

Geometria / GP

4. Raó doble

© S. Xambó

- Definició de raó doble
- Raó doble de quatre punts alineats amb coincidències
- Exemples
- Permutacions de la raó doble
- Quaternes harmòniques
- Notes

Definició de raó doble

Siguin Q_i , $i = 1, \dots, 4$, quatre punts diferents d'una recta projectiva $\mathbb{P}^1$.
 Sigui $\mathcal{S} = [P_0, P_1; U]$ una referència projectiva de $\mathbb{P}^1$ i suposem que
 $Q_i \equiv [x_i, y_i]_{\mathcal{S}}$, $i = 1, \dots, 4$. El valor de l'expressió

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} \quad [*]$$

és un element de K . Aquest valor no depèn de les coordenades projectives dels punts que hàgim escollit, com veurem tot seguit, i posarem

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$$

per indicar-lo i direm que és la *raó doble* de la quaterna.¹

- Si en lloc de $[x_i, y_i]$ usem $[\lambda x_i, \lambda y_i]$ ($\lambda \in K - \{0\}$) com a $\mathcal{S}$ -coordenades de Q_i , llavors és clar que el numerador i denominador de

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}$$

queden multiplicats per λ i, per tant, el valor final de l'expressió roman inalterat.

- El valor de $[*]$ tampoc depèn de la referència $\mathcal{S}$, ja que les coordenades dels punts Q_i en una altra referència $\mathcal{S}'$ tenen la forma $[x_i, y_i]A$, on A és una matriu 2×2 invertible, i, per tant, el numerador i el denominador de $[*]$ queden multiplicats per $\det(A)^2$.

Raó doble de quatre punts alineats amb coincidències

La condició $Q_i = Q_j$ equival a $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = 0$. Per tant

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}$$

és de la forma $0/0$ si i només si tres (almenys) dels punts Q_i són coincidents. En aquest cas (és a dir, quan almenys tres dels Q_i són coincidents), direm que la raó doble de $Q_1, \dots, Q_4$ és *indeterminada*. Exclòs aquest cas, i suposant que entre els Q_i hi ha almenys una coincidència, la raó doble és de la forma $0/\beta$, amb $\beta \in K - \{0\}$, si $Q_1 = Q_3$ o $Q_2 = Q_4$, i de la forma $\alpha/0$, amb $\alpha \in K - \{0\}$, si $Q_1 = Q_4$ o $Q_2 = Q_3$. Així, doncs, posarem

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 0 \text{ si } Q_1 = Q_3 \text{ o } Q_2 = Q_4$$

i, amb el mateix criteri que l'usat per representar el valor excepcional de la coordenada absoluta, posarem

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \infty \text{ si } Q_1 = Q_4 \text{ o } Q_2 = Q_3.$$

Exemple. Siguin P_0, P_1, U punts diferents de $\mathbb{P}^1$. Aleshores, per a tot punt $X \in \mathbb{P}^1$, $\rho(P_0, P_1, U, X)$ coincideix amb la coordenada absoluta de X respecte de la referència $[P_0, P_1; U]$.

En efecte, en aquesta referència tenim

$$P_0 \equiv [1,0], P_1 \equiv [0,1], U \equiv [1,1], X \equiv [\xi_0, \xi_1].$$

Per tant,

$$\rho(P_0, P_1, U, X) = \frac{1}{-1} : \frac{\xi_1}{-\xi_0} = \frac{\xi_0}{\xi_1},$$

que és la coordenada absoluta de X respecte de la referència $[P_0, P_1; U]$.

Exemple. Sigui A, B, C, D una quaterna de punts de $\mathbb{A}^1$ i definim

$$(ABCD) = (ABC)/(ABD), \text{ on } (ABC) = \sigma(C, B, A).$$

Llavors

$$\rho(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) = (ABCD),$$

on $\bar{X} \in \bar{\mathbb{A}}^1$ denota el punt que correspon a $X \in \mathbb{A}^1$ per la inclusió de $\mathbb{A}^1$ en $\bar{\mathbb{A}}^1$ relativa a un origen O fixat arbitràriament.²

En efecte, siguin a, b, c, d les coordenades dels punts A, B, C, D respecte d'una referència $\mathcal{R} = [O; e_1]$ de $\mathbb{A}^1$. Llavors, les coordenades projectives de $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ respecte de la referència $\bar{\mathcal{R}}$ són $[1, a], [1, b], [1, c], [1, d]$. Per tant,

$$\rho(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

la qual cosa prova l'afirmació.

