

Geometria / GQ

1. Còniques analítiques del pla euclidià

© S. Xambó

- Nocions bàsiques
- Cònica projectiva
- Matriu i matriu principal
- Equacions reduïdes
- Equacions canòniques
- Còniques centrades
- Definició alternativa

Nocions bàsiques

Donat un polinomi quadràtic real

$$[*] \quad q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

en les coordenades rectangulars (x, y) , direm que l'equació

$$[**] \quad q(x, y) = 0$$

defineix una cònica analítica, que denotarem $\mathcal{C}_q$. Atès que l'equació és lineal quan la part quadràtica (o *part principal*)

$$q_2(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

s'anul·la, suposarem que $q_2(x, y) \neq 0$.

Un punt (α, β) *pertany a* $\mathcal{C}_q$ si i només si $q(\alpha, \beta) = 0$. Es diu que el punt (α, β) és *real* si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i es diu que és *imaginari* si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $\alpha \notin \mathbb{R}$ o $\beta \notin \mathbb{R}$. Si (α, β) és un punt imaginari, direm que $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ és el seu *punt*

conjugat. Com que el polinomi $q(x, y)$ és real, $\mathcal{C}_q$ conté, amb cada un dels seus punts imaginaris, el seu conjugat.

Si (x', y') és un altre sistema de coordenades rectangulars i

$$q'(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'$$

és un polinomi quadràtic en (x', y') amb part principal no nul·la, direm que les equacions $q(x, y) = 0$ i $q'(x', y') = 0$ defineixen la *mateixa cònica analítica* si i només si existeix un nombre real ρ tal que

$$q'(x', y') = \rho q(x, y),$$

on considerem $q(x, y)$ com el polinomi en (x', y') que s'obté substituint (x, y) per les expressions del canvi de les coordenades (x, y) a les coordenades (x', y') . En particular, dos polinomis $q(x, y)$ i $q'(x', y')$ en les mateixes coordenades rectangulars defineixen la mateixa cònica si i només si existeix un nombre real ρ tal que $q'(x, y) = \rho q(x, y)$.

Cònica projectiva

Considerem la cònica analítica $\mathcal{C}_q$ definida per l'equació $[**]$. Si $[X, Y, Z]$ són les corresponents coordenades projectives, de manera que $x = X/Z$ i $y = Y/Z$, direm que l'equació

$$[\bar{*}] \quad aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2 = 0$$

defineix la *cònica projectiva* $\bar{\mathcal{C}}_q$ *associada* a la cònica $\mathcal{C}_q$. També direm que un punt $[\xi, \eta, \zeta]$ pertany a $\bar{\mathcal{C}}_q$ si i només si (ξ, η, ζ) satisfà l'equació $[\bar{*}]$.

La noció de punt real (imaginari) de la cònica projectiva $\bar{\mathcal{C}}_q$, i la noció de punt conjugat d'un punt imaginari, es defineixen de manera semblant a com hem definit aquestes nocions per la cònica analítica.

Notem que l'equació $[\bar{*}]$ determina l'equació

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

fent la substitució $[X, Y, Z] \mapsto [x, y, 1]$.

Els *punts de l'infinit* de la cònica analítica $\mathcal{C}_q$ són, per definició, els punts de la cònica projectiva $\bar{\mathcal{C}}_q$ que tenen la forma $[X, Y, 0]$, és a dir, els punts $[X, Y, 0]$ tals que

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0.$$

D'aquesta equació en diem *equació dels punts del l'infinit* de la cònica $\mathcal{C}_q$, i també *restricció a l'infinit* de la cònica projectiva $\bar{\mathcal{C}}_q$. Notem que

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = q_2(X, Y).$$

Exemples. La restricció a l'infinit de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ és $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$, la qual defineix els punts imaginaris conjugats $[a, \pm bi, 0]$.

En el cas de la hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'equació dels punts de l'infinit, $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$, defineix els punts reals $[a, \pm b, 0]$, els quals coincideixen amb els punts de l'infinit de les asímptotes $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$.

