

Geometria / Còniques i Quàdriques (GQ)

© S. Xambó

- Seccions còniques: alguns aspectes geomètrics
- Tractament analític de les còniques
- Classificacions de les còniques
- Propietats projectives, afins i mètriques de les còniques.
- Tractament analític de les quàdriques.
- Classificacions de les quàdriques.
- Propietats projectives, afins i mètriques de les quàdriques.

Geometria / GQ

0. Seccions còniques

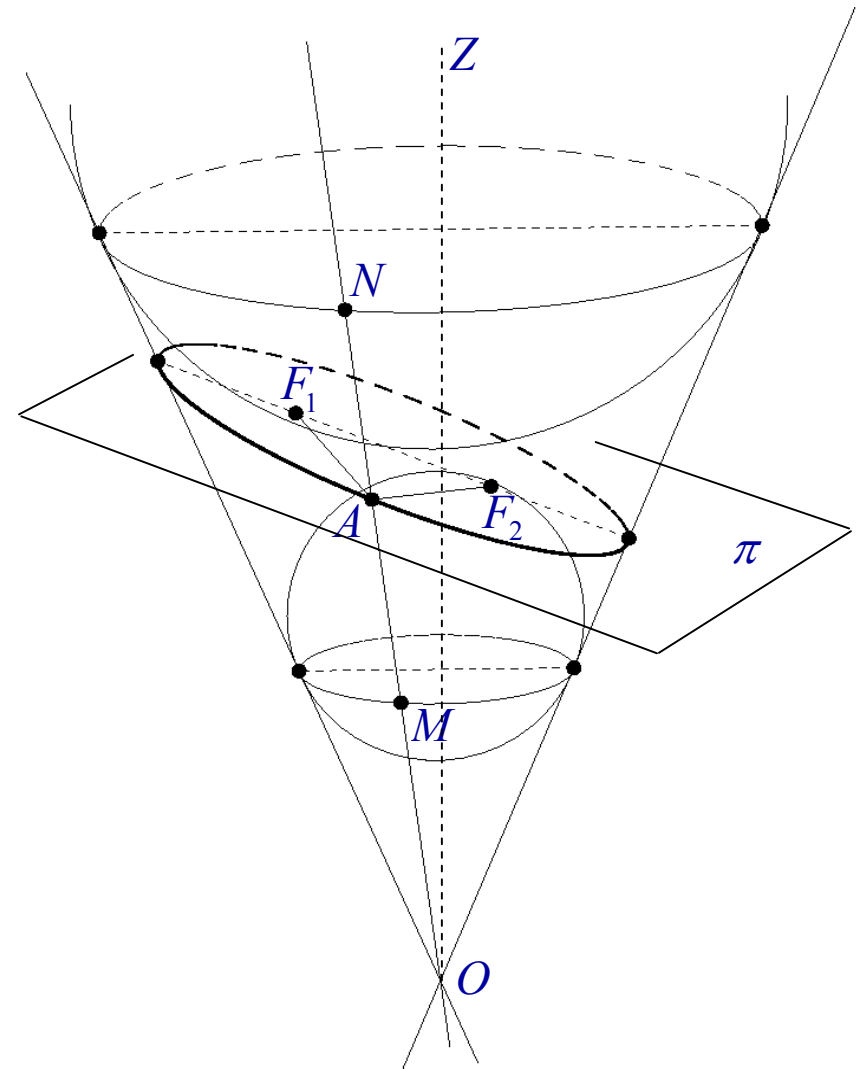
© S. Xambó

El·lipse

La figura adjunta representa la secció d'un con circular recte per un pla π que forma un angle amb l'eix OZ d'aquest con superior a l'angle α que OZ forma amb una generatriu qualsevol del con. L'observació fonamental és el teorema de Dandelin (1794-1847): Els punts A d'aquesta secció compleixen

$$AF_1 + AF_2 = MN = \text{constant},$$

on F_1 i F_2 són els punts de contacte amb el pla π de les dues esferes tangents al con i a π .¹



En efecte, $AF_2 = AM$, ja que AF_2 i AM són dues tangents a una mateixa esfera. Anàlogament, $AF_1 = AN$. Ara l'enunciat és conseqüència del fet que MN té el mateix valor per a qualsevol generatriu del con.