Exemple. Sigui A, B, C una terna de punts de $\mathbb{A}^1$. Amb notacions i convenis com les de l'exemple anterior tenim:

$$\sigma(A, B, C) = \rho([\infty], \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}),$$

on $[\infty]$ denota el punt de l'infinit de $\mathbb{A}^1$.

En efecte, $[\infty] = [0, 1]$, $\bar{A} = [1, a]$, $\bar{B} = [1, b]$ i $\bar{C} = [1, c]$. Per tant,

$$\rho([\infty], A, B, C) = \frac{-1}{b-a} : \frac{-1}{c-a} = \frac{c-a}{b-a} = \sigma(A, B, C).$$

Exemple (raó doble i coordenada absoluta). Siguin Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4 quatre punts diferents de $\mathbb{P}^1$ i suposem que en una referència tenen coordenades absolutes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in K$. Llavors,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}. \quad [*]$$

En efecte, en aquesta situació tenim $y_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, 4$), ja que si $y_i = 0$ llavors $\lambda_i = \infty$. Així $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = y_i y_j (\lambda_j - \lambda_i)$ i d'aquí la fórmula resulta immediatament.

Suposem ara que un (i , essent diferents, només un) dels punts Q_i té coordenada absoluta ∞ . Llavors encara és possible emprar la fórmula $[*]$ per obtenir el resultat correcte. Suposem, per exemple, que $\lambda_1 = \infty$ (és a dir, $y_1 = 0$). Llavors

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 y_3 y_2 y_4 (\lambda_4 - \lambda_2)}{y_2 y_3 (\lambda_3 - \lambda_2) x_1 y_4} = \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

El mateix resultat es pot obtenir aplicant formalment la fórmula $[*]$, és a dir, escrivint $\frac{\lambda_3 - \infty}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_4 - \infty}$, i *substituint $\frac{\lambda_3 - \infty}{\lambda_4 - \infty}$ per 1, com si fos un càlcul de límits.*

D'ara endavant posarem, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \bar{K}$,

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}.$$

Quan inclogui el símbol ∞ , l'avaluem segons la regla (de «càlcul de límits») que hem explicat.

Exemple (Propietat multiplicativa de la raó doble). Siguin

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$$

punts diferents d'una recta projectiva $\mathbb{P}^1$. Llavors

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_5) = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_5).$$

Permutacions de la raó doble

De la definició de raó doble resulta immediatament que roman inalterada per les permutacions (12)(34), (13)(24) i (14)(23), això és,

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(Q_2, Q_1, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_1, Q_2) = \rho(Q_4, Q_3, Q_2, Q_1).$$

També en resulta que les permutacions (12) i (34) inverteixen la raó doble: si $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$, llavors

$$\rho(Q_2, Q_1, Q_3, Q_4) = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3) = 1/\rho.$$

Per altra banda, tenim que

$$\rho(Q_1, Q_3, Q_2, Q_4) = 1 - \rho,$$

ja que $\rho = \rho(0, \infty, \rho, 1)$ i $\rho(0, \rho, \infty, 1) = 1 - \rho$. Ara és fàcil calcular la raó doble de totes les permutacions de Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 en termes de ρ , ja que tota permutació dels índexs 1, 2, 3, 4 és composició de transposicions de la forma (12), (23) i (34). S'obté la següent taula:

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(Q_2, Q_1, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_1, Q_2) = \rho(Q_4, Q_3, Q_2, Q_1) = \rho$$

$$\rho(Q_2, Q_1, Q_3, Q_4) = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3) = \rho(Q_3, Q_4, Q_2, Q_1) = \rho(Q_4, Q_3, Q_1, Q_2) = 1/\rho$$

$$\rho(Q_1, Q_3, Q_2, Q_4) = \rho(Q_3, Q_1, Q_4, Q_2) = \rho(Q_2, Q_4, Q_1, Q_3) = \rho(Q_4, Q_2, Q_3, Q_1) = 1 - \rho$$

$$\rho(Q_3, Q_1, Q_2, Q_4) = \rho(Q_1, Q_3, Q_4, Q_2) = \rho(Q_2, Q_4, Q_3, Q_1) = \rho(Q_4, Q_2, Q_1, Q_3) = 1/(1 - \rho)$$

$$\rho(Q_2, Q_3, Q_1, Q_4) = \rho(Q_3, Q_2, Q_4, Q_1) = \rho(Q_1, Q_4, Q_2, Q_3) = \rho(Q_4, Q_1, Q_3, Q_2) = (\rho - 1)/\rho$$

$$\rho(Q_3, Q_2, Q_1, Q_4) = \rho(Q_2, Q_3, Q_4, Q_1) = \rho(Q_1, Q_4, Q_3, Q_2) = \rho(Q_4, Q_1, Q_2, Q_3) = \rho/(\rho - 1)$$

