

Geometria / GP

2. Referència projectiva

© S. Xambó

- Punts dependents i independents
- Definició de referència projectiva
- Referències projectives de $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ i $\mathbb{P}^3$
- Coordenades projectives
- Canvi de referència
- Equacions cartesianes d'una varietat lineal
- Equacions paramètriques d'una varietat lineal
- Configuracions de punts: quadrangle complet

Punts dependents i independents

Siguin $P_0, P_1, \dots, P_r$ punts i suposem que $P_i = [e_i]$. Llavors

$$P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_r = [e_0, e_1, \dots, e_r],$$

$$d = \dim(P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_r) = \dim_K \langle e_0, e_1, \dots, e_r \rangle - 1$$

- $d \leq r$
- $d = r \Leftrightarrow e_0, e_1, \dots, e_r$ són linealment independents.
- Si $d = r$, diem que els punts $P_0, P_1, \dots, P_r$ són *independents*. En aquest cas, $P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_r$ és l'única varietat lineal de dimensió r que conté $P_0, P_1, \dots, P_r$ (sovint posem $P_0 P_1 \dots P_r$ per denotar-la).
- Si $d < r$, diem que els punts $P_0, P_1, \dots, P_r$ són *dependents*.

Exemple. Dos punts són independents si i només si són diferents.

Exemple. Tres punts són dependents si i només si estan alineats.

Definició de referència projectiva

Una *referència projectiva*, o un *sistema de coordenades projectives*, de $\mathbb{P}^n$ és una successió de $n + 2$ punts $P_0, P_1, \dots, P_n, U$ tals que qualssevol $n + 1$ d'ells són independents.

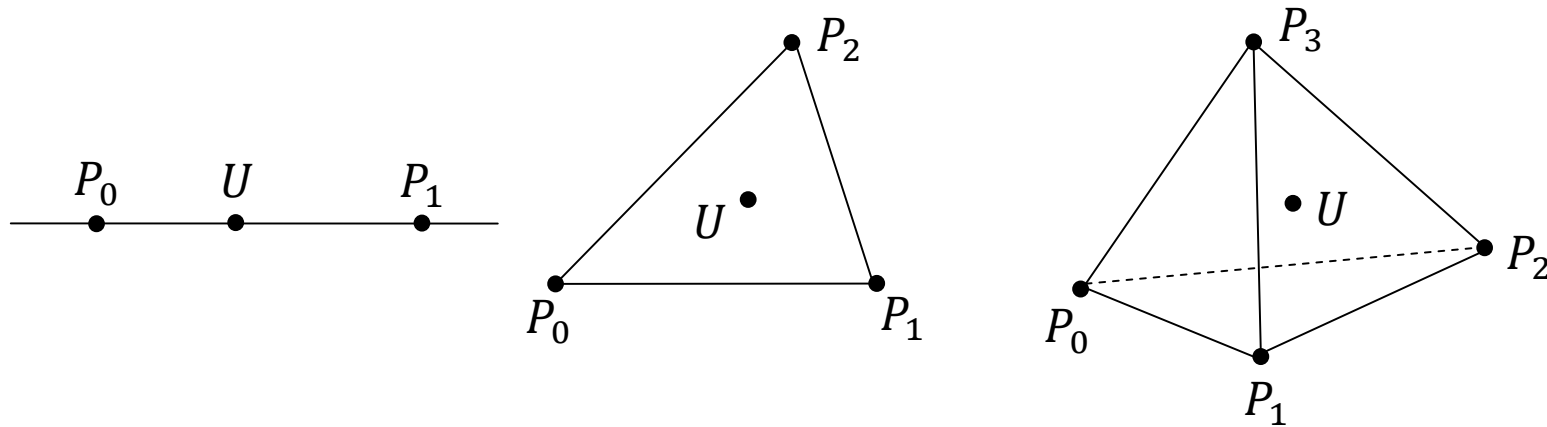
Posarem $[P_0, \dots, P_n; U]$ per indicar que $P_0, \dots, P_n, U$ formen una referència projectiva.

