

Geometria / GP

5. Projectivitats

© S. Xambó

- Definició de projectivitat
- Algunes propietats bàsiques
- Teorema fonamental de les projectivitats
- Representació d'una projectivitat en coordenades
- Exemple: involucions de $\mathbb{P}^1$
- Extensió projectiva d'una afinitat
- Caracterització del grup afí com a subgrup del grup projectiu
- Expressió de l'homografia $\bar{\varphi}$ en coordenades
- Punts fixos per una homografia
- Exemple: homologies
- Projeccions
- Perspectivitats
- Projectivitats de Poncelet
- Teorema del quadrangle complet
- Construcció geomètrica del quart harmònic

Definició de projectivitat

Siguin $\mathbb{P} = [E]$ i $\mathbb{P}' = [E']$ dos espais projectius.

Donada una aplicació lineal injectiva $f: E \rightarrow E'$, posarem $[f]: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ per denotar l'aplicació tal que $[x] \mapsto [f(x)]$.

- Està ben definida, ja que $[f(\lambda x)] = [\lambda f(x)] = [f(x)]$ per a tot $\lambda \in K - \{0\}$.
- $[\mu f] = [f]$ ($\mu \in K - \{0\}$).

Direm que una aplicació $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ és una *projectivitat* si existeix un isomorfisme lineal $f: E \rightarrow E'$ tal que $\varphi = [f]$.

Les projectivitats d'un espai projectiu $\mathbb{P}$ en ell mateix s'anomenen *homografies* de $\mathbb{P}$.

■ Una projectivitat transforma varietats lineals en varietats lineals de la mateixa dimensió: $[f]([F]) = [f(F)]$ per a tot subespai F de E .

- Si $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ és una projectivitat i L i L' són varietats lineals de $\mathbb{P}$,

$$\varphi(L \vee L') = \varphi(L) \vee \varphi(L'), \quad \varphi(L \cap L') = \varphi(L) \cap \varphi(L').$$

Algunes propietats bàsiques

- **La composició de projectivitats és una projectivitat.** De fet, si E, E' i E'' són espais vectorials i $f: E \rightarrow E'$ i $f': E' \rightarrow E''$ són aplicacions lineals injectives, llavors $[f'] \circ [f] = [f' \circ f]$.
- Si $f: E \rightarrow E'$ és un isomorfisme lineal, $[f]$ és bijectiva i la projectivitat $[f^{-1}]$ és inversa de la projectivitat $[f]$: $[f]^{-1} = [f^{-1}]$.
- Les homografies d'un espai projectiu $\mathbb{P}$ formen un grup amb l'operació de composició.
D'aquest grup, se'n diu el **grup projectiu** de $\mathbb{P}$, i posarem $PGL(\mathbb{P})$ per denotar-lo.
- **Invariància projectiva de la raó doble.** Si $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \overline{\mathbb{P}}^1$ és una projectivitat, llavors $\rho(\varphi(Q_1), \varphi(Q_2), \varphi(Q_3), \varphi(Q_4)) = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$. En efecte, referits els punts de $\mathbb{P}^1$ a una referència $\mathcal{S}$, diguem $Q_i \equiv [x_i, y_i]_{\mathcal{S}}$, llavors $\varphi(Q_i) = [x_i, y_i]_{\varphi(\mathcal{S})}$ i l'enunciat s'obté directament de la definició de raó doble.

Teorema fonamental de les projectivitats

Sigui $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n; U]$ una referència de l'espai projectiu $\mathbb{P}$ i $\mathcal{R}' = [P'_0, P'_1, \dots, P'_n; U']$ una referència de l'espai projectiu $\mathbb{P}'$ ($\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}'$ tenen doncs la mateixa dimensió). Llavors existeix una única projectivitat $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ tal que $\varphi(P_i) = P'_i$ ($0 \leq i \leq n$) i $\varphi(U) = U'$ (abreujadament, $\varphi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$).

Prova. Sigui $e_0, e_1, \dots, e_n$ una base de E adaptada a $\mathcal{R}$ i $e'_0, e'_1, \dots, e'_n$ una base de E' adaptada a $\mathcal{R}'$.

Sigui $f: E \rightarrow E'$ l'única aplicació lineal tal que $f(e_i) = e'_i$. Llavors f és un isomorfisme lineal i la projectivitat $[f]$ transforma $P_i = [e_i]$ en $[e'_i] = P'_i$ i $U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n]$ en $[e'_0 + e'_1 + \dots + e'_n] = U'$.

Per veure la unicitat, sigui $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ una projectivitat que transforma $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$. N'hi haurà prou si mostrem que $\varphi = [f]$. Sigui $g: E \rightarrow E'$ un isomorfisme lineal tal que $\varphi = [g]$. Com que

$P'_i = \varphi(P_i) = [g(e_i)]$ i $U' = \varphi(U) = [g(e_0) + g(e_1) + \dots + g(e_n)]$, $g(e_0), g(e_1), \dots, g(e_n)$ és una base de E' adaptada a $\mathcal{R}'$. Per la unicitat, llevat d'un factor escalar, de les bases adaptades a una referència, exis-

teix un $\lambda \in K - \{0\}$ tal que $g(e_i) = \lambda e'_i$. Ara $e'_i = f(e_i)$, per definició de f , i així $g = \lambda f$, d'on $\varphi = [g] = [\lambda f] = [f]$.

Exemple. Siguin Q_i , $i = 1, \dots, 4$, punts diferents de $\mathbb{P}^1$ i $\bar{Q}_i$, $i = 1, \dots, 4$, punts diferents de $\mathbb{P}^1$. Llavors existeix una projectivitat $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{\mathbb{P}}^1$ tal que $\varphi(Q_i) = \bar{Q}_i$ si i només si $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{Q}_4)$, i en aquest cas φ és única.