La restricció a l'infinit de la paràbola $y^2 = 2px$ és $Y^2 = 0$, la qual només és satisfeta pel punt $[1, 0, 0]$. Per analogia amb el comportament de la intersecció d'una recta i una cònica que hem vist a la introducció, direm que la recta de l'infinit és *tangent* a la paràbola i que el punt de contacte és $[1, 0, 0]$. En tot cas, la noció de recta tangent a una cònica projectiva serà estudiada en detall posteriorment.

Matriu i matriu principal d'una cònica

A una matriu simètrica real

$$[\#] \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & d & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

li podem assignar el polinomi

$$q^{\bar{A}}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

Si la *matriu principal* de $\bar{A}$, que per definició és

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

és no nul·la, el polinomi $q^{\bar{A}}(x, y)$ defineix una cònica analítica $\mathcal{C}_{q^{\bar{A}}}$, que podem denotar abreujadament $\mathcal{C}_{\bar{A}}$. Direm que aquesta cònica analítica és la **determinada per la matriu** $\bar{A}$ referida a les coordenades (x, y) . Notem que si ρ és un nombre real no nul, $\bar{A}$ i $\rho\bar{A}$ determinen, referides a un ma-

teix sistema de coordenades, la mateixa cònica analítica. Notem també que la part principal del polinomi $q^{\bar{A}}(x, y)$ és el polinomi

$$q^A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Recíprocament, donada la cònica analítica definida per l'equació [**], podem associar-li la matriu simètrica real [#], on ara a, b, c, d, e, f són els coeficients del polinomi $q(x, y)$. Com que aquesta matriu només està definida llevat d'un factor escalar no nul, posarem $[\bar{A}]$ per denotar-la i direm que és la *matriu de la cònica* relativa a les coordenades (x, y) . Per tal de poder fer la distinció quan ens calgui, de la matriu $\bar{A}$ en direm la matriu de l'equació [**]. La *part principal* d'aquesta matriu és la matriu A , on A està formada amb els coeficients de la part principal de $q(x, y)$. Observem que podem posar

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{m}^T \\ \hline \mathbf{m} & f \end{array} \right), \quad \mathbf{m} = (d, e).$$

Lema. Donada la matriu simètrica real $\bar{A}$, la cònica que determina, referida a les coordenades (x, y) , és la definida per l'equació

$$(x, y, 1)\bar{A}(x, y, 1)^T = 0.$$

La cònica projectiva associada a aquesta cònica és la definida per l'equació

$$(X, Y, Z)\bar{A}(X, Y, Z)^T = 0$$

i la restricció a l'infinit per l'equació

$$(X, Y)\bar{A}(X, Y)^T = 0.$$

Prova. $(X, Y, Z)\bar{A}(X, Y, Z)^T$

$$= (aX + bY + dZ, bX + cY + eZ, dX + eY + fZ)(X, Y, Z)^T$$

$$= aX^2 + bYX + dZX + bXY + cY^2 + eZY + dXZ + eYZ + fZ^2$$

$$= aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2.$$

Les altres dues relacions s'obtenen fent $(X, Y, Z) = (x, y, 1)$ i $Z = 0$.

La matriu $\bar{A}$ d'una cònica i la seva matriu principal, A , també s'anomenen *matriu projectiva* i *matriu de l'infinit* de la cònica.

Proposició. Siguin $\bar{A}$ i $\bar{A}'$ matrius simètriques reals 3×3 . Llavors, la cònica analítica definida per $\bar{A}$, referida a les coordenades rectangulars (x, y) , coincideix amb la cònica analítica definida per la matriu $\bar{A}'$, referida a les coordenades (x', y') , si i només si existeix una matriu $\bar{M}$ de la forma

$$\bar{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & \mathbf{p}^T \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right), M \in O(2), \mathbf{p} = (r, s), r, s \in \mathbb{R},$$

i un nombre real ρ , tals que

$$\bar{A}' = \rho \bar{M}^T \bar{A} \bar{M}.$$

Si aquest és el cas, llavors també tenim

$$A' = \rho M^T A M,$$

on A i A' són les matrius principals de $\bar{A}$ i $\bar{A}'$ (notem que la matriu principal de $\bar{M}^T \bar{A} \bar{M}$ és $M^T A M$).