Quaternes harmòniques

Una quaterna de punts es diu *harmònica* si la seva raó doble és $\rho = -1$. En aquest cas $\rho = 1/\rho$ i, per tant, de les sis raons dobles que es poden obtenir per permutacions només n'hi ha tres de diferents:

$$\rho = -1, 1 - \rho = 2, 1/(1 - \rho) = 1/2.$$

Proposició. Quatre punts diferents (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) formen una quaterna harmònica si i només si

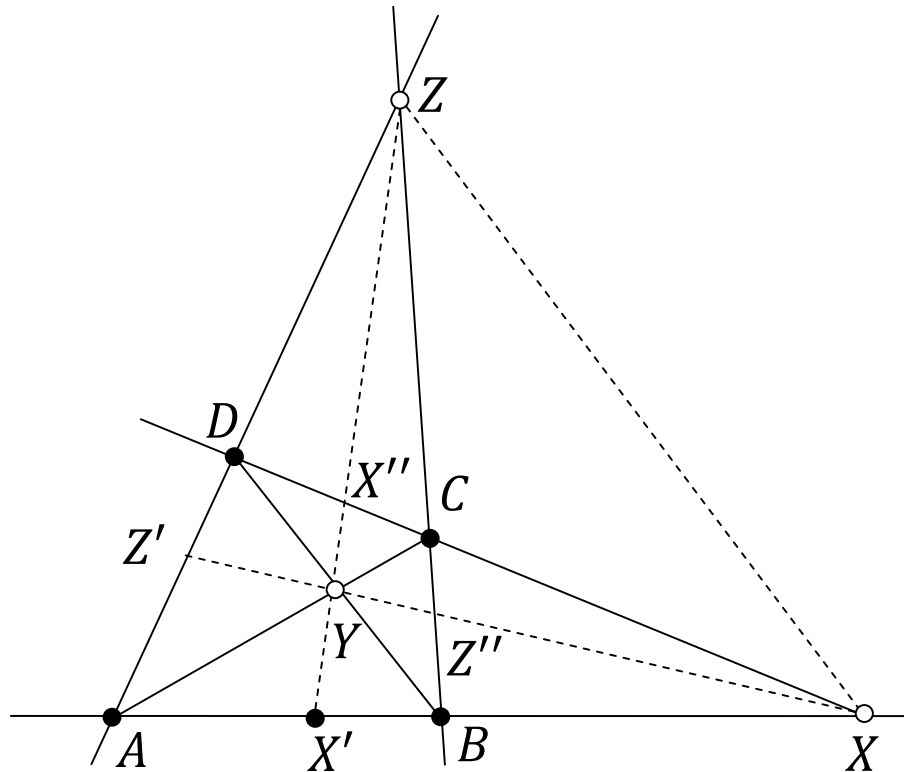
$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3).$$

Prova. Sigui $\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$. Com que $1/\rho = \rho(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3)$, és clar que la igualtat de l'enunciat és certa si $\rho = -1$. Recíprocament, la condició de l'enunciat equival a $\rho = 1/\rho$, és a dir, a $\rho^2 = 1$. Com que $\rho \neq 1$, tenim $\rho = -1$.

Notem que la condició que una quaterna sigui harmònica es manté per les permutacions (12), (34) i (13)(24). És per això que també es diu que els parells $\{Q_1, Q_2\}$ i $\{Q_3, Q_4\}$ se *separen harmònicament*, o que Q_3 i Q_4 són *conjugats respecte de Q_1 i Q_2* .

Exemple. Siguin M, A, B tres punts alineats diferents de $\mathbb{A}^n$. Com que M és el punt mitjà del segment $[A, B]$ si i només si $\sigma(M, A, B) = -1$, resulta que M és el punt mitjà del segment $[A, B]$ si i només si el parell $\{P_\infty, M\}$ separa harmònicament $\{A, B\}$, on P_∞ és el punt de l'infinit de la recta AB .

