

Geometria / GP

3. Clausura projectiva d'un espai afí

© S. Xambó

- L'espai vectorial $\bar{V}$
- L'espai projectiu $\bar{\mathbb{A}}$
- Clausura projectiva d'una varietat lineal
- Quines varietats lineals de $\bar{\mathbb{A}}$ són clausura de varietats lineals de $\mathbb{A}$?
- Referència projectiva associada a una referència afí
- Coordenades afins i coordenades projectives
- Canvi de coordenades
- Equacions cartesianes afins i projectives
- Coordenada absoluta

L'espai vectorial $\bar{V}$

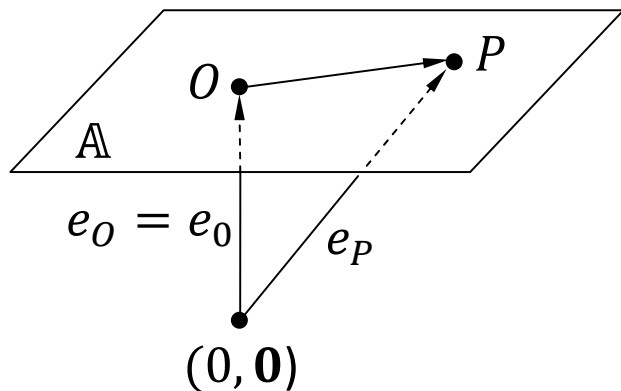
- $\mathbb{A}$ espai afí de dimensió n .
- V el seu espai vectorial associat.
- Posem $\bar{V} = K \oplus V$.

Si $(\lambda, x) \in \bar{V}$, podem escriure

$$(\lambda, x) = (\lambda, 0) + (0, x) = \lambda(1, 0) + (0, x).$$

Si posem $e_0 = (1, 0)$ i identifiquem el vector $x \in V$ amb el vector $(0, x) \in \bar{V}$, llavors podem posar

$$(\lambda, x) = \lambda e_0 + x.$$



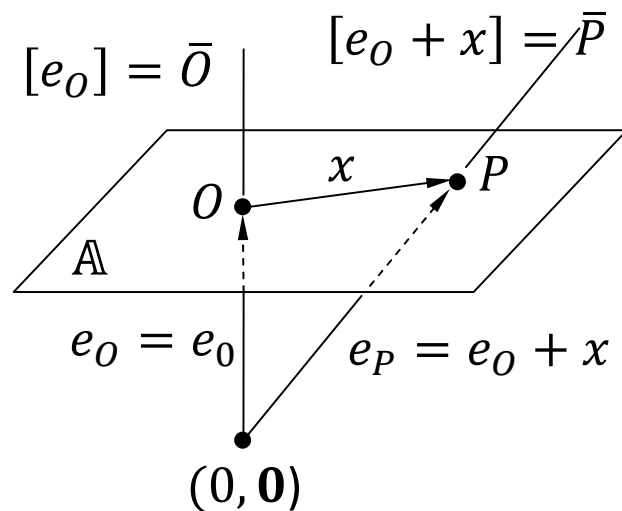
L'aplicació $P \mapsto e_P$. Fixem un punt $O \in \mathbb{A}$ i considerem l'aplicació

$$\mathbb{A} \mapsto \bar{V}, \quad P \mapsto e_P = e_0 + (P - O).$$

- $e_O = e_0$
- $e_Q - e_P = Q - P \quad (P, Q \in \mathbb{A})$
- $\bar{V} = \langle e_P \rangle \oplus V \quad (P \in \mathbb{A})$

L'espai projectiu $\bar{\mathbb{A}}$

- $\bar{\mathbb{A}} = [\bar{V}]$
- En diem *clausura projectiva*, o *compleció projectiva*, de $\mathbb{A}$.
- $\dim(\bar{\mathbb{A}}) = n$
- $\mathbb{A}_\infty = [V] \subset \bar{\mathbb{A}}$: *hiperplà de l'infinit*, o *dels punts impropis* de $\mathbb{A}$.