Equacions reduïdes

Veurem que existeix un canvi rectangular de coordenades

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2$$

que transforma el polinomi

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

en un polinomi

$$q'(x', y') = q(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)$$

que és d'una de les formes següents:

- a) $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu$ (cas centrat)
- b) $\lambda_1 x'^2 + 2ey'$ (cas parabòlic)
- c) $\lambda_1 x'^2 + \mu$ (rectes paral·leles)

on λ_1, λ_2 i e són nombres reals no nuls i μ un nombre real arbitrari.

D'aquestes expressions en direm *formes reduïdes*.

Primera reducció. El primer pas consisteix a diagonalitzar la matriu A , és a dir, a fer un canvi tal que la nova matriu de l'infinít, $A' = M^T A M$, sigui diagonal. Com veurem tot seguit, això es pot aconseguir fent un canvi $(x, y)^T = M(x', y')^T$ amb M ortogonal (és un canvi, per tant, que deixa l'origen fix).

Proposició. Si A no és diagonal (és a dir, si $b \neq 0$) i definim

$$\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$$

per la fórmula

$$\tan(2\alpha) = 2b/(a - c)$$

(amb la convenció que $2\alpha = \pi/2$ si $a = c$) i posem

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

llavors $A' = M^T A M$ és diagonal.

Prova. Un càlcul immediat ens mostra que l'element de la posició (1,2) de la matriu $M^T AM$ és

$$b \cos(2\alpha) - \frac{1}{2}(a - c) \sin(2\alpha),$$

i l'anul·lació d'aquest element equival a la relació que hem usat per definir α . Com que $M^T AM$ és una matriu simètrica, també s'anul·la l'element de la posició (2,1) i, per tant, $M^T AM$ és una matriu diagonal. $\square$

Corol·lari. Els valors propis de A , diguem-ne λ_1 i λ_2 , són reals i

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Prova. Com que M és ortogonal, $M^T = M^{-1}$. Per tant,

$$A' = M^T AM = M^{-1} AM$$

és una matriu conjugada de A . En resulta que A i A' tenen els mateixos valors propis. Com que A' és real i diagonal, això acaba la prova. $\square$

Remarca. Els valors propis λ_1 i λ_2 de A s'obtenen resolent l'equació

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0, \text{ és a dir,}$$

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

(es coneix amb el nom d'*equació secular* de A). Així doncs,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2},$$

ja que $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$. Aquesta expressió confirma que λ_1 i λ_2 són reals.

Segona reducció. La proposició anterior ens permet reduir l'equació de la cònica a una de la forma

$$[\diamond] \quad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Hi ha dues situacions a considerar: $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ i $\lambda_1 \lambda_2 = 0$. Si es dóna aquest segon cas, hi ha un valor propi nul i un de no nul (recordem que hem suposat $A \neq 0$). Intercanviant els eixos de la referència si calgués, sempre podem suposar que $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$. A més, canviant l'equació de signe si fos $\lambda_1 < 0$, podem suposar, en qualsevol cas, que $\lambda_1 > 0$. En resum, suposarem que en l'equació $[\diamond]$ es compleix $\lambda_1 > 0$ i, d'aquesta manera, els dos casos es corresponen a les condicions $\lambda_2 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$, respectivament.

Ara l'eina bàsica per seguir el procés de reducció és la **compleció del quadrat**, és a dir, la identitat

$$\lambda x^2 + 2dx = \lambda x'^2 + k, \quad x' = x + d/\lambda \text{ i } k = -d^2/\lambda.$$

Si estem en el cas $\lambda_2 \neq 0$, llavors dues complecions del quadrat, i el corresponent canvi de coordenades (el canvi d'origen $x = x' - d/\lambda_1$, $y = y' - e/\lambda_2$), ens permeten de suposar que $d = e = 0$, amb la qual cosa obtenim una equació reduïda del cas centrat:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu = 0.$$

I si estem en el cas $\lambda_2 = 0$, llavors podem fer una compleció del quadrat, amb la qual cosa arribem a una equació sense terme lineal en x . És a dir, podem suposar que l'equació [♦] és

$$\lambda_1 x^2 + 2ey + f = 0.$$

Si $e = 0$, aquesta equació és de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + \mu = 0,$$

que és una equació reduïda de rectes paral·leles, i si $e \neq 0$, un canvi d'origen de la forma $y = y' - \frac{f}{2e}$ ens permet de suposar que $f = 0$, amb la qual cosa s'obté una equació de la forma

$$\lambda_1 x'^2 + 2ey' = 0$$

que és una equació reduïda de tipus parabòlic.