La condició es clarament necessària, per la conservació de la raó doble per projectivitats. Per veure l'afirmació recíproca, sigui $\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{\mathbb{P}}^1$ la projectivitat que transforma la referència $[Q_1, Q_2; Q_3]$ de $\mathbb{P}^1$ en la referència $[Q'_1, Q'_2; Q'_3]$ de $\mathbb{P}'$. Com que Q_4 és el punt que té coordenada absoluta $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ en la referència $[Q_1, Q_2; Q_3]$, $\varphi(Q_4)$ és el punt que té coordenada absoluta ρ en la referència $[Q'_1, Q'_2; Q'_3]$. Però aquest punt és Q'_4 si $\rho(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{Q}_4) = \rho$.

Representació d'una projectivitat en coordenades

Siguin $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ una projectivitat, $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$ una referència de $\mathbb{P}$ i $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n; U']$ una referència de $\mathbb{P}'$. Sigui $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$ una base adaptada a $\mathcal{R}$ i $\mathbf{e}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ una base adaptada a $\mathcal{R}'$. Si $\varphi = [f]$, sigui M la matriu de f respecte de les bases $\mathbf{e}$ i $\mathbf{e}'$, és a dir, $f(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'M$. Com que $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ i f estan definides llevat d'un factor escalar no nul, $[M]$ només depèn de φ i direm que és la *matriu de φ respecte de les referències $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$* .

Siguin $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ i $\xi' = (\xi'_0, \dots, \xi'_n)$ les $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt P de $\mathbb{P}$ les $\mathcal{R}'$ -coordenades de $\varphi(P)$, respectivament. Llavors

$$[\xi'^T] = [M][\xi^T].$$

En efecte, $\mathbf{e}\xi^T$ és un representant de P . Per tant, $f(\mathbf{e}\xi^T) = f(\mathbf{e})\xi^T = \mathbf{e}'M\xi^T$ és un representant de $\varphi(P)$. Com que $\mathbf{e}'\xi'^T$ és un altre representant de $\varphi(P)$, la fórmula en resulta immediatament.

Exemple: involucions de $\mathbb{P}^1$

Sigui $\varphi \neq Id$ una *involució* de $\mathbb{P}^1$ (és a dir, una homografia tal que φ^2 és la identitat). Si la matriu de φ , en una certa referència, és $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, llavors $a + d = 0$. Recíprocament, si $a + d = 0$, llavors φ és una involució i $\varphi \neq Id$.

En efecte, com que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

ha de ser $[I_2]$, és necessari que $d^2 = a^2$, és a dir, $a + d = 0$ o $a - d = 0$. Si fos $a + d \neq 0$, llavors seria $\varphi = Id$, ja que tindríem $d = a$ i $b = c = 0$. Així, doncs, $a + d = 0$, i el càlcul anterior mostra que la matriu de φ^2 és $[I_2]$. Notem que $a^2 + bc = -(ad - bc) \neq 0$.

Extensió projectiva d'una afinitat

Sigui $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ una afinitat de l'espai afí $(\mathbb{A}, V)$ i $f: V \rightarrow V$ el seu automorfisme lineal associat ($f = \tilde{\varphi}$).

Teorema. (1) Existeix una única homografia $\bar{\varphi}$ de $\bar{\mathbb{A}}$ tal que $\bar{\varphi}(\bar{P}) = \overline{\varphi(P)}$ ($P \in \mathbb{A}$). (2) L'homografia $\bar{\varphi}$ deixa $\mathbb{A}_\infty$ invariant i $\bar{\varphi}|_{\mathbb{A}_\infty} = [f]$.

Prova. Sigui $w \in V$ el vector tal que $\varphi(O) = O + w$. Sigui $\bar{f}: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ l'única aplicació lineal tal que $e_0 \mapsto e_0 + w$ i $\bar{f}|_V = f$. Com que $e_0 \notin V$ i f és un automorfisme de V , $\bar{f}$ és un automorfisme de $\bar{V}$. Sigui $\bar{\varphi} = [\bar{f}]$. Per definició tenim, doncs, $\bar{\varphi}([\lambda e_0 + v]) = [\lambda(e_0 + w) + f(v)]$. Si ara P és un punt de $\mathbb{A}$ i $P = O + v$ ($v \in V$),

$$\bar{\varphi}(\bar{P}) = \bar{\varphi}([e_0 + v]) = [e_0 + w + f(v)] = \overline{O + w + f(v)} = \overline{\varphi(P)},$$

i això demostra l'existència de $\bar{\varphi}$. Notem que

$$\bar{\varphi}|_{\mathbb{A}_\infty} = [\bar{f}]|_{[V]} = [\bar{f}|_V] = [f].$$

Per veure la unicitat, sigui ψ una homografia de $\bar{\mathbb{A}}$ tal que $\psi(\bar{P}) = \overline{\varphi(P)}$ per a tot punt $P \in \mathbb{A}$. Veurem que $\psi = \bar{\varphi}$ i això acabarà la demostració.

Per definició d'homografia, existeix un automorfisme lineal g de $\bar{V}$ tal que $\psi = [g]$. De

$$\psi(\bar{O}) = \begin{cases} [g]([e_0]) = [g(e_0)] \\ \overline{\varphi(O)} = \overline{O + w} = [e_0 + w] \end{cases}$$

deduïm que existeix $\mu \in K$ tal que $g(e_0) = \mu(e_0 + w)$, és a dir, $(\mu^{-1}g)(e_0) = e_0 + w$ (notem que $\mu \neq 0$ perquè g és injectiva). Com que $[\mu^{-1}g] = [g] = \psi$, canviant g per $\mu^{-1}g$ podem suposar que $\psi = [g]$ i $g(e_0) = e_0 + w = \bar{f}(e_0)$.

Sigui ara $v \in V$ un vector qualsevol i $P = O + v$. Llavors, amb

$$\psi(\bar{P}) = \begin{cases} [g]([e_0 + v]) = [g(e_0) + g(v)] = [e_0 + w + g(v)] \\ \overline{\varphi(P)} = \overline{O + w + f(v)} = [e_0 + w + f(v)] \end{cases}$$

veiem que $g(v) = f(v) = \bar{f}(v)$.