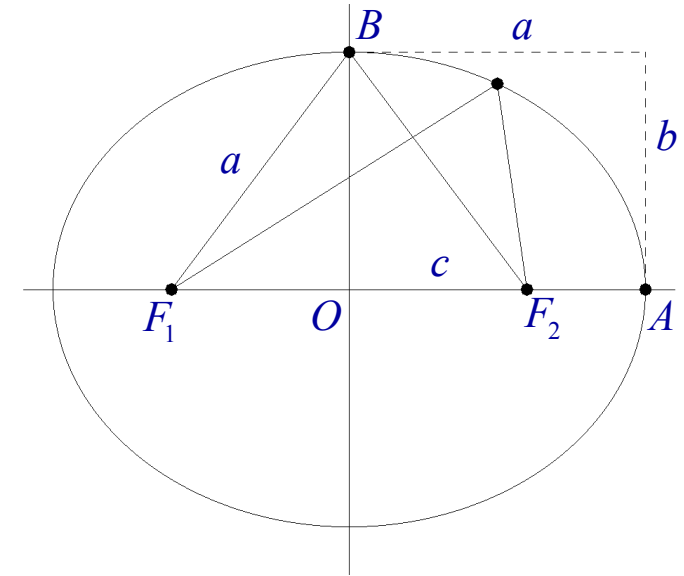
Prenent la referència rectangular de π amb eix Ox la recta F_1F_2 i origen el punt mitjà del segment F_1F_2 , i amb les notacions de la figura, els punts (x, y) de la secció compleixen

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

de la qual en resulta l'equació

$$[*] \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Direm que és l'*equació canònica* de l'el·lipse, i a i b s'anomenen *semieixos* (principal i secundari). Els punts F_1 i F_2 s'anomenen *focus* i O el *centre* de l'el·lipse. Els punts $(0, \pm a)$ són els *vèrtexs principals* i $(0, \pm b)$ els *vèrtexs secundaris*. Notem la parametrització



$$x = a \cos(t), \quad y = b \sin(t).$$

Excentricitat: $e = c/a$ ($0 \leq e < 1$).

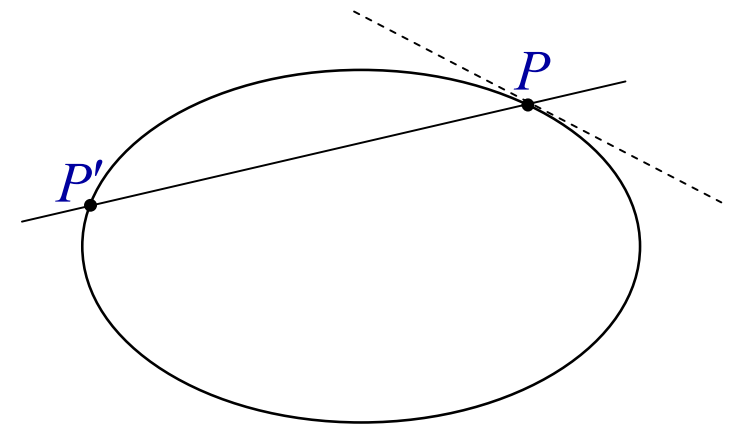
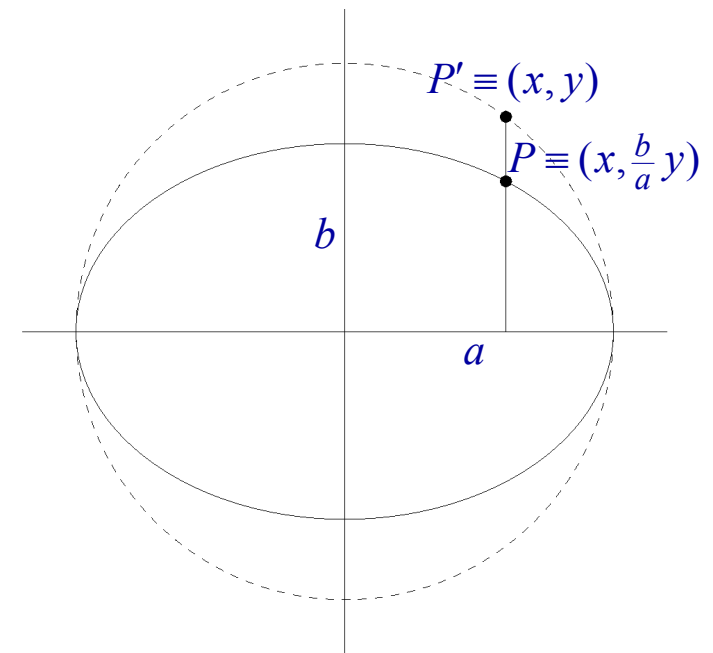
Àrea. Del fet que l'afinitat $(x, y) \mapsto \left(x, \frac{a}{b}y\right)$