Equacions canòniques

Comencem amb una reduïda de tipus centrat

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \mu = 0$$

i procedim a discutir els diversos casos possibles. Si $\mu \neq 0$, posant

$$a = \sqrt{|\mu|/\lambda_1}, \quad b = \sqrt{|\mu|/|\lambda_1|}$$

obtenim que l'equació és equivalent a una de les tres formes següents:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{el·lipse})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{el·lipse imaginària})$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{hipèrbola})$$

Si $\mu = 0$, llavors podem posar

$$a = 1/\sqrt{\lambda_1}, \quad b = 1/\sqrt{|\lambda_2|}$$

i obtenim que l'equació adopta la forma següent:

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

on $\varepsilon = 1$ si $\lambda_2 > 0$ i $\varepsilon = -1$ si $\lambda_2 < 0$. La segona possibilitat ens dóna dues rectes reals,

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0,$$

i la primera dues rectes imaginàries conjugades,

$$\frac{x}{a} \pm i \frac{y}{b} = 0.$$

Pel que fa a la reduïda de tipus parabòlic, $\lambda_1 x^2 + 2ey = 0$, és clar que és equivalent a l'equació

$$x^2 + 2py = 0, \text{ amb } p = e/\lambda_1.$$

Com que $py = (-p)(-y)$, sempre podem suposar que $p > 0$ (altrament, es pot canviar l'orientació de l'eix Oy). Veiem, doncs, que es tracta d'una paràbola amb paràmetre focal p i amb eix coincident amb l'eix Oy .

Finalment, la reduïda de tipus $\lambda_1 x^2 + \mu = 0$ és equivalent, posant $k = \sqrt{|\mu|/\lambda_1}$ quan $\mu \neq 0$, a una de les tres equacions següents:

$$x^2 = k^2 \quad (\text{parell de rectes reals paral·leles, } x = \pm k)$$

$$x^2 = -k^2 \quad (\text{parell de rectes imaginàries conjugades paral·leles, } x = \pm ik)$$

$$x^2 = 0 \quad (\text{recta doble})$$

Còniques centrades

Diem que una cònica és *centrada* si $\det(A) \neq 0$. Segons el que ja hem dit en aquest apartat, són les còniques que donen lloc a reduïdes de tipus centrat.

Proposició. Suposem que la cònica és centrada. Llavors existeix un únic punt (x_0, y_0) respecte del qual la cònica és simètrica. A més, aquest punt és igual a $-(d, e)A^{-1}$.

Prova. Suposem que el punt (x_0, y_0) és un centre de simetria de la cònica. Si fem el canvi d'origen $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, llavors la cònica, referida a les coordenades (x', y') , ha de ser simètrica respecte de l'origen. Això significa que l'equació

$$(x' + x_0, y' + y_0)A(x' + x_0, y' + y_0)^T + 2(d, e)(x' + x_0, y' + y_0)^T + f = 0$$

ha de ser invariant per la simetria central $(x', y') \mapsto (-x', -y')$, és a dir, que no ha de tenir termes lineals en x' i y' . Com que els termes lineals en x' i y' de l'equació anterior resulten ser

$$2(x_0, y_0)A(x', y')^T + 2(d, e)(x', y')^T,$$

veiem que la condició per tal que (x_0, y_0) sigui centre de simetria és l'equació matricial

$$(x_0, y_0)A + (d, e) = 0.$$

Però com que A és una matriu invertible,

$$(x_0, y_0) = -(d, e)A^{-1}$$

és la seva única solució.

L'únic centre de simetria, $-(d, e)A^{-1}$, d'una cònica centrada s'anomena *centre* de la cònica.

