

Geometria / GQ

2. Invariants euclidians de les còniques

© S. Xambó

- D_3, d_2, d_1
- Classificació de còniques mitjançant invariants
- Obtenció de les equacions reduïdes i canòniques a partir dels invariants
- Exemple: àrea d'una el·lipse
- Exemple: angle entre les asímptotes d'una hipèrbola
- Exemple: semidistància focal d'una cònica amb centre
- Definició alternativa de les còniques no degenerades

Posem $\bar{A}$ i A per denotar la matriu projectiva i la matriu a l'infinit (part principal de $\bar{A}$), referides a coordenades rectangulars (x, y) , de l'equació d'una cònica.

Denotem, anàlogament, $\bar{A}'$ i A' les matrius projectiva i de l'infinit de l'equació referida a un altre sistema de coordenades rectangulars (x', y') .

Posem

$$D_3 = \det(\bar{A}), \quad d_2 = \det(A) = ac - b^2, \quad d_1 = \text{tr}(A) = a + c.$$

Els símbols D'_3 , d'_2 i d'_1 es defineixen de manera anàloga a partir de $\bar{A}'$ i A' . Així doncs,

$$\lambda^2 - d_1\lambda + d_2 = \det(\lambda I_2 - A)$$

és el polinomi característic de A i $\lambda^2 - d'_1\lambda + d'_2$ el de A' . Diem que D_3 és el *discriminant* de l'equació de la cònica i que d_2 és el *discriminant de la part principal*.

Lema. $D'_3 = D_3$, $d'_2 = d_2$, $d'_1 = d_1$.

Prova. En efecte, existeix una matriu

$$\bar{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & \mathbf{p}^T \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right), M \in O(2), \mathbf{p} = (r, s), r, s \in \mathbb{R},$$

tal que

$$\bar{A}' = \bar{M}^T \bar{A} \bar{M} \text{ i } A' = M^T A M = M^{-1} A M.$$

Com que $\det(\bar{M}) = \det(M) = \pm 1$, la primera relació ens dóna que $D'_3 = D_3$ i la segona, que $d'_2 = d_2$ i $d'_1 = d_1$. $\square$

Si en lloc de $\bar{A}$ usem $\rho \bar{A}$ (ρ un escalar no nul) per calcular $\bar{A}'$, llavors

$$D'_3 = D_3(\rho \bar{A}) = \rho^3 D_3, \quad d'_2 = d_2(\rho \bar{A}) = \rho^2(d_2), \quad d'_1 = d_1(\rho \bar{A}) = \rho d_1.$$

En resulta que expressions com ara D_3/d_1^3 (suposant $d_1 \neq 0$) o D_3^2/d_2^3 (suposant $d_2 \neq 0$) són independents del sistema de coordenades i de l'equació que emprem per representar la cònica. Aquesta és la raó per la

qual expressions com les que acabem de considerar s'anomenen *invariants euclidians* de les còniques.

Pel que fa a les quantitats D_3 , d_2 i d_1 , observem que relacions com ara $D_3 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ i $d_1 \neq 0$ (o $D_3 = 0$, $d_2 = 0$, $d_1 = 0$) són també independents de l'equació de la cònica emprada per verificar-les. El mateix passa amb relacions com ara $d_2 > 0$ o $D_3 d_1 > 0$. Aquestes propietats fan que, per abús de llenguatge, sovint ens referim a D_3 , d_2 i d_1 dient que són *invariants euclidians relatius*, o *semiinvariants*, de les còniques.

Per raons que es posaran de manifest després, introduïm també el símbol D_2 per denotar la traça de segon ordre de $\bar{A}$,

$$\text{tr}_2(\bar{A}) = ac - b^2 + af - b^2 + cf - e^2$$

(és el coeficient de grau 1 del polinomi característic de $\bar{A}$, canviat de signe). El símbol D'_2 es defineix anàlogament mitjançant la matriu $\bar{A}'$. Amb les notacions de la prova del lema tenim:

Si les dues referències tenen el *mateix origen*, llavors $D'_2 = D_2$
(en aquest cas la matriu $\bar{M}$ és ortogonal).