En suma, tenim $g = \bar{f}$ i, per tant, $\psi = \bar{\varphi}$.

Caracterització del grup afí com a subgrup del grup projectiu

Corol·lari. L'aplicació $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ és un monomorfisme de $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ en $PGL(\bar{\mathbb{A}})$ i la seva imatge és el subgrup de $PGL(\bar{\mathbb{A}})$ format per les homografies que deixen $\mathbb{A}_\infty$ invariant (o, equivalentment, que deixen $i(\mathbb{A})$ invariant).

Prova. Siguin φ i φ' afinitats de $\mathbb{A}$. Aleshores, $\psi = \bar{\varphi}'\bar{\varphi}$ és una homografia de $\bar{\mathbb{A}}$ que deixa $i(\mathbb{A})$ invariant i que compleix $\psi(\bar{P}) = \overline{(\varphi'\varphi)(P)}$ per a tot $P \in \mathbb{A}$. Com que $\overline{\psi'} = \overline{\varphi'\varphi}$ també compleix $\psi'(\bar{P}) = \overline{(\varphi'\varphi)(P)}$, per unicitat veiem que $\overline{\varphi'\varphi} = \bar{\varphi}'\bar{\varphi}$, la qual cosa prova $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ és un homomorfisme de grups. Aquest homomorfisme és un monomorfisme, ja que les extensions projectives d'afinitats diferents són homografies diferents.

Sigui ara $\psi = [g]$ una homografia de $\bar{\mathbb{A}}$ que deixa $\mathbb{A}_\infty$ invariant. Llavors g deixa V invariant. A més, si $g(e_0) = \mu e_0 + w$, amb $w \in V$, tenim $\mu \neq 0$ (altrament g no seria injectiva). Canviant g per $\mu^{-1}g$, podem suposar, doncs, que $g(e_0) = e_0 + w$. Si ara posem

$$f = g|_V \text{ i } \varphi(P) = O + w + f(P - O) \text{ (per a tot } P \in \mathbb{A}),$$

φ és una afinitat de $\mathbb{A}$ i

$$\overline{\varphi(P)} = [e_0 + w + f(P - O)] = [g(e_0 + (P - O))] = \psi(\bar{P}),$$

d'on resulta $\psi = \bar{\varphi}$.

Expressió de l'homografia $\bar{\varphi}$ en coordenades

Sigui $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$ una referència afí de $\mathbb{A}$ i $\bar{\mathcal{R}} = [P_0, \dots, P_n; U]$ la corresponent referència projectiva de $\bar{\mathbb{A}}$.

Considerem una afinitat φ de $\mathbb{A}$ i suposem que l'equació matricial de φ en la referència $\mathcal{R}$ és

$$\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T,$$

de manera que A és la matriu de $f = \tilde{\varphi}$ en la base $e_1, \dots, e_n$ i $\mathbf{p}$ són les coordenades de $\varphi(O)$ en la referència $\mathcal{R}$.

Proposició. La matriu de $\bar{\varphi}$ en el referència $\bar{\mathcal{R}}$ és $\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{p}^T & A \end{array} \right]$.

Prova. En efecte,

$\bar{f}(e_0) = e_0 + w = e_0 + p_1 e_1 + \dots + p_n e_n$ i $\bar{f}(e_j) = f(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$ per $j = 1, \dots, n$, on hem posat $A = (a_{ij})$.

- Una homografia de $\mathbb{A}$ diferent de la identitat és una translació si i només si el seu conjunt de punts fixos coincideix amb l'hiperplà de l'infinít $\mathbb{A}_\infty$.

Punts fixos per una homografia

Sigui $\varphi = [f]$ una homografia de l'espai projectiu $\mathbb{P} = [E]$. Un punt $[x] \in \mathbb{P}$ és **fix** per φ si i només si $[f(x)] = [x]$. Com que aquesta relació equival a dir que existeix $\lambda \in K$ tal que $f(x) = \lambda x$, veiem que **$[x]$ és fix per φ si i només si x és un vector propi no nul de f .**

Proposició. El conjunt de punts fixos de φ és la unió d'un nombre finit de varietats lineals disjunctes dues a dues.

Prova. Sigui $\varphi = [f]$, on f és un automorfisme lineal de E . El conjunt de vectors propis de f de valor propi $\lambda \in K$ formen un subespai vectorial E_λ de E . A més, $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$ si $\lambda \neq \mu$. Si posem $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ per denotar els valors propis no nuls diferents de f i $L_i = [E_i]$ ($i = 1, \dots, r$), llavors és clar que les varietats lineals $L_1, \dots, L_r$ són disjunctes dues a dues i que el conjunt de punts fixos de φ és $L_1 \cup \dots \cup L_r$.

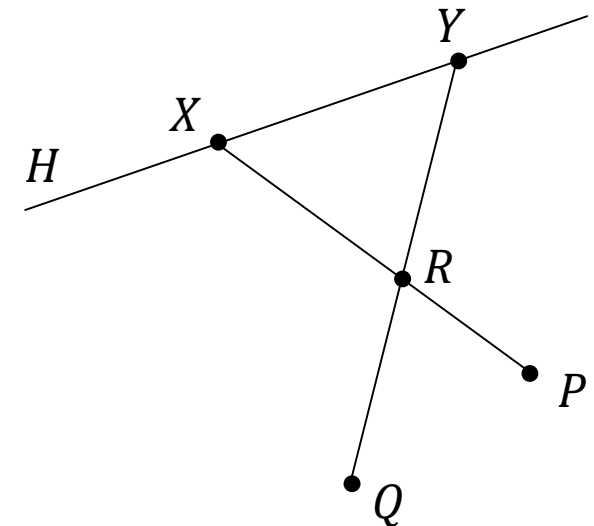
Exemple: homologies

Es diu que una homografia φ és una *homologia* si és diferent de la identitat i té un hiperplà de punts fixos. En tal cas, l'hiperplà s'anomena *eix* de l'homologia.