L'aplicació $i: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$

És l'aplicació $P \mapsto \bar{P} = [e_P]$.

Si $P = O + x$, $x \in V$,

$$\bar{P} = [e_P] = [e_{O+x}] = [e_O + x].$$

Proposició. L'aplicació i és injectiva.

Prova. Suposem que $P, Q \in \mathbb{A}$ són tals que $[e_P] = [e_Q]$. Llavors $e_Q = \lambda e_P$, per un cert

$\lambda \in K$, i

$$Q - P = e_Q - e_P = \lambda e_P - e_P = (\lambda - 1)e_P.$$

Com que $Q - P \in V$ i $e_P \notin V$, la darrera igualtat només pot ser certa si els dos membres són nuls. Així $Q = P$ i això acaba la prova.

Proposició

$$\blacksquare i(\mathbb{A}) = \bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$$

$$\blacksquare \bar{\mathbb{A}} = i(\mathbb{A}) \sqcup \mathbb{A}_\infty$$

Prova. Donat $P \in \mathbb{A}$, $i(P) = [e_P]$ i $e_P \notin V$, d'on $i(P) \notin \mathbb{A}_\infty$. Recíprocament, si $Q \in \bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}_\infty$, llavors $Q = [\bar{x}]$, $\bar{x} \in \bar{V} - V$. És a dir,

$$\bar{x} = \lambda e_0 + x, x \in V, \lambda \neq 0,$$

d'on

$$Q = [\lambda e_0 + x] = [e_0 + \lambda^{-1}x] = i(O + \lambda^{-1}x) \in i(\mathbb{A}).$$

Clausura projectiva d'una varietat lineal

Sigui L una varietat lineal de l'espai afí $\mathbb{A}$ i $W = W(L)$ el seu espai director. Posem

$$L_\infty = [W] \subseteq [V] = \mathbb{A}_\infty$$

i diem que és la *varietat de l'infinit* (o de *punts impropis*) de L .

També posem

$$\bar{L} = i(L) \sqcup L_\infty$$

i diem que és la *clausura projectiva de L* .

- $\bar{L} \cap i(\mathbb{A}) = i(L)$
- En el cas d'una recta $L = P + \langle v \rangle$, $L_\infty = [\langle v \rangle] = [v]$ es redueix al punt (impropi) corresponent a qualsevol dels seus vectors directors v .
- Dues varietats lineals L i L' de $\mathbb{A}$ són paral·leles si i només si $L_\infty \subseteq L'_\infty$ o $L'_\infty \subseteq L_\infty$. Si L i L' tenen la mateixa dimensió, llavors L i L' són paral·leles si i només si $L_\infty = L'_\infty$.

Proposició

- L és una varietat lineal de $\bar{\mathbb{A}}$.
- $\dim(\bar{L}) = \dim(L)$.

Prova. Fixem $P \in L$. Sigui $W = W(L)$ i $r = \dim(L) = \dim(W)$. Posem

$$\bar{W} = \langle e_P \rangle + W \subseteq \bar{V}.$$

Atès que $e_P \notin V$ i $W \subseteq V$, resulta que $\dim(\bar{W}) = r + 1$. Per tant, $[\bar{W}]$ és una varietat lineal de $\bar{\mathbb{A}}$ i $\dim([\bar{W}]) = r$. Serà, doncs, suficient de veure que $[\bar{W}] = \bar{L}$.

En efecte, els punts Q de $[\bar{W}]$ tenen la forma

$$Q = [\lambda e_P + w], \lambda \in K, w \in W, \lambda e_P + w \neq 0.$$

Si $\lambda = 0$, llavors $Q = [w]$ és un punt de $[W] = L_\infty$, i qualsevol punt de L_∞ s'obté d'aquesta manera. Si $\lambda \neq 0$,

$$Q = [\lambda e_P + w] = [e_P + \lambda^{-1}w] = i(P + \lambda^{-1}w).$$

És així clar que Q és un punt de $i(L)$, i que qualsevol punt de $i(L)$ té aquesta forma (fins i tot amb $\lambda = 1$).