Classificació de còniques mitjançant invariants

Les *còniques no degenerades*, que per definició són les el·lipses (reals o imaginàries), les hipèrboles i les paràboles, es distingeixen de les *còniques degenerades*, que per definició són les parelles de rectes (reals o imaginàries, paral·leles o no, distintes o coincidents), pel fet que les primeres compleixen $D_3 \neq 0$ i les segones, $D_3 = 0$. Aquesta afirmació es dedueix immediatament calculant D'_3 mitjançant les equacions reduïdes i tenint en compte que $D'_3 = \rho^3 D_3$ per algun escalar $\rho \neq 0$.

Algorisme

$$\left\{ \begin{array}{l} D_3 \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} d_2 > 0 \text{ el·lipse } \begin{cases} D_3 d_1 < 0 \text{ real (circumferència si } d_1^2 = 4d_2) \\ D_3 d_1 > 0 \text{ imaginària} \end{cases} \\ d_2 < 0 \text{ hipèrbola (hipèrbola equilàtera si } d_1 = 0) \\ d_2 = 0 \text{ paràbola} \end{array} \right. \\ \\ D_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} d_2 > 0 \text{ parell de rectes imaginàries} \\ d_2 < 0 \text{ parell de rectes reals} \\ d_2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} D_2 < 0 \text{ parell de rectes paral·leles reals} \\ D_2 > 0 \text{ parell de rectes paral·leles imaginàries} \\ D_2 = 0 \text{ parell de rectes coincidents} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Prova. Suposem primer que $D_3 \neq 0$. Com que $d_2 > 0$ equival a $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, és a dir, que λ_1 i λ_2 tenen el mateix signe, és clar que estem en presència d'una el·lipse. Atès que, en termes de l'equació reduïda,

$$D'_3 = \lambda_1 \lambda_2 \mu = d'_2 \mu,$$

i que $d'_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, resulta que $D'_3 d'_1 < 0$ si μ té signe contrari del de λ_1 i λ_2 i que $D'_3 d'_1 > 0$ si μ té el mateix signe que λ_1 i λ_2 . El primer cas, que equival a $D_3 d_1 < 0$, dóna

una el·lipse real, i el segon, que equival a $D_3 d_1 > 0$, dóna una el·lipse imaginària. En el cas real, una el·lipse és una circumferència si i només si $\lambda_1 = \lambda_2$, i aquesta relació és clarament equivalent a l'anul·lació del discriminant de $\lambda^2 - d_1 \lambda + d_2$ (el polinomi característic de A).

El cas $d_2 < 0$ ens diu que λ_1 i λ_2 tenen signes contraris i, per tant, es tracta necessàriament d'una hipèrbola. Com que una hipèrbola és equilàtera si i només si λ_1 i λ_2 són nombres reals amb el mateix valor absolut i de signes contraris, és clar que queden caracteritzades, entre les hipèrboles, per la relació $d_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Si $d_2 = 0$, llavors un valor propi és nul, diguem $\lambda_2 = 0$, i com que la cònica és no degenerada, només es pot tractar d'una paràbola.

Considerem ara les còniques degenerades ($D_3 = 0$). Si $d_2 \neq 0$, l'equació reduïda és necessàriament del tipus centrat amb $\mu = 0$, la qual cosa dóna un parell de rectes imaginàries conjugades si $d_2 > 0$ i un parell de rectes reals si $d_2 < 0$. Si $d_2 = 0$, llavors és clar que l'equació reduïda cau en el cas de rectes paral·leles. Com que $D'_2 = \lambda_1 \mu = d'_1 \mu$, μ/λ_1 té el mateix signe que D'_2 , amb la qual cosa tenim un parell de rectes paral·leles reals si $D'_2 < 0$, un parell de rectes paral·leles imaginàries conjugades si $D'_2 > 0$ i una recta doble si $D'_2 = 0$. El resultat es dedueix ara del fet que els canvis que passen de

l'equació inicial a la reduïda fan que $D'_2 = D_2$. Això és clar si no hi ha canvi d'origen, com ja s'ha vist, i per tant podem suposar que l'equació inicial és de la forma $\lambda_1 x^2 + 2dx + f = 0$ (si fos $e \neq 0$, es tractaria d'una paràbola). En tal situació, tenim $D_2 = -d^2 + \lambda_1 f$. Si ara completem el quadrat, obtenim l'equació $\lambda_1 x'^2 + f' = 0$, amb $f' = f - d^2/\lambda_1$ i $x' = x + d/\lambda_1$. Per tant, $D'_2 = \lambda_1 f' = D_2$. $\square$