Si una homologia no té altres punts fixos que els de l'eix, es diu que és *especial*. Altrament, es diu que és *general*.

Una homologia general té un únic punt fix fora de l'eix. En efecte, sigui H l'eix d'una homologia φ i suposem que $P, Q \notin H$ són dos punts fixos de φ diferents. Veurem que si R és un punt qualsevol, llavors R és fix per φ , amb la qual cosa l'afirmació queda establerta per reducció a l'absurd ($\varphi \neq Id$).

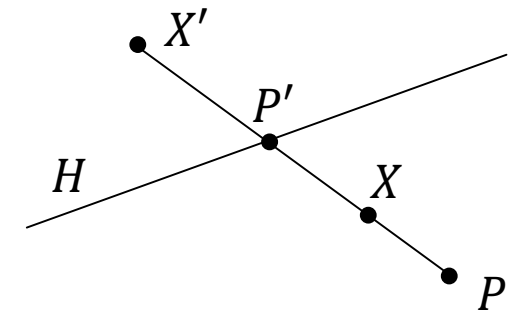
Per veure que R és fix, podem suposar que $R \notin H$ i $R \neq P, Q$. Aleshores RP és fixa, ja que conté dos punts fixos (P i $X = PR \cap H$). Per les mateixes raons, QR és fixa. I d'això resulta que R és fix.



L'únic punt fix fora de l'eix d'una homologia general s'anomena **centre** de l'homologia.

■ Si φ és un **homologia general**, existeixen referències projectives $\mathcal{R}$ tals que la matriu de φ respecte de $\mathcal{R}$ té la forma $\begin{bmatrix} \kappa & | \\ \hline & I_n \end{bmatrix}$, on $\kappa \in K$, $\kappa \neq 0, 1$. Basta prendre $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n; U]$ amb $P_0 = P$ el centre de l'homologia i $P_1, \dots, P_n$ sobre l'eix H .

■ El paràmetre κ queda unívocament determinat per φ (direm que κ és el **mòdul** de φ). De fet, per a tot punt $X \neq P$, $X \notin H$, $\kappa = \rho(P, P', X, X')$, on $X' = \varphi(X)$ i $P' = XX' \cap H$: si $P' = [e']$, llavors $X = [\lambda e_0 + e']$ ($\lambda \in K - \{0\}$), $X' = [\kappa \lambda e_0 + e']$ i $\rho(P, P', X, X') = \rho(\infty, 0, \lambda, \lambda \kappa) = \kappa$.



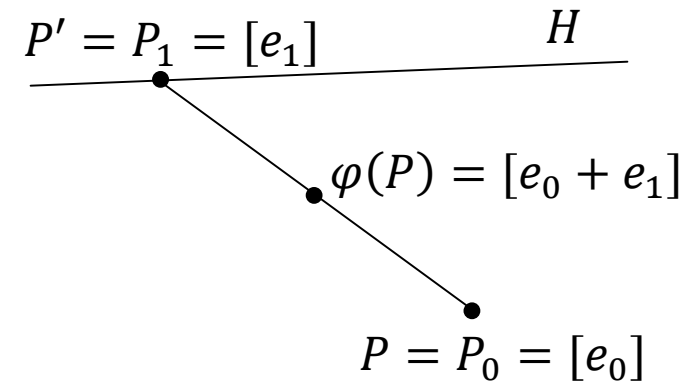
■ Les homologies de mòdul -1 es diuen **harmòniques**. Per exemple, l'extensió projectiva de la simetria especular σ_H respecte d'un hiperplà H d'un espai euclidià és l'homologia harmònica d'eix $\bar{H}$ i centre el punt de l'infinit de les rectes perpendiculars a H .

■ Les rectes invariants per una homologia general són les contingudes a l'eix i les que passen pel centre.

- Si $\mathbb{A}$ és un espai afí i φ és una homotècia de centre O , llavors la seva extensió projectiva $\bar{\varphi}$ és una homologia general: el seu eix és l'hiperplà de l'infinít i el seu centre és el punt $\bar{O}$. El mòdul de $\bar{\varphi}$ coincideix amb la raó de φ .

- Si φ és un homologia especial, existeixen referències projectives $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$ tals que la matriu de φ respecte de $\mathcal{R}$ té la forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right]$$



- Amb les notacions del punt anterior (i de la figura), per a tot punt $P \notin H$ es compleix que la recta $P\varphi(P)$ passa per P_1 .
- D'això resulta que les rectes invariants per φ són precisament les contingudes a l'eix H de φ i les que passen pel punt $P_1 \in H$. D'aquesta manera, veiem que el punt P_1 de l'eix de φ queda unívocament determinat per φ i direm que és el **centre** de l'homologia especial φ .
- Si φ és una translació de $\mathbb{A}$, diguem $\varphi = t_v$, $\bar{\varphi}$ és una homologia especial amb eix l'hiperplà $\mathbb{A}_\infty$ i centre $[v]$.

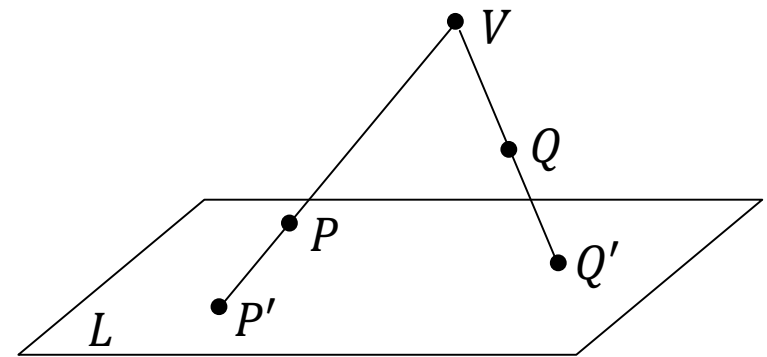
Projeccions

Sigui $\mathbb{P} = [E]$ un espai projectiu de dimensió $n \geq 2$ i $V \subseteq \mathbb{P}$ una varietat lineal de dimensió $d = n - r - 1$ ($1 \leq r \leq n - 1$). Donat un punt $P \notin V$, direm que la varietat $V \vee P$ és la **projectant de P des de V** i posarem VP per denotar-la. Notem que VP té dimensió $d + 1 = n - r$, de manera que VP és una recta quan V és un punt.

