

Geometria / GP

1. Espai projectiu

© S. Xambó

- **Espai Projectiu**
- **Varietats lineals**
- **Punts alineats**
- **Triangles**
- **Teorema de Pappus**
- **Intersecció i suma projectiva de varietats lineals**
- **Fórmula de les dimensions**

Espai Projectiu

Donat un espai vectorial E de dimensió $n + 1$ ($n \geq -1$), posarem $[E]$ per denotar el conjunt dels seus subespais vectorials de dimensió 1. Direm que $[E]$ és l'*espai projectiu associat a E* i dels seus elements en direm *punts*.

També direm que $[E]$ *té dimensió n* , i posarem

$$\dim([E]) = n$$

(és a dir, $\dim([E]) = \dim_K(E) - 1$).

Si $n = 1$ ($n = 2$), diem que $[E]$ és una *recta projectiva* (*pla projectiu*). En lloc de la notació $[E]$, també s'escriu $\mathbb{P}(E)$, i fins i tot $\mathbb{P}$ si E es pot sobreentendre. Per indicar que l'espai projectiu $\mathbb{P}$ té dimensió n , escriurem $\mathbb{P}^n$.

Vectors representants dels punts. El punt corresponent al subespai vectorial $\langle x \rangle$ generat per un vector no nul x