Exemple. En el capítol següent veurem que en un quadrangle complet com el de la figura la quaterna A, B, X, X' és harmònica. Altres quaternes anàlogues, com ara C, D, X, X'' , també són harmòniques, així com quaternes relacionades, com ara X, Y, Z', Z'' .

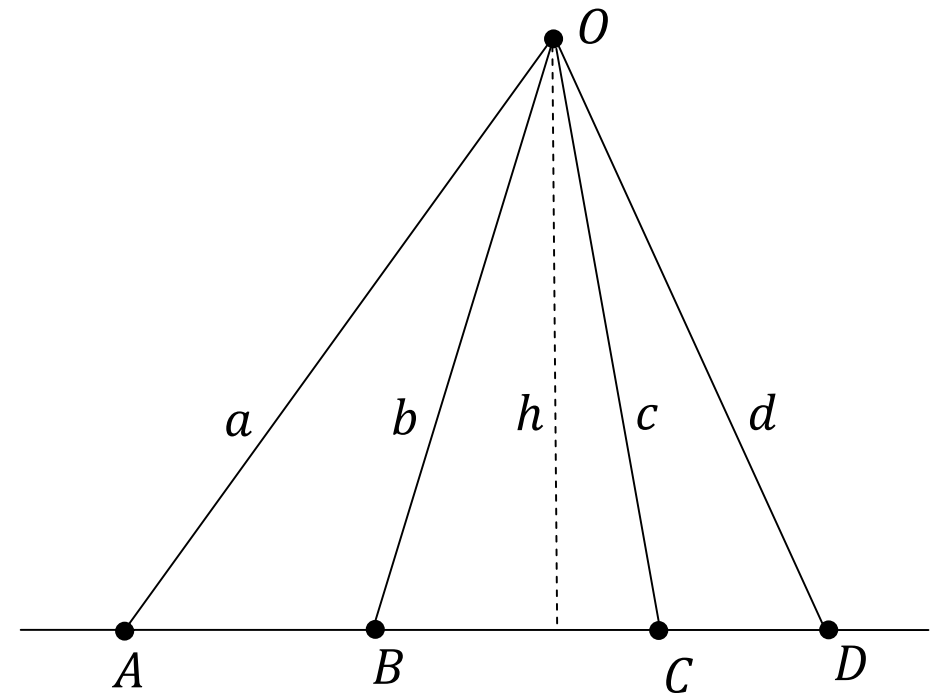


Notes

1. Si prenem l'accepció de «raó» que significa «quocient d'una quantitat per una altra quantitat» (DIEC, **raó 5 1**), la raó doble queda definida com un quocient de quocients. Això proporciona una explicació de l'ús de la locució «raó doble».

2. És oportú explicar aquí l'origen del concepte de raó doble.

Considerem un pla euclidià $\mathbb{A}$. Donats tres punts alineats diferents A , B i C , podem representar simbòlicament la raó simple $(ABC) = \sigma(C, B, A)$ pel quocient (tenint en compte els signes) AC/BC . Sigui O un punt exterior a la recta L determinada per la terna i posem $a = OA$, $b = OB$ i $c = OC$. Llavors tenim



$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{h \cdot AC}{h \cdot BC} = \frac{ac \sin(\widehat{ac})}{bc \sin(\widehat{bc})} = \frac{a \sin(\widehat{ac})}{b \sin(\widehat{bc})},$$

on posem $\widehat{ac}$ i $\widehat{bc}$ per denotar els angles (orientats) $\widehat{AOC}$ i $\widehat{BOC}$, respectivament. Aquesta expressió ens mostra que si A, B, C i D és una quaterna de punts alineats, llavors (posant $d = OD$):

$$(ABC)/(ABD) = \frac{a \sin(\widehat{ac})}{b \sin(\widehat{bc})} : \frac{a \sin(\widehat{ad})}{b \sin(\widehat{bd})} = \frac{\sin(\widehat{ac})}{\sin(\widehat{bc})} : \frac{\sin(\widehat{ad})}{\sin(\widehat{bd})}.$$

Com que aquest valor només depèn d'angles que OA, OB, OC i OD formen a O , en resulta que el quocient de raons simples $(ABC)/(ABD)$ es conserva per projeccions de centre O . Aquest o «raó doble» és, doncs, un «invariant projectiu».