Sigui ara L una varietat de dimensió r tal que $L \cap V = \emptyset$. Notem que $V \vee L = \mathbb{P}$, com una conseqüència immediata de la fórmula de les dimensions. Donat un punt $P \notin V$, la intersecció de la projectant VP amb la varietat L , $VP \cap L$, és un punt de L , ja que per la fórmula de les dimensions

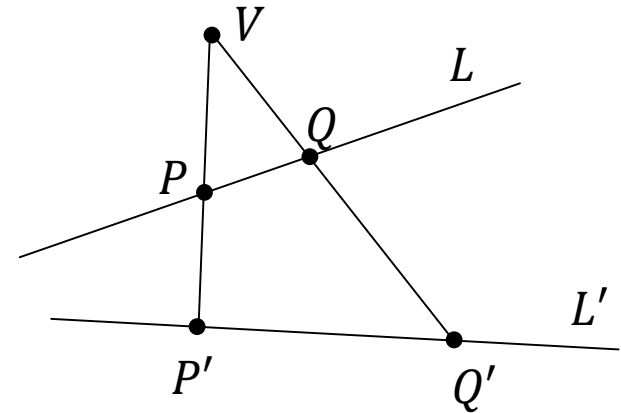
$$\dim(VP \cap L) = \dim(VP) + \dim(L) - \dim(VP \vee L) = n - r + r - n = 0.$$

Direm que $P' = VP \cap L$ és la **projecció de P sobre L des de V** (o amb centre V). Òbviament, tenim $P' = P$ si i només si $P \in L$.



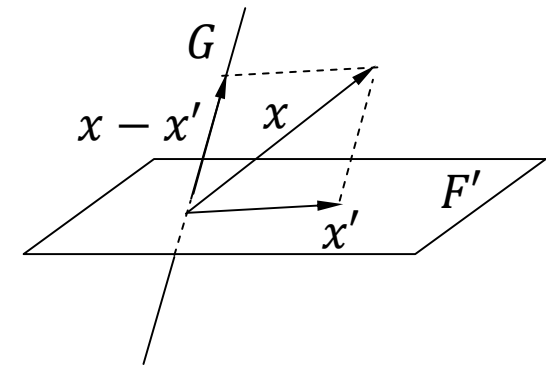
Perspectivitats

Considerem ara una altra varietat L' de dimensió r i tal que $V \cap L' = \emptyset$. Llavors podem considerar l'aplicació $\pi_V: L \rightarrow L'$ tal que $P \mapsto P' = VP \cap L'$. D'aquesta aplicació, en direm la **perspectivitat de L en L' des de V** (o **amb centre V**).



Proposició. Siguin L i L' dues varietats lineals de dimensió r d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n = [E]$, $1 \leq r \leq n - 1$. Sigui V una varietat lineal de $\mathbb{P}$ de dimensió $n - r - 1$ i disjunta de L i de L' . Aleshores, la perspectivitat $\pi_V : L \rightarrow L'$ és una projectivitat.

Prova. Siguin $F, F', G \subseteq E$ els subespais vectorials tals que $L = [F]$, $L' = [F']$ i $V = [G]$. Les relacions $V \cap L = \emptyset$ i $V \vee L = \mathbb{P}$ equivalen a $E = G \oplus F$. Anàlogament, $E = G \oplus F'$. Donat $x \in E$, sigui $x' \in F'$ l'únic vector tal que $x - x' \in G$, és a dir, la projecció de x sobre F' relativament a la descom-



posició $E = G \oplus F'$. L'aplicació $E \rightarrow F'$ tal que $x \mapsto x'$ és lineal i el seu nucli és G . Així doncs, atès que $G \cap F = \{0\}$, l'aplicació $f: F \rightarrow F'$ tal que $x \mapsto x'$ és lineal i injectiva. Com que F i F' tenen la mateixa dimensió, f és un isomorfisme. Per acabar la demostració és suficient provar que $\pi_V = [f]$.