Quines varietats lineals de $\bar{\mathbb{A}}$ són clausura de varietats lineals de $\mathbb{A}$?

Proposició. Si M és una varietat lineal de $\bar{\mathbb{A}}$ no continguda a $\mathbb{A}_\infty$, existeix una varietat lineal L de $\mathbb{A}$ tal que $M = \bar{L}$.

Prova. Sigui $r = \dim(M)$. Sigui $F \subseteq \bar{V}$ el subespai vectorial tal que $M = [F]$. Com que $M \not\subseteq \mathbb{A}_\infty$, d'una banda $F \not\subseteq V$, amb la qual cosa $W = F \cap V$ té dimensió r (ja que F té dimensió $r + 1$), i de l'altra existeix $P \in \mathbb{A}$ tal que $\bar{P} \in M$. Per tant $F = \langle e_P \rangle + W$ i, posant $L = P + W$, és clar que $M = \bar{L}$.

Teorema. L'aplicació $L \mapsto \bar{L}$ estableix una bijecció entre les varietats lineals de $\mathbb{A}$ i les varietats lineals de $\bar{\mathbb{A}}$ no contingudes a $\mathbb{A}_\infty$.

Prova. L'aplicació és injectiva, ja que $i(L) = \bar{L} \cap i(\mathbb{A})$ i $i: \mathbb{A} \rightarrow \bar{\mathbb{A}}$ és injectiva, i és exhaustiva per la proposició anterior.

Remarca. Siguin $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{A}$. Llavors $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_r \in \bar{\mathbb{A}}$ són independents com a punts projectius si i només si $P_0, P_1, \dots, P_r$ són independents com a punts afins. A més, si aquest és el cas, $\bar{P}_0 \bar{P}_1 \cdots \bar{P}_r$ és la clausura projectiva de $P_0 P_1 \cdots P_r$.

Referència projectiva associada a una referència afí

Siguin

- $\mathbb{A}$ un espai afí;
- $R = [O; e_1, \dots, e_n]$ una referència afí de $\mathbb{A}$.
- $\bar{\mathbb{A}}$ la clausura projectiva de $\mathbb{A}$.

Posem

- $P_0 = \bar{O} = [e_0];$
- $P_i = [e_i] \in \mathbb{A}_\infty$ ($i = 1, \dots, n$);
- $U = [e_0 + e_1 + \dots + e_n].$

Lavors $\bar{\mathcal{R}} = [P_0, P_1, \dots, P_n; U]$ és una referència projectiva de $\bar{\mathbb{A}}$ i $e_0, e_1, \dots, e_n$ és una base de adaptada a $\bar{\mathcal{R}}$.

Direm que $\bar{\mathcal{R}}$ és la *referència projectiva associada a la referència afí $\mathcal{R}$* .

Coordenades afins i coordenades projectives

Si $x_1, \dots, x_n$ són les $\mathcal{R}$ -coordenades de $X \in \mathbb{A}$,

$$X = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \text{ i } \bar{X} = [e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n].$$

Per tant, $(1, x_1, \dots, x_n)$ són coordenades projectives de $\bar{X}$ respecte de la referència $\bar{\mathcal{R}}$.

Per altra banda, si un punt $Q \in \bar{\mathbb{A}}$ té coordenades projectives $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ respecte de $\mathcal{R}$, llavors $Q = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$ i és clar que $Q \in \mathbb{A}_\infty$ si i només si $\xi_0 = 0$. A més, si $Q \notin \mathbb{A}_\infty$, llavors $Q = \bar{X}$, on $X \in \mathbb{A}$ és el punt de $\mathcal{R}$ -coordenades $\frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}$, ja que

$$Q = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n] = \left[e_0 + \frac{\xi_1}{\xi_0} e_1 + \dots + \frac{\xi_n}{\xi_0} e_n \right].$$

Proposició. Si $\bar{\mathcal{R}}$ és la referència projectiva de $\mathbb{A}$ associada a la referència $\mathcal{R}$ de l'espai afí $\mathbb{A}$, el punt $[\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]_{\bar{\mathcal{R}}} \in \bar{\mathbb{A}}$ és un punt propi si i només si $\xi_0 \neq 0$ i, si aquest és el cas, el punt $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{A}$ que li correspon queda determinat per les relacions $x_i = \xi_i / \xi_0$.