transforma la circumferència de radi a en l'el·lipse $[*]$, en deduïm que l'àrea de l'el·lipse és $\pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab$.

Tangent en un punt. Sigui $P(x_0, y_0)$ un punt de l'el·lipse $[*]$. Considerem una recta per P donada per equacions paramètriques

$$x = x_0 + \xi t, \quad y = y_0 + \eta t,$$

on $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$. Per trobar les interseccions d'aquesta recta amb l'el·lipse, hem de trobar les solucions t de l'equació



$$\frac{(x_0 + \xi t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + \eta t)^2}{b^2} = 1.$$

Fent operacions, i recordant que P és un punt de l'el·lipse, aquesta equació resulta ser equivalent a

$$2 \left(\frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} \right) t + \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right) t^2 = 0.$$

La solució $t = 0$ ens dona el punt P . L'altra solució,

$$t = -2 \left(\frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} \right) / \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right),$$

ens dona un segon punt d'intersecció. Aquest punt coincideix amb P si i només si

$$\frac{x_0 \xi}{a^2} + \frac{y_0 \eta}{b^2} = 0,$$

és a dir, si i només si la recta coincideix amb la recta que passa per P amb vector director $(y_0/b^2, -x_0/a^2)$. Aquesta recta s'anomena *tangent* a l'el·lipse en el punt P i és clar que la seva equació cartesiana és

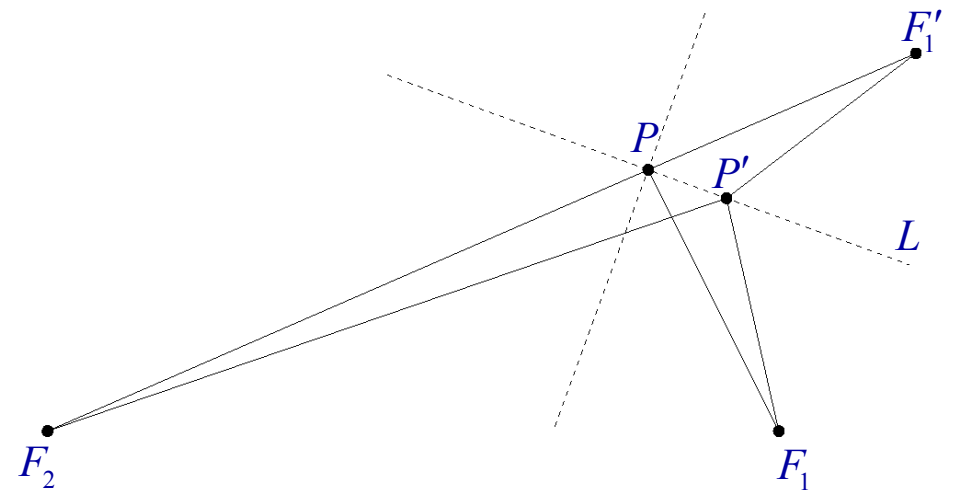
$$\frac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2} = 0,$$

que equival a

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

En resum: *Una recta per un punt P d'una el·lipse la talla en el punt P i exactament un altre punt P' tal que $P' \neq P$ excepte quan la recta és la tangent a l'el·lipse en el punt P . En aquest cas es diu que P és el **punt de contacte** de la tangent i l'el·lipse.*

Proposició (Propietat focal de l'el·lipse). Si P és un punt de l'el·lipse $[*]$, la tangent en el punt P coincideix amb la bisectriu exterior de l'angle $\widehat{F_1PF_2}$.