En efecte, si $P = [x] \in L$, llavors $x - x' \in G$, d'on

$$VP = [G + \langle x \rangle] = [G + \langle x' \rangle].$$

Per tant

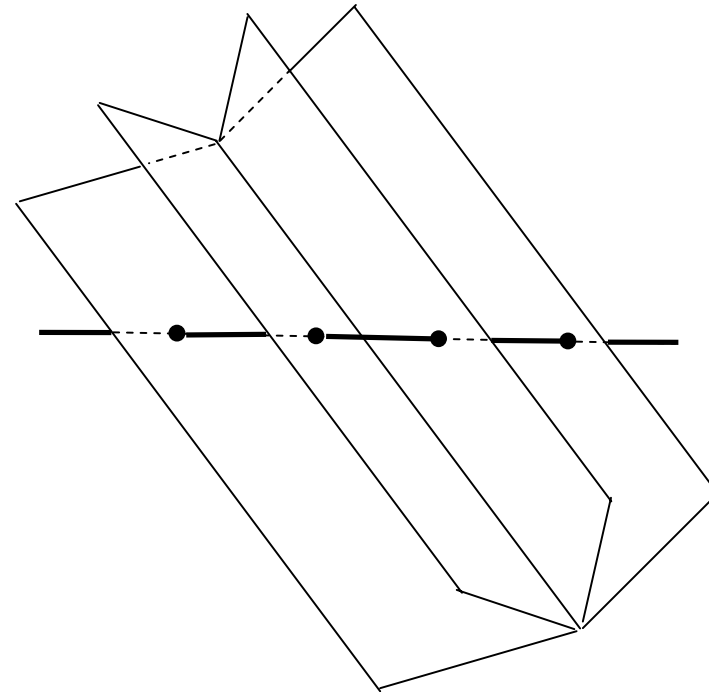
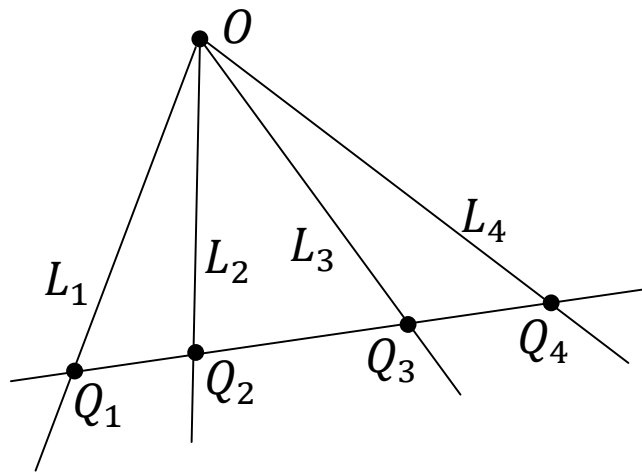
$$\pi_V(P) = VP \cap L' = [G + \langle x' \rangle] \cap [F'] = [x'] = [f(x)].$$

Proposició. Si L i L' són dues rectes de $\mathbb{P}^n$ i $\pi_V: L \rightarrow L'$ és una projectivitat, llavors, per a tota quaterna $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in L$,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(\pi_V(Q_1), \pi_V(Q_2), \pi_V(Q_3), \pi_V(Q_4)).$$

Prova. És conseqüència del fet que les perspectivitats són projectivitats i que les projectivitats conserven la raó doble.

Aplicació. Siguin L_1, L_2, L_3, L_4 quatre rectes de $\mathbb{P}^2$ concurrents en un punt O . Si L és qualsevol recta que no passa per O , i $Q_i = L \cap L_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), llavors el valor $\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ només depèn de L_1, L_2, L_3, L_4 , i no de L . Posarem $\rho(L_1, L_2, L_3, L_4)$ per denotar-lo i direm que és la *raó doble de L_1, L_2, L_3, L_4* . La raó doble de quatre plans de $\mathbb{P}^3$ que passen per una recta (es diu que formen un *feix*) es defineix anàlogament.



Projectivitats de Poncelet

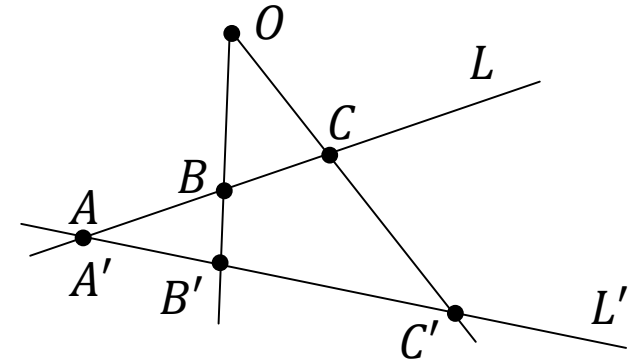
Si L i L' són varietats lineals de dimensió r ($1 \leq r \leq n - 1$) d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$, d'una aplicació $\varphi: L \rightarrow L'$ en direm una **projectivitat de Poncelet** si es pot obtenir com a composició d'un nombre finit de perspectivitats, això és, si es pot trobar una successió $L_0, \dots, L_k$ de varietats lineals de dimensió r , amb $L = L_0$ i $L' = L_k$, i una successió $V_1, \dots, V_k$ de varietats lineals de dimensió $n - r - 1$ tals que $V_i \cap L_{i-1} = V_i \cap L_i = \emptyset$ per $i = 1, \dots, k$, de manera que φ és la composició de les perspectivitats $\pi_{V_i}: L_{i-1} \rightarrow L_i$. Com que les perspectivitats són projectivitats, és clar que **tota projectivitat de Poncelet és una projectivitat**. L'afirmació recíproca, també és certa:

Teorema (de Poncelet). Tota projectivitat $\varphi: L \rightarrow L'$ entre dues varietats lineals de dimensió r d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ ($1 \leq r \leq n - 1$) és una projectivitat de Poncelet.

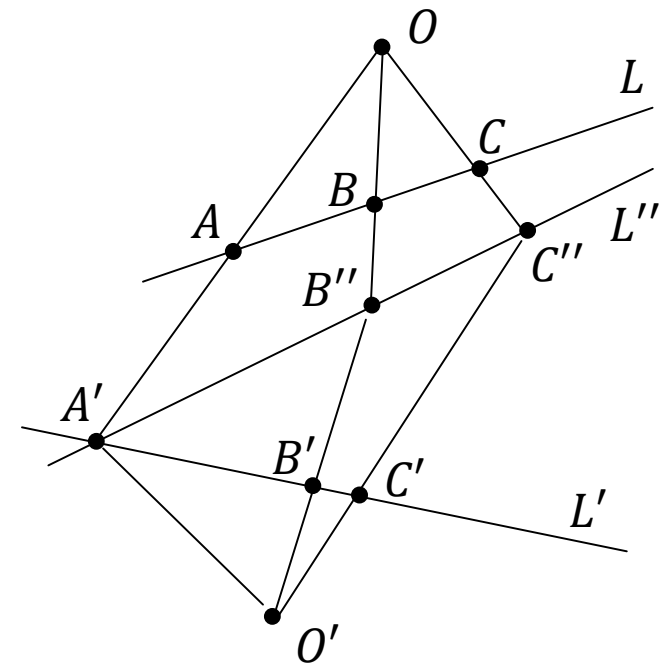
Prova. Només farem el cas $n = 2, r = 1$. Establirem primer el cas $L \neq L'$ i després el cas general.