Obtenció de les equacions reduïdes i canòniques a partir dels invariants

La discussió anterior dóna les equacions reduïdes en termes dels invariants. Per exemple, en el cas de les còniques centrades, l'equació reduïda ens dóna $D'_3 = d'_2 \mu$ i, per tant, $\mu = D'_3/d'_2 = D_3/d_2$, d'on resulta que l'equació reduïda és

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D_3}{d_2} = 0.$$

D'una manera similar, es veu que l'equació canònica d'una paràbola és

$$x^2 + 2\sqrt{-D_3/d_1^3} y = 0.$$

Finalment, l'equació reduïda de rectes paral·leles es pot escriure

$$x^2 + \frac{D_2}{d_1^2} = 0$$

ja que $D_2' = \lambda_1 \mu = d_1' \mu$.

Exemple: àrea de l'el·lipse

Suposem que hem determinat que una cònica de matriu projectiva $\bar{A}$ és una el·lipse, és a dir, que $d_2 > 0$ i $D_3 d_1 < 0$. Com podem trobar la seva àrea en funció dels invariants?

En termes de l'equació canònica, l'àrea de l'el·lipse és

$$A = \pi ab.$$

Sabem, però, que

$$a = \sqrt{-\mu/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{-\mu/\lambda_2}$$

(l'equació reduïda és $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$), de manera que

$$A = \pi \sqrt{\mu^2/d_2}.$$

Tenint en compte que $\mu = D_3/d_2$, finalment obtenim la fórmula

$$A = \pi \sqrt{D_3^2/d_2^3}.$$

Exemple: angle de les asímptotes d'una hipèrbola

L'angle α que formen les asímptotes d'una hipèrbola, o un parell de rectes reals, es pot determinar per la fórmula

$$\cos^2(\alpha) = d_1^2/(d_1^2 - 4d_2).$$

En efecte, en els dos casos l'equació canònica de les rectes és $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$.

Com que $(-b, a)$ i (b, a) són vectors directors d'aquestes rectes,

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Però $a^2 = 1/\lambda_1$ i $-b^2 = 1/\lambda_2$, d'on

$$\cos(\alpha) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{d_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Finalment és suficient constatar que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = d_1^2 - 4d_2.$$

Exemple: semidistància focal d'una cònica no degenerada amb centre

La semidistància focal, c , d'una el·lipse o d'una hipèrbola ve donada per

$$c^2 = \frac{|D_3|}{d_2^2} \sqrt{d_1^2 - 4d_2}.$$

Els raonaments són similars als dels exemples anteriors.

Exemple: definició alternativa de les còniques

A la introducció hem vist que la paràbola és el lloc geomètric dels punts P que compleixen la condició $d(P, F) = d(P, L)$, on F és el focus i L la directriu. Remarcablement, l'argument que hem usat per demostrar aquest fet es pot adaptar fàcilment al cas d'una el·lipse (suposant que no és circumferència), o al cas d'una hipèrbola, per demostrar que, en qualsevol dels dos casos, la cònica és el lloc geomètric dels punts P tals que

$$d(P, F) = \varepsilon \cdot d(P, L),$$

on F és un focus, L la directriu d'aquest focus (es defineix com en el cas de la paràbola), $\varepsilon = \cos(\gamma) / \cos(\alpha)$, amb α l'angle entre l'eix del con i una generatriu i γ l'angle entre el pla de la cònica i l'eix del con. Notem que, amb les notacions de la figura del cas de la paràbola, en lloc de