- Els punts $P_0, \dots, P_n$ són independents i es diu que són els *vèrtexs* de la referència.
- El punt U s'anomena *punt unitat*.
- Diem *símplex de la referència* per referir-nos al conjunt dels vèrtexs.
- Els hiperplans

$$P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{j-1} \vee P_{j+1} \vee \dots \vee P_n \quad (j = 0, \dots, n)$$
s'anomenen *cares* del símplex.
- El punt unitat no pertany a cap cara del símplex.

Referències projectives de $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ i $\mathbb{P}^3$

- Donar una referència projectiva de la recta projectiva $\mathbb{P}^1$ equival a donar una terna ordenada de punts diferents P_0, P_1, U .
- Donar una referència projectiva del pla projectiu $\mathbb{P}^2$ equival a donar tres punts no alineats P_0, P_1, P_2 i un punt U no situat sobre cap de les rectes P_0P_1, P_1P_2, P_2P_0 .
- Donar una referència de l'espai projectiu $\mathbb{P}^3$ equival a donar quatre punts independents (tetràedre) P_0, P_1, P_2, P_3 i un punt U no situat a cap de les seves cares.



Bases adaptades

Proposició. Si $[P_0, \dots, P_n; U]$ és una referència projectiva, existeixen vectors $e_0, \dots, e_n$ de E tals que $P_i = [e_i]$ i $U = [e_0 + \dots + e_n]$.

Prova. En efecte, siguin $e'_0, \dots, e'_n$ representants dels punts $P_0, \dots, P_n$ i e un representant de U . Com que $P_0, \dots, P_n$ són independents, els vectors $e'_0, \dots, e'_n$ són linealment independents, i com que n és la dimensió de l'espai, $e'_0, \dots, e'_n$ és una base de E . Existeixen, per tant, escalars $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tals que

$$e = \lambda_0 e'_0 + \dots + \lambda_n e'_n.$$

Es compleix que $\lambda_i \neq 0$ per a tot i , ja que si fos, per exemple, $\lambda_n = 0$, llavors els punts $P_0, \dots, P_{n-1}, U$ serien dependents i això contradiu la definició de referència projectiva. Així, doncs, si posem $e_i = \lambda_i e'_i$, llavors

$$P_i = [e'_i] = [e_i] \text{ i } U = [e_0 + \dots + e_n].$$

Els vectors $e_0, \dots, e_n$ de la proposició anterior formen una base de E i d'aquesta base en diem que està **adaptada** a la referència $[P_0, \dots, P_n; U]$.

Remarca. Si $e_0, \dots, e_n$ és una base de E , i definim $P_i = [e_i]$ i $U = [e_0 + \dots + e_n]$, llavors $[P_0, \dots, P_n; U]$ és una referència projectiva de $\mathbb{P}^n$ per a la qual $e_0, \dots, e_n$ és una base adaptada, i diem que $[P_0, \dots, P_n; U]$ és la **referència projectiva associada a** $e_0, \dots, e_n$.

Proposició. Dues bases $e_0, \dots, e_n$ i $e'_0, \dots, e'_n$ de E estan adaptades a la mateixa referència projectiva si i només si existeix $\lambda \in K - \{0\}$ tal que $e'_i = \lambda e_i$, per $i = 0, \dots, n$.

Prova. Si $e_0, \dots, e_n$ i $e'_0, \dots, e'_n$ són bases de E adaptades a la mateixa referència, llavors $[e_i] = [e'_i]$, per $i = 0, \dots, n$, i $[e_0 + \dots + e_n] = [e'_0 + \dots + e'_n]$.

Existeixen, per tant, escalars no nuls λ_i i λ tals que

$$e'_i = \lambda_i e_i \ (i = 0, \dots, n) \text{ i } e'_0 + \dots + e'_n = \lambda(e_0 + \dots + e_n).$$

D'aquestes relacions, i el fet que $e_0, \dots, e_n$ siguin linealment independents, en resulta que

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$$

Això prova la necessitat de la condició. La suficiència és una conseqüència immediata de les definicions.