Proposició. Siguin L i L' dues rectes diferents de $\mathbb{P}^2$, A, B, C tres punts diferents de L i A', B', C' tres punts diferents de L' . Llavors, A, B, C es poden transformar en A', B', C' per una perspectivitat o per una composició de dues perspectivitats.

Prova. Suposem primer que $A = A'$. Llavors $B \neq B'$, ja que altrament L i L' coincidrien. Anàlogament, $C \neq C'$. Podem, doncs, considerar el punt d'intersecció, diguem-ne O , de les rectes BB' i CC' . Ara és clar que la perspectivitat de vèrtex O transforma A, B, C en A', B', C' .



Si $A' \neq A$, considerem una recta L'' per A' que no passi per A ni coincideixi amb L' , i un punt O sobre la recta AA' diferent de A i A' . La projecció de L en L'' amb vèrtex O transforma A en A' . Si guin $B'', C'' \in L''$ les imatges de B i C per aquesta projecció. Com que, pel cas anterior, hi ha una projecció que transforma A', B'', C'' en A', B', C' , això acaba la prova.

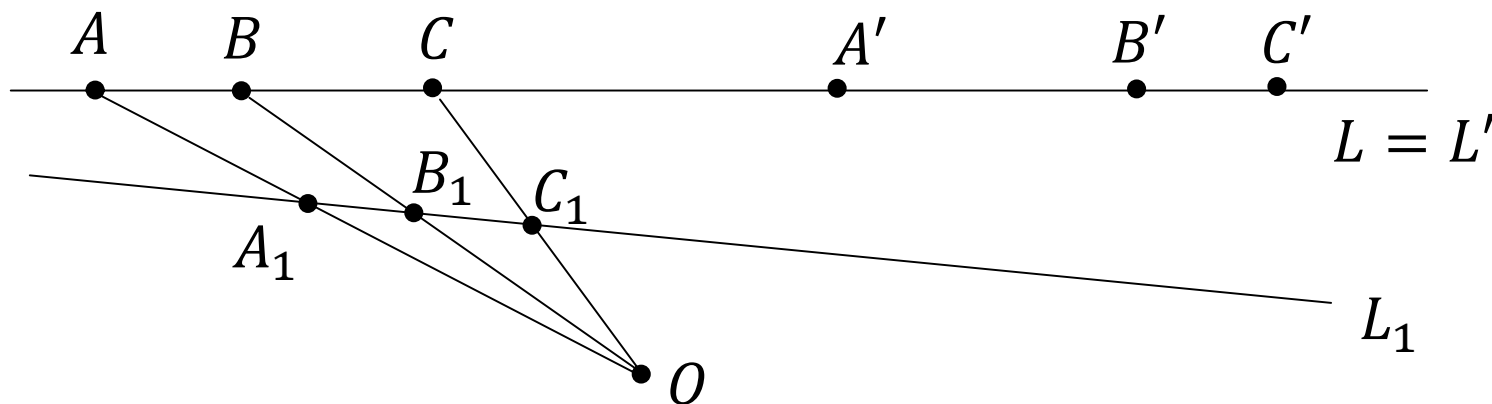


Proposició. Tota projectivitat entre dues rectes de $\mathbb{P}^2$ és una projectivitat de Poncelet.

Prova. Siguin L i L' les rectes i $\varphi: L \rightarrow L'$ una projectivitat. Siguin $A, B, C \in L$ tres punts diferents i posem

$$A' = \varphi(A), B' = \varphi(B) \text{ i } C' = \varphi(C).$$

Pel teorema fonamental de les projectivitats, serà suficient veure que existeix una projectivitat de Poncelet $\psi: L \rightarrow L'$ tal que $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$ i $\psi(C) = C'$. Com que això ha estat establert a la proposició anterior si $L \neq L'$, ara només cal fer el cas $L = L'$. Aquest cas, però, es pot reduir a l'anterior com expliquem tot seguit.



Escollim una recta L_1 diferent de L i un punt $O \notin L, L_1$. Posem A_1, B_1 i C_1 per denotar les projeccions de A, B, C sobre L_1 des de O . Com que $L_1 \neq L = L'$, per la proposició existeix una projectivitat de Poncelet $\psi_1: L_1 \rightarrow L'$ tal que

$$\psi_1(A_1) = A', \psi_1(B_1) = B', \psi_1(C_1) = C'.$$

Si posem $\psi: L \rightarrow L'$ per denotar la composició de la perspectivitat $\pi_O: L \rightarrow L_1$ amb la projectivitat de Poncelet ψ_1 , llavors és una projectivitat de Poncelet que compleix les condicions que necessitàvem.

Teorema del quadrangle complet

Considerem un quadrangle complet $ABCD$ i sigui XYZ el seu triangle diagonal. Sigui X' el punt d'intersecció de les rectes AB i YZ .

Lema. Els punts X i X' separen harmònicament els punts A i B .