Notem que l'equació $(x_0, y_0)A + (d, e) = 0$, que determina el centre, es pot escriure, separant les dues components, com el sistema

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0 \end{cases}$$

Aquestes equacions, que s'anomenen *equacions del centre*, es poden recordar més fàcilment si observem que

$$\begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$$

són (la meitat de) les derivades parcials de l'equació de la cònica respecte de x i y , respectivament. En general, representen el lloc geomètric dels punts que són centres de simetria de la cònica i per això s'anomenen *equacions dels centres*.

Definició alternativa de les còniques no degenerades

A la introducció hem vist que la paràbola és el lloc geomètric dels punts P que compleixen la condició $d(P, F) = d(P, L)$, on F és el focus i L la directriu. Remarcablement, l'argument que hem usat per demostrar aquest fet es pot adaptar fàcilment al cas d'una el·lipse (suposant que no és circumferència), o al cas d'una hipèrbola, per demostrar que, en qualsevol dels dos casos, la cònica és el lloc geomètric dels punts P tals que

$$d(P, F) = \varepsilon \cdot d(P, L),$$

on F és un focus, L la directriu d'aquest focus (es defineix com en el cas de la paràbola), $\varepsilon = \cos(\gamma) / \cos(\alpha)$, amb α l'angle entre l'eix del con i una generatriu i γ l'angle entre el pla de la cònica i l'eix del con. Notem que, amb les notacions de la figura del cas de la paràbola, en lloc de

$$PQ = PP' / \cos(\alpha)$$

tindrem

$$PQ = PP' / \cos(\gamma),$$

ja que γ és l'angle format per PP' i Π .

Vegem com establir l'enunciat anterior per mitjans analítics, com una il·lustració dels mètodes de l'apartat anterior. Un avantatge d'aquest procediment és que quedarà establert, ensems, que la constant ε coincideix, en el cas de l'el·lipse i la hipèrbola, amb l'*excentricitat*. Com que $\varepsilon = 1$ en el cas de la paràbola, d'ara endavant considerarem que la paràbola té excentricitat 1.

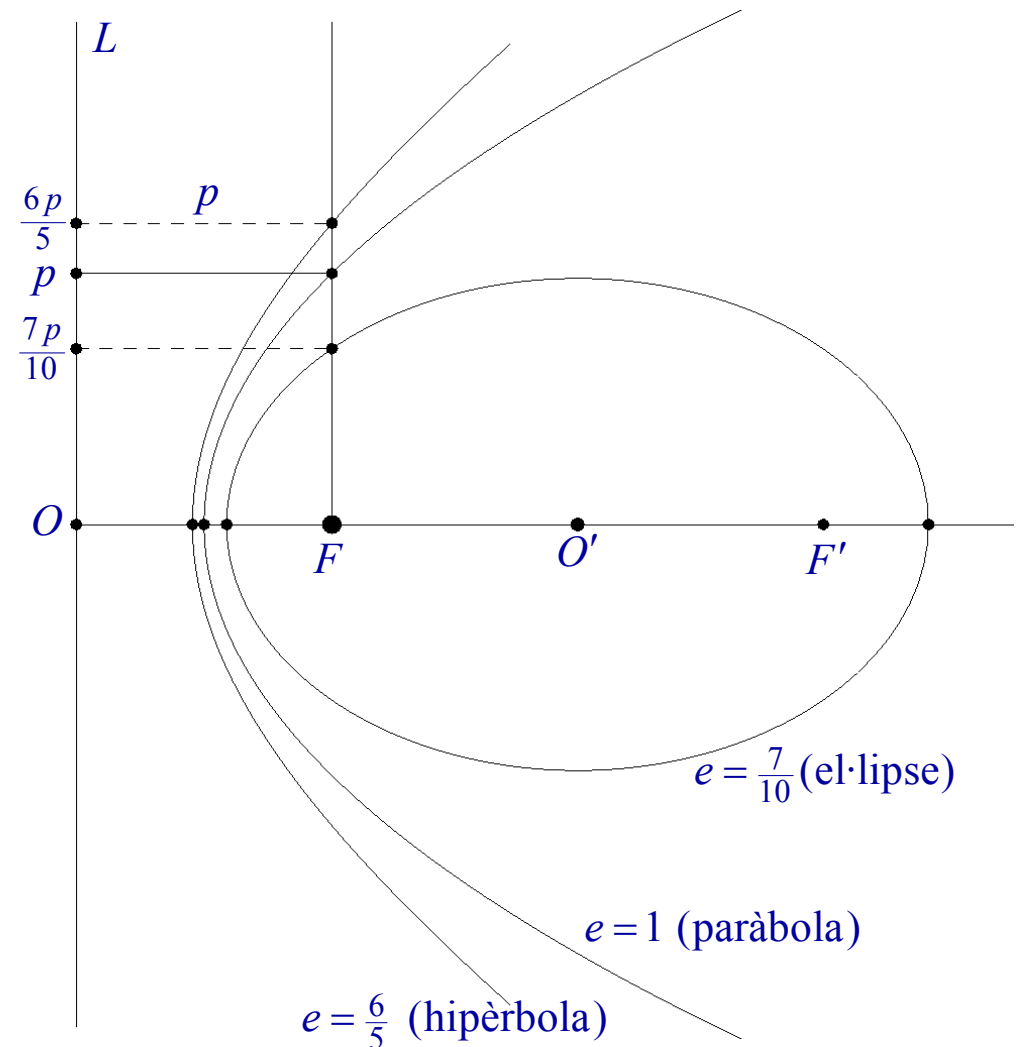
Sigui e un nombre real positiu. Siguin, en un pla euclidià, L una recta i F un punt exterior a L . Llavors, el lloc geomètric dels punts P tals que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = e$$