Prova. Sigui L la bisectriu exterior de l'angle $\widehat{F_1PF_2}$. Com que L passa per P , per veure que L és la tangent a l'el·lipse en el punt P serà suficient

demostrar que cap dels punts $P' \in L - \{P\}$ és de l'el·lipse. A tal fi, considerem el simètric del punt F_1 respecte de L . Com que L és la bisectriu exterior de $\widehat{F_1 P F_2}$, el punt P pertany al segment $F_2 F'_1$. Ara tenim

$$2a = PF_1 + PF_2 = PF'_1 + PF_2 = F'_1 F_2 < P'F_1 + P'F_2,$$

de la qual cosa segueix que P' no és de l'el·lipse.

Remarca. La demostració anterior prova que el lloc geomètric del punt F'_1 simètric de F_1 respecte d'una tangent variable, és la circumferència amb centre al focus F_2 de l'el·lipse i radi $2a$. Aquesta circumferència és anomenada *circumferència focal* de l'el·lipse corresponent al focus F_2 .

Hipèrbola

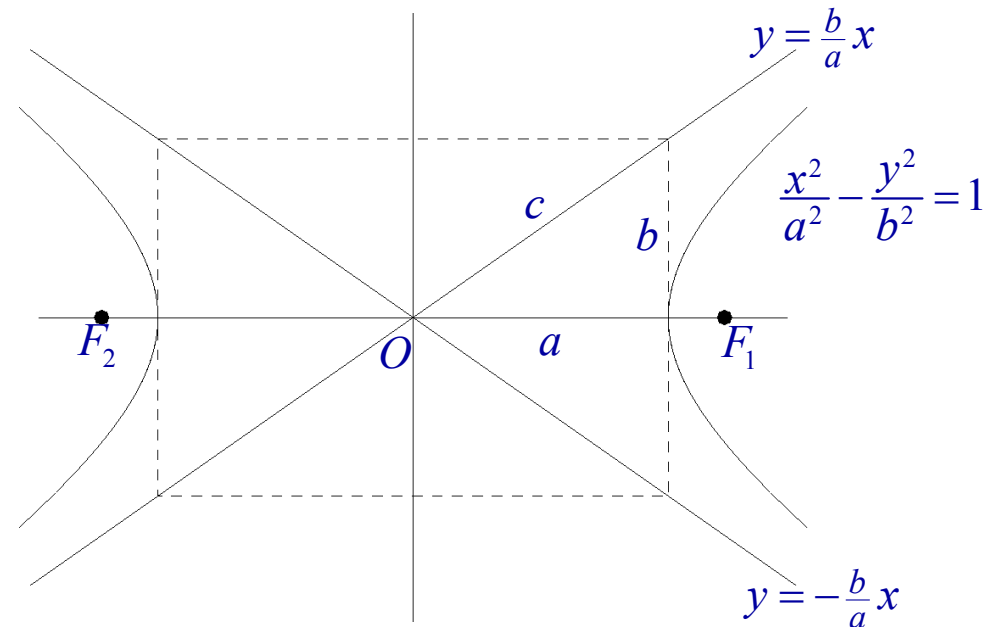
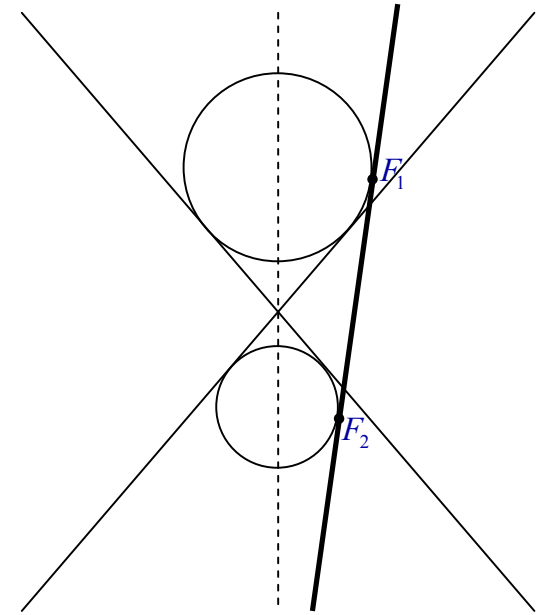
Si l'angle que el pla π forma amb l'eix del con és inferior a l'angle α entre l'eix i una generatriu, la figura resultant és la **hipèrbola** i els seus punts A compleixen