Coordenades projectives

Sigui $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$ una referència projectiva, P un punt, $e_0, \dots, e_n$ una base adaptada a $\mathcal{R}$ i x un representant de P . Siguin $\xi_0, \dots, \xi_n$ les components de x respecte de $e_0, \dots, e_n$, això és, els escalars tals que

$$x = \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n.$$

Llavors diem que $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ són *coordenades projectives de P* respecte de $\mathcal{R}$, o *$\mathcal{R}$ -coordenades* projectives de P .

- Si $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ són coordenades projectives de P respecte de la referència $\mathcal{R}$, llavors $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ és un vector no nul de K^{n+1} .

Proposició. Donada una referència $\mathcal{R}$ i un vector no nul $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ de K^{n+1} , existeix un únic punt P pel qual $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ són coordenades projectives de P respecte de $\mathcal{R}$.

Prova. Si $e_0, \dots, e_n$ és una base adaptada a $\mathcal{R}$, el punt

$$P = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$$

té coordenades $(\xi_0, \dots, \xi_n)$. Si P' també té coordenades $(\xi_0, \dots, \xi_n)$, llavors $P' = [\xi_0 e'_0 + \dots + \xi_n e'_n]$ on $e'_0, \dots, e'_n$ és una base adaptada a $\mathcal{R}$. Però de la proposició anterior resulta que existeix $\lambda \in K - \{0\}$ tal que

$$\xi_0 e'_0 + \dots + \xi_n e'_n = \lambda(\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n),$$

d'on $P' = P$.

El punt pel qual $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ són coordenades projectives respecte de $\mathcal{R}$ el denotarem

$$[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}},$$

o simplement $[\xi_0, \dots, \xi_n]$ si la referència $\mathcal{R}$ es pot sobreentendre pel context. En tot cas tenim

$$[\xi_0, \dots, \xi_n] = [\xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n]$$

per a qualsevol base $e_0, \dots, e_n$ de E adaptada a la referència $\mathcal{R}$. En particular tenim

$$P_0 = [1, 0, \dots, 0], \dots, P_n = [0, 0, \dots, 1], U = [1, 1, \dots, 1].$$

- Si $(\xi_0, \dots, \xi_n) \in K^{n+1} - \{0\}$ i $\lambda \in K - \{0\}$, llavors

$$[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}} = [\lambda \xi_0, \dots, \lambda \xi_n]_{\mathcal{R}}.$$

Recíprocament, si $[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}} = [\xi'_0, \dots, \xi'_n]_{\mathcal{R}}$ llavors existeix $\lambda \in K - \{0\}$ tal que $\xi'_i = \lambda \xi_i$ ($i = 0, \dots, n$).

Canvi de referència

Siguin $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$ i $\mathcal{R}' = [P'_0, \dots, P'_n; U']$ referències projectives. Siguin $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_n)$ i $\mathbf{e}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ bases adaptades a $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$, respectivament. Siguin M la matriu de la base $\mathbf{e}'$ respecte de la base $\mathbf{e}$. Posarem $[M]$ per indicar la matriu M llevat d'un factor escalar no nul (és a dir, $[M] = [M']$ si i només si existeix un escalar no nul λ tal que $M' = \lambda M$) i diem que $[M]$ és la *matriu de $\mathcal{R}'$ respecte de $\mathcal{R}$* .

Sigui P un punt i siguin $\xi_0, \dots, \xi_n$ i $\xi'_0, \dots, \xi'_n$ coordenades projectives de P respecte de $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$, respectivament. Tenim, doncs, que

$$x = \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n = \mathbf{e} \xi^T \text{ i } x' = \xi'_0 e'_0 + \dots + \xi'_n e'_n = \mathbf{e}' \xi'^T$$

són representants del punt P , amb la qual cosa existeix un escalar no nul ρ tal que $x' = \rho x$. Així

$$\rho \mathbf{e} \xi^T = \rho x = x' = \mathbf{e}' \xi'^T = \mathbf{e} M \xi'^T, \text{ d'on obtenim}$$

$$\rho \xi^T = M \xi'^T \Leftrightarrow [\xi^T] = [M][\xi'^T]$$

que és la *fórmula del canvi de coordenades*.