$$PQ = PP' / \cos(\alpha)$$

tindrem

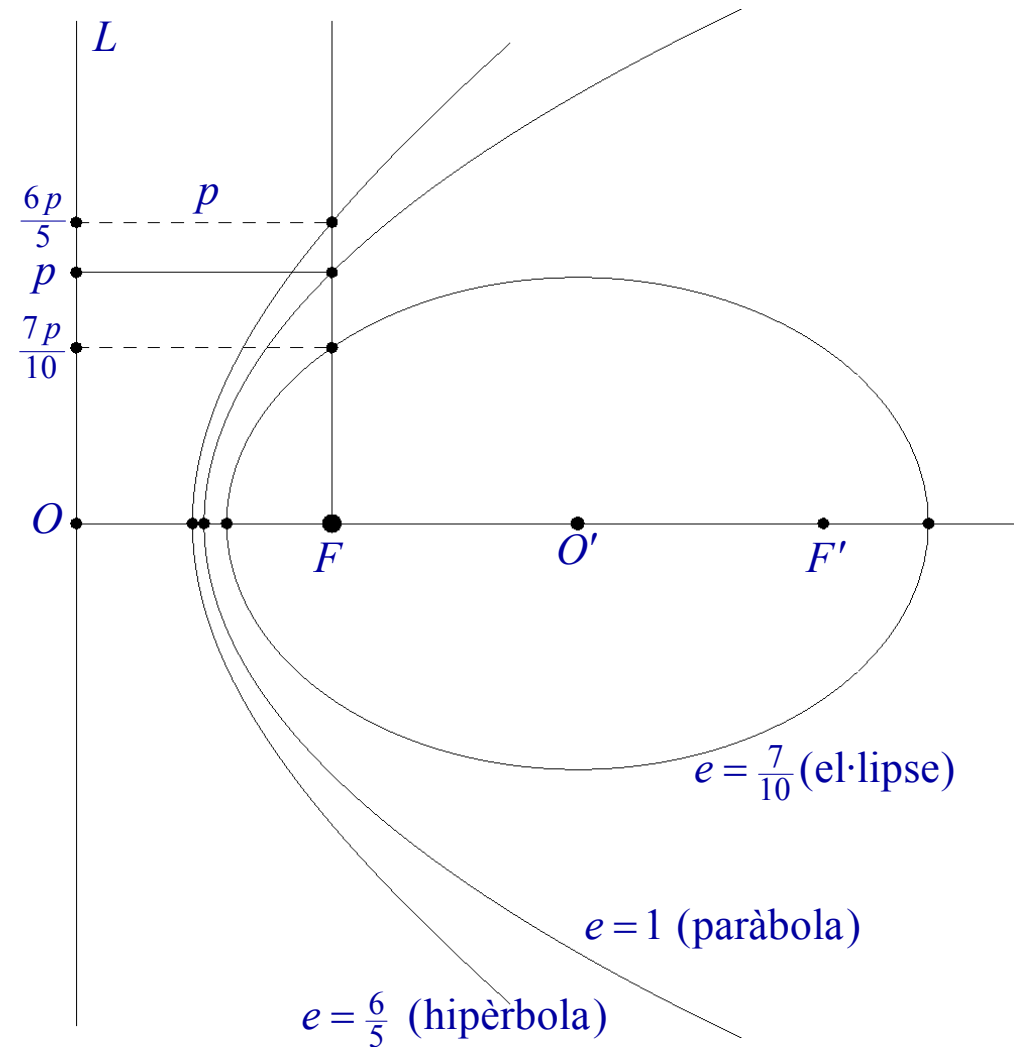
$$PQ = PP' / \cos(\gamma),$$

ja que γ és l'angle format per PP' i Π .

Vegem com establir l'enunciat anterior per mitjans analítics, com una il·lustració del mètode dels invariants. Un avantatge d'aquest procediment és que quedarà establert, ensems, que la constant ε coincideix, en el cas de l'el·lipse i la hipèrbola, amb l'*excentricitat*. Com que $\varepsilon = 1$ en el cas de la paràbola, d'ara endavant considerarem que la paràbola té excentricitat 1.