$$|AF_1 - AF_2| = \text{constant} (= 2a).$$

Prenent coordenades rectangulars com en el cas de l'el·lipse, obtenim l'equació canònica de la hipèrbola:

$$[**] \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on posem $2c$ per denotar la distància entre els dos **focus** (els punts F_1 i F_2) i $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



Semieixos: a (principal) i b (secundari).

Excentricitat: La constant

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

Vèrtexs: Els punts $(0, \pm a)$.

Parametrització: $x = a \cosh(t)$, $y = b \sinh(t)$.

Asímtotes: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Tangent en un punt $P(x_0, y_0)$: $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ (les rectes per P diferents de la tangent tallen la hipèrbola en el punt P i exactament un altre punt $P' \neq P$; la tangent en el punt P , en canvi, no talla la hipèrbola en cap altre punt).

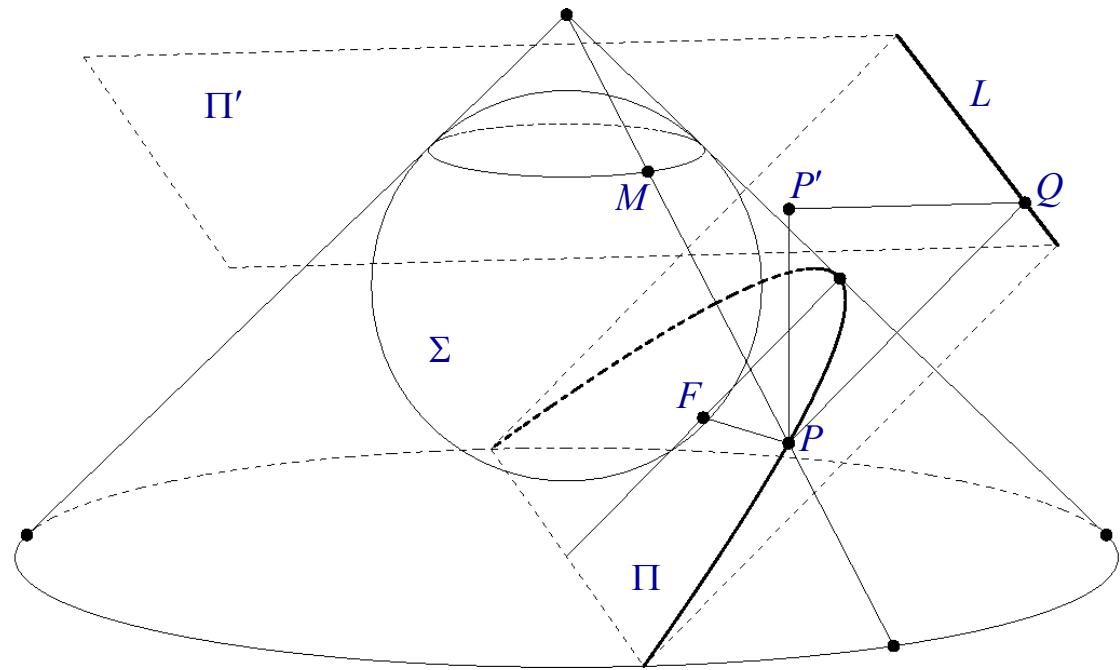
Proposició (Propietat focal de la hipèrbola). Si P és un punt de la hipèrbola $[**]$, la tangent en el punt P coincideix amb la bisectriu interior de l'angle $\widehat{F_1 P F_2}$. A més, el lloc geomètric del simètric F_1' de F_1 respecte

d'una tangent variable és la circumferència de centre l'altre focus, F_2 , i radi $2a$ (aquesta circumferència es diu *circumferència focal* de la hipèrbo-la relativa al focus F_2).