Equacions cartesianes d'una varietat lineal

Suposem que $\mathcal{R} = [P_0, \dots, P_n; U]$ és una referència de l'espai projectiu $\mathbb{P}$ i posem $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ per denotar les corresponents coordenades projectives. Considerem un sistema homogeni de m equacions lineals en les variables $(\xi_0, \dots, \xi_n)$:

$$a_{i0}\xi_0 + \dots + a_{in}\xi_n = 0, \quad a_{i0}, \dots, a_{in} \in K, \quad i = 1, \dots, m. \quad [*]$$

Les solucions d'aquest sistema formen un subespai vectorial $W' \subseteq K^{n+1}$ i

$$\dim_K(W') = n + 1 - r,$$

on r és el rang de la matriu (a_{ij}) . Així, doncs, els punts de la forma

$$[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\mathcal{R}}, \quad \xi_0, \dots, \xi_n \text{ una solució no nul·la del sistema } [*],$$

formen una varietat lineal L de dimensió $n - r$ de $\mathbb{P}$. D'aquesta varietat lineal en diem la *varietat lineal determinada per les equacions*. També diem que $[*]$ és un *sistema d'equacions cartesianes* de la varietat L .

Exemple. Una equació de la forma

$$a_0\xi_0 + \dots + a_n\xi_n = 0$$

determina un hiperplà si els coeficients $a_0, \dots, a_n$ no són tots nuls. En el cas de $\mathbb{P}^1$, l'hiperplà $a_0\xi_0 + a_1\xi_1 = 0$ es redueix al punt $[-a_1, a_0]$.

Exemple. Si $[a_0, a_1, a_2]$ i $[b_0, b_1, b_2]$ són dos punts diferents de $\mathbb{P}^2$, llavors l'equació de la recta que determinen és

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Anàlogament, si $[a_0, a_1, a_2, a_3]$, $[b_0, b_1, b_2, b_3]$ i $[c_0, c_1, c_2, c_3]$ són tres punts independents de $\mathbb{P}^3$, llavors l'equació del pla que determinen és

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple. Si $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $[b_0, b_1, b_2, b_3]$ són punts diferents de $\mathbb{P}^3$ i es compleix $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$ (per exemple), llavors

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

són equacions cartesianes de la recta determinada pels dos punts.

Equacions paramètriques d'una varietat lineal

Sigui L una varietat lineal de dimensió r . Siguin $P_0, \dots, P_r \in L$ punts independents. Escollit un representant v_i de P_i ($i = 0, \dots, r$), els punts de L tenen la forma

$$[\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_r v_r], \lambda_0, \dots, \lambda_r \in K \text{ no tots nuls.}$$

Si $e_0, \dots, e_n$ és una base adaptada a una referència $\mathcal{R}$, i

$$v_i = b_{i0}e_0 + \dots + b_{in}e_n = \mathbf{b}_i \mathbf{e}^T \quad (i = 0, \dots, r),$$

llavors

$$\begin{aligned} [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_r v_r] \\ &= [\lambda_0(b_{00}e_0 + \dots + b_{0n}e_n) + \dots + \lambda_r(b_{r0}e_0 + \dots + b_{rn}e_n)] \\ &= [(\lambda_0 b_{00} + \dots + \lambda_r b_{r0})e_0 + \dots + (\lambda_0 b_{0n} + \dots + \lambda_r b_{rn})e_n], \end{aligned}$$

la qual cosa mostra que els punts de L són els que tenen la forma

$$[\lambda_0 b_{00} + \dots + \lambda_r b_{r0}, \dots, \lambda_0 b_{0n} + \dots + \lambda_r b_{rn}]$$

($\lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$ no tots nuls). En altres paraules, $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ són coordenades d'un punt de L si i només si

$$\xi_j = \lambda_0 b_{0j} + \dots + \lambda_r b_{rj} \quad (j = 0, \dots, n) \Leftrightarrow \xi = \lambda_0 \mathbf{b}_0 + \dots + \lambda_r \mathbf{b}_r = \lambda B^T, \quad [**]$$

on B és la matriu de $v_0, \dots, v_r$ respecte de $e_0, \dots, e_n$.

