-\xi A \xi^T / \eta A \eta^T}$$

(poden ser dos valors reals, o dos valors imaginaris conjugats), i

$$\rho(P, Q, X, Y) = \rho([1, 0], [0, 1], [1, t], [1, -t]) = \rho(0, \infty, t, -t) = -1.$$

Aplicació: el centre és el punt mitjà de qualsevol diàmetre. Si P és el centre d'una cònica C no degenerada centrada i $Q \notin C$ és un punt de l'infinit, llavors P i Q són conjugats. En resulta que si X i Y són els punts d'intersecció de PQ amb C , llavors P és el punt mitjà de XY .

Amb les notacions de la proposició, vegem quines són les condicions en aquest cas per tal que t sigui real: si l'equació de la cònica és

$$\alpha x^2 \pm \beta y^2 = 1,$$

llavors $\xi = (0,0,1)$ i $\xi A \xi^T = -1$. Per altra banda, $\eta = (k,h,0)$ i $\eta A \eta^T = \alpha k^2 \pm \beta h^2 \neq 0$ (ja que $Q \notin C$). En el cas d'una el·lipse, aquesta expressió és sempre positiva i per tant t és sempre real. En el cas d'una hipèrbola, t és real si i només si $h^2/k^2 < \alpha/\beta = b^2/a^2$.