Paràbola

Si l'angle que el pla π forma amb l'eix del con és igual a l'angle α entre l'eix i una generatriu, la figura resultant és la *paràbola* i els seus punts P compleixen, amb les notacions de la figura ad-junta,

$$d(P, F) = d(P, L).$$



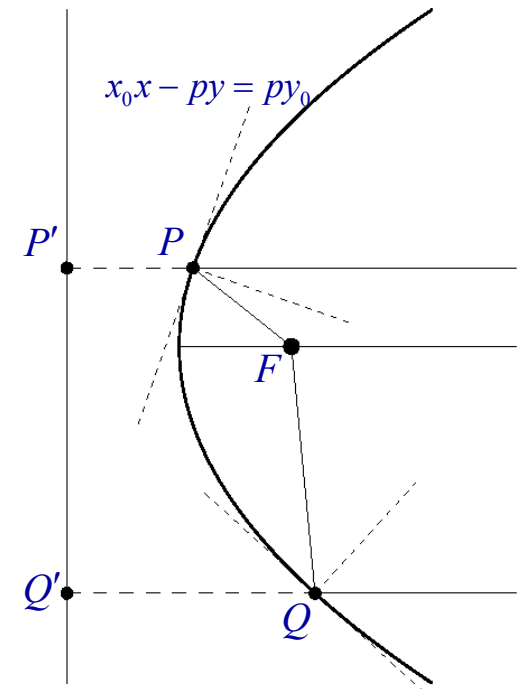
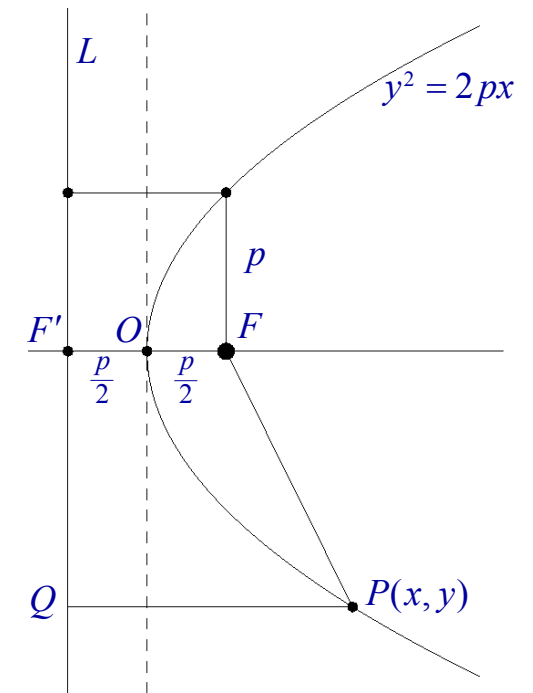
Prenent coordenades de manera que Ox sigui a la perpendicular a L per F , amb O el punt mitjà de FF' , F' la projecció ortogonal de F sobre L , l'equació de la paràbola es

$$y^2 = 2px.$$

La tangent en un punt P , que es defineix de manera anàloga a com s'ha fet per l'el·lipse i la hipèrbola, té equació

$$x_0x - py = py_0.$$

La propietat focal en aquest cas és que la tangent és la bisectriu exterior de l'angle que formen PF i la recta per P paral·lela a l'eix.



Notes

1. A la figura adjunta es mostra una secció del con i de les esferes pel pla OF_1F_2 . Inversament, donada la secció podem generar el con i les esferes per rotació al voltant de OZ . Indiquem com es pot construir aquesta secció. Donades les rectes OP_1 i OP_2 , i la recta transversal Q_1Q_2 , construïm el punt C intersecció de la bisectriu OZ de $\widehat{P_1OP_2}$ i la bisectriu de $\widehat{Q_1Q_2P_2}$. Aleshores F_1 és la projecció ortogonal de C sobre Q_1Q_2 . La construcció de F_2 és similar: és la projecció ortogonal sobre Q_1Q_2 del punt C' obtingut tallant OZ amb la bisectriu de l'angle $\widehat{Q_1Q_2O}$.