és una el·lipse, una paràbola o una hipèrbola segons que $e < 1$, $e = 1$ o $e > 1$. En tots el casos, F és un focus, la recta per F perpendicular a L és l'eix principal i e és l'excentricitat.

En efecte, sigui O el peu de la perpendicular a L pel punt F i considerem una referència rectangular amb origen O i eixos OF i L . L'eix Ox , doncs, coincideix amb la perpendicular a L per F . També tenim que $F = (p, 0)$, on p és la distància de F a L (en diem *paràmetre focal*).

Per un punt $P = (x, y)$, la condició $d(P, F)/d(P, L) = e$ és equivalent a la relació



$$(x - p)^2 + y^2 = e^2 x^2,$$

és a dir, a

$$[*] \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0.$$

Si $e < 1$, llavors $1 - e^2 > 0$ i per compleció del quadrat obtenim l'equació

$$(1 - e^2) \left(x - \frac{p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2}$$

la qual representa una el·lipse de centre el punt $O' = (\frac{p}{1 - e^2}, 0)$, eix principal Ox i semieixos

$$a = \frac{ep}{1 - e^2}, \quad b = \frac{ep}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Un càlcul senzill mostra que $c = \frac{e^2 p}{1 - e^2}$, d'on resulta que l'excentricitat de l'el·lipse és $c/a = e$. Finalment, F és un focus de l'el·lipse, ja que $O' - (c, 0) = (p, 0) = F$.

Si $e = 1$, l'equació [*] del lloc geomètric esdevé

$$y^2 - 2px + p^2 = 0,$$

que es tracta d'una paràbola per a la qual el punt $F = (p, 0)$ és el focus i la recta Ox l'eix.

Manca discutir el cas $e > 1$. Canviant de signe l'equació [*], obtenim l'equació equivalent

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 + 2px - p^2 = 0$$

que, completant el quadrat, es transforma en

$$(e^2 - 1) \left(x + \frac{p}{e^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}.$$

Es tracta, doncs, d'una hipèrbola amb centre al punt $(-\frac{p}{e^2 - 1}, 0)$ i semieixos

$$a = \frac{ep}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{ep}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

Per càlcul s'obté que $c = \frac{e^2 p}{e^2 - 1}$, d'on resulta que $F = (p, 0)$ és un focus i que e és l'excentricitat.

En una cònica d'excentricitat e i paràmetre focal p , el punt $Q = (p, pe)$ (mateix sistema de coordenades que a la figura) és de la cònica. Té la propietat que FQ és perpendicular l'eix principal de la cònica, ja que $Q - F = (0, pe)$. Tenim, a més, que $d(F, A) = pe$. Aquesta distància es denomina *semicostat* de la cònica i posarem λ per denotar-lo (el *costat*, o *latus rectum* en terminologia tradicional, és $2\lambda = 2pe$).