Canvi de coordenades

Si $\mathbf{x}^T = A\mathbf{x}'^T + \mathbf{p}^T$ és la relació matricial que expressa el canvi de $\mathcal{R}$ -coordenades a $\mathcal{R}'$ -coordenades, on $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ són referències de l'espai afí $\mathbb{A}$, llavors

$$[\xi^T] = [A][\xi'^T],$$

$$[\bar{A}] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{p}^T & A \end{array} \right]$$

expressa el canvi de $\bar{\mathcal{R}}$ -coordenades a $\bar{\mathcal{R}}'$ -coordenades.

Equacions cartesianes afins i projectives

Sigui $\mathcal{R} = [O; e_1, \dots, e_n]$ una referència de l'espai afí $\mathbb{A}$.

Donat un sistema d'equacions lineals **compatible**,

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + a_{i0} = 0, \quad a_{i1}, \dots, a_{in}, a_{i0} \in K \quad (i = 1, \dots, m),$$

sabem que:

- Els punts $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ corresponents a les solucions $(x_1, \dots, x_n)$ formen una varietat lineal L de dimensió $n - r$, on r és el rang de la matriu $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.
- L'espai director de L està format pels vectors $x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ tals que $(x_1, \dots, x_n)$ és solució del sistema lineal homogeni

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Amb aquestes notacions tenim:

Proposició. En la referència $\bar{\mathcal{R}}$ de $\bar{\mathbb{A}}$ associada a $\mathcal{R}$,

■ El sistema lineal homogeni

$$a_{i0}\xi_0 + a_{i1}\xi_1 + \cdots + a_{in}\xi_n = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad [*]$$

representa la clausura projectiva $\bar{L}$ i el sistema lineal homogeni

$$\xi_0 = 0, a_{i1}\xi_1 + \cdots + a_{in}\xi_n = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad [**]$$

representa L_∞ .

Prova. En efecte, $[*]$ representa una varietat lineal M de $\bar{\mathbb{A}}$. Dividint per ξ_0 , veiem que $M \cap i(\mathbb{A})$ coincideix amb $i(L)$. Per tant, $M = \bar{L}$.

Que L_∞ és representada per $[**]$ és una conseqüència directa del fet que els punts de l'infinit de L són els representats per vectors de l'espai director de L .

Coordenada absoluta

Sigui $\mathcal{R} = [P_0, P_1; U]$ una referència d'una recta projectiva $\mathbb{P}^1$. Si $[\xi_0, \xi_1]$ són $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt X i $\xi_1 \neq 0$, llavors

$$x = \xi_0 / \xi_1$$

només depèn de X i $\mathcal{R}$, i diem que és la $\mathcal{R}$ -*coordenada absoluta de X* .

Com que l'únic punt que satisfà $\xi_1 = 0$ és $P_0 = [1, 0]_{\mathcal{R}}$, diem que la seva $\mathcal{R}$ -coordenada absoluta és el símbol ∞ .

Si posem $\widehat{K} = K \sqcup \{\infty\}$, llavors tenim una aplicació bijectiva $\widehat{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$,

$$x \mapsto \begin{cases} [x] = [x, 1]_{\mathcal{R}} & \text{si } x \in K \\ [\infty] = [1, 0]_{\mathcal{R}} & \text{si } x = \infty \end{cases}$$

Si $\bar{\mathcal{R}}$ és la referència projectiva associada a una referència afí $\mathcal{R} = [O; e_1]$ de $\mathbb{A}^1$, la $\bar{\mathcal{R}}$ -coordenada absoluta del punt $\bar{X}$ corresponent a un punt $X \in \mathbb{A}^1$ coincideix amb la inversa de la $\mathcal{R}$ -coordenada de X , amb la convenció que $1/0 = \infty$.