Sigui e un nombre real positiu. Si guin, en un pla euclidià, L una recta i F un punt exterior a L . Llavors, el lloc geomètric dels punts P tals que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = e$$



és una el·lipse, una paràbola o una hipèrbola segons que $e < 1$, $e = 1$ o $e > 1$. En tots el casos, F és un focus, la recta per F perpendicular a L és l'eix principal i e és l'excentricitat.

En efecte, sigui O el peu de la perpendicular a L pel punt F i considerem una referència rectangular amb origen O i eixos OF i L . L'eix Ox , doncs, coincideix amb la perpendicular a L per F . També tenim que $F = (p, 0)$, on p és la distància de F a L (en diem *paràmetre focal*).

Per un punt $P = (x, y)$, la condició $d(P, F)/d(P, L) = e$ és equivalent a la relació

$$(x - p)^2 + y^2 = e^2 x^2,$$

és a dir, a

$$[*] \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0.$$

La matriu projectiva d'aquesta cònica és

$$\begin{bmatrix} 1 - e^2 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & p^2 \end{bmatrix}.$$

Per tant $D_3 = p^2(1 - e^2) - p^2 = -p^2e^2$, $d_2 = 1 - e^2$, $d_1 = 2 - e^2$.

$D_3 = -p^2e^2 < 0 \Rightarrow$ no degenerada, i

$$d_2 = (1 - e)(1 + e) \Rightarrow \begin{cases} e < 1 & \text{el·lipse} \\ e = 1 & \text{paràbola} \\ e > 1 & \text{hipèrbola} \end{cases}$$

En el cas de l'el·lipse, és una el·lipse real, ja que $D_3d_1 < 0$.

Centre. $O' \equiv (p, 0) \begin{pmatrix} 1 - e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{p}{1 - e^2}, 0 \right)$

Equació reduïda. $(1 - e^2)x'^2 + y'^2 - \frac{p^2e^2}{1 - e^2} = 0$

Semieixos. $a = \frac{pe}{|1-e^2|}$, $b = pe/\sqrt{|1-e^2|}$.

Semidistància focal. El·lipse: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2}{1-e^2}} = \frac{pe^2}{1-e^2}$.

Hipèrbola: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{p^2 e^2}{(e^2-1)^2} + \frac{p^2 e^2}{e^2-1}} = \frac{pe^2}{e^2-1}$.

Excentricitat: $\frac{c}{a} = e$.

Focus. El·lipse: $O' - (c, 0) = \left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right) - \left(\frac{pe^2}{1-e^2}, 0\right) = (p, 0) \equiv F$.

Hipèrbola: $O' + (c, 0) = \left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right) + \left(\frac{pe^2}{e^2-1}, 0\right) = (p, 0) \equiv F$.

Remarca. En una cònica d'excentricitat e i paràmetre focal p , el punt $Q = (p, pe)$ (mateix sistema de coordenades que a la figura) és de la cònica. Té la propietat que FQ és perpendicular l'eix principal de la cònica, ja que $Q - F = (0, pe)$. Tenim, a més, que $d(F, A) = pe$. Aquesta distància es denomina **semicostat** de la cònica i posarem λ per denotar-lo (el **costat**, o **latus rectum** en terminologia tradicional, és $2\lambda = 2pe$).

Tipus de cònica	Equació reduïda
Cònica centrada ($d_2 \neq 0$)	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{D_3}{d_2} = 0$
Paràbola	$x^2 + 2 \sqrt{-\frac{D_3}{d_1^3}} y = 0$
Rectes paral·leles (distintes o coincidents)	$x^2 + \frac{D_2}{d_1^2} = 0$

Magnituds relatives a còniques	Expressió amb invariants
Àrea d'una el·lipse	$\pi \sqrt{D_3^2/d_2^3}$
Angle α format per asímptotes hipèrbola	$\cos^2(\alpha) = d_1^2/(d_1^2 - 4d_2)$
Semidistància focal cònica no degenerada	$c^2 = \frac{ D_3 }{d_2^2} \sqrt{d_1^2 - 4d_2}$