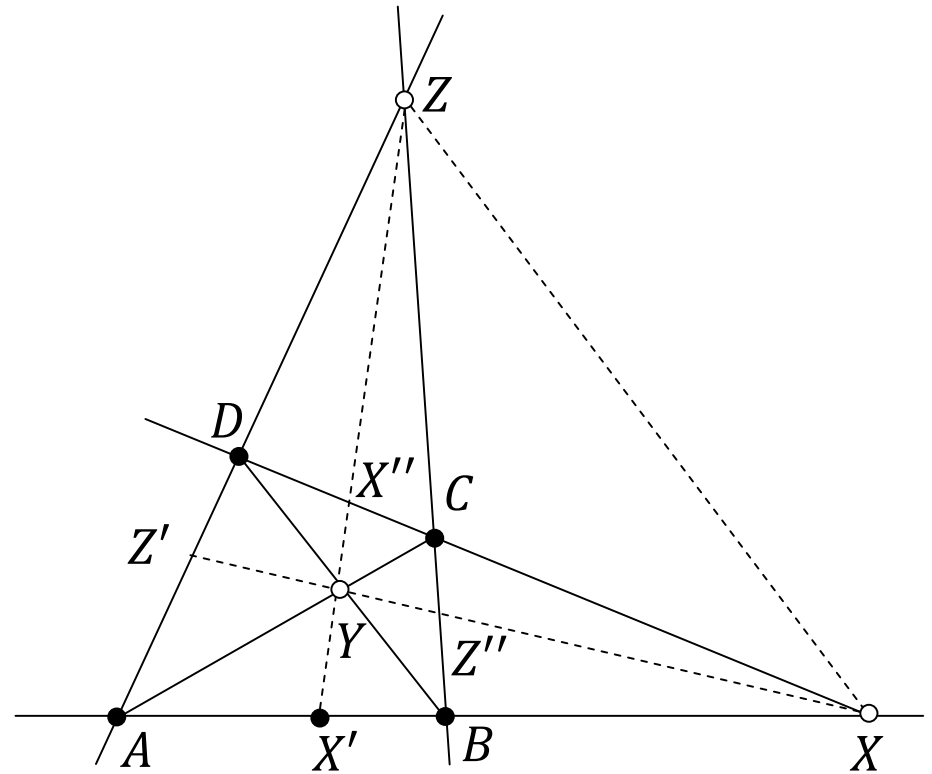
Prova. Projectant la recta AB sobre la recta CD des de Z s'obté que

$$\rho(A, B, X', X) = \rho(D, C, X'', X),$$

on X'' és el punt d'intersecció de CD i YZ . Tornant a projectar la recta CD sobre AB des de Y , s'obté $\rho(D, C, X'', X) = \rho(B, A, X', X)$. Per tant,

$$\rho(A, B, X', X) = \rho(B, A, X', X)$$

i sabem que aquesta relació equival a dir que A, B, X', X és una quaterna harmònica.



Teorema (del quadrangle complet). En un quadrangle complet, el parell de costats del triangle diagonal incidents amb un vèrtex d'aquest (per exemple, en la figura ZX i ZY són els costats incidents amb Z) separa harmònicament el parell de costats del quadrangle que es tallen en aquell vèrtex (AD i BC en l'exemple).

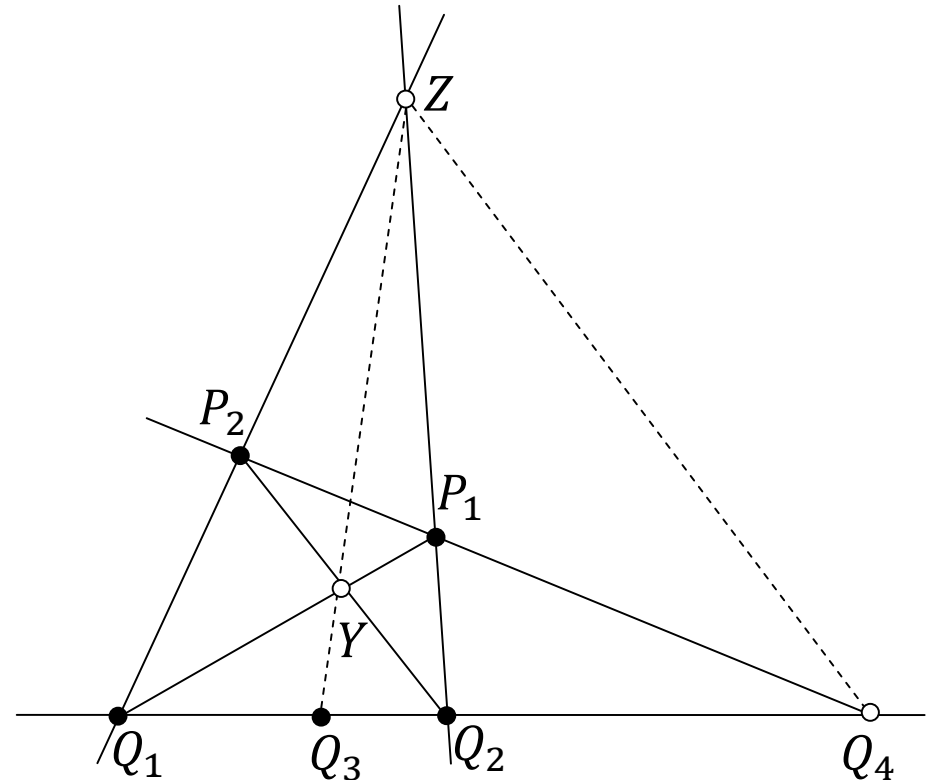
Construcció geomètrica del quart harmònic

Siguin Q_1, Q_2, Q_3 tres punts alineats diferents.

Volem construir el punt Q_4 de la recta $L = Q_1Q_2$ tal que

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = -1.$$

El lema de la pàgina anterior ens dona la solució. Sigui Z un punt exterior a L i escollim un punt Y de la recta Q_3Z diferent de Q_3 i de Z . Siguin P_1 i P_2 les interseccions de Q_1Y amb Q_2Z i de Q_2Y amb Q_1Z , respectivament. Llavors Q_4 és el punt d'intersecció de P_1P_2 amb L .



Quaternes equianharmòniques. Una quaterna de punts alineats diferents es diu *equianharmònica* si, posant ξ per denotar la seva raó doble, es té que $\xi = 1/(1 - \xi)$. Com que aquesta relació equival a $\xi^2 = \xi - 1$, veiem que $\xi^3 = \xi^2 - \xi = -1$. Si ξ és una solució de l'equació $\xi^2 = \xi - 1$, llavors l'altra solució és $1 - \xi = -\xi^2 = \xi^{-1}$. D'això segueix que entre els sis valors possibles de la raó doble, en fer permutacions dels punts, només n'hi ha dos de diferents: ξ i $1 - \xi$. Si $K = \mathbb{C}$, llavors ξ i $1 - \xi$ són les arrels cúbiques complexes de -1 .