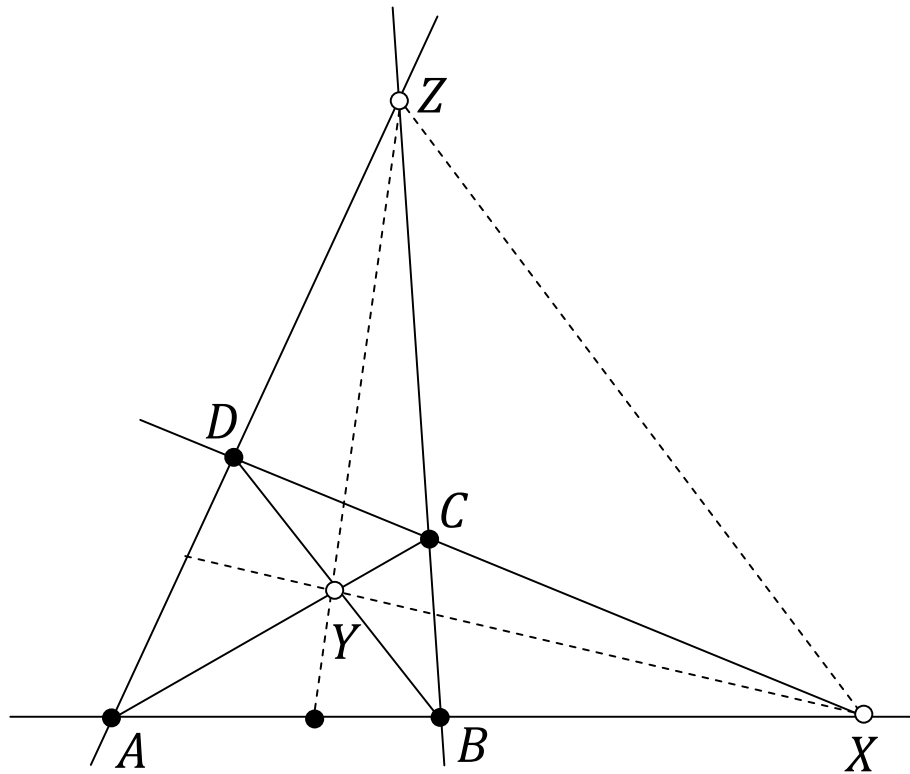
D'aquestes expressions de les $\mathcal{R}$ -coordenades dels punts de L en termes de les constants b_{ji} i dels paràmetres $\lambda_0, \dots, \lambda_r$, se'n diuen *equacions paramètriques de L* (en la referència $\mathcal{R}$). Recíprocament, un sistema d'equacions de la forma $[**]$, on b_{ji} són constants tals que la matriu $(b_{ji})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,r}}$ té rang r i $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ són paràmetres, representa una varietat lineal de dimensió r .

Exemple. Les equacions paramètriques de la recta que uneix els punts $[a_0, \dots, a_n]$ i $[b_0, \dots, b_n]$ (que suposem diferents) són

$$\xi_j = \lambda a_j + \mu b_j$$

on λ, μ són escalars arbitraris no tots dos nuls.

Configuracions de punts: quadrangle complet



Un *quadrangle* $ABCD$ està format per quatre punts coplanaris (anomenats *vèrtexs* del quadrangle) i de manera que tres qualsevol d'ells no estan alineats. Les rectes determinades per les sis possibles parelles de vèrtexs s'anomenen *costats*, i dos costats es diuen *oposats* si no tenen cap vèrtex en comú (les tres parelles de costats oposats són AB i CD , AC i BD , i AD i BC). Els tres punts d'intersecció X , Y i Z de les tres parelles de costats oposats formen el *triangle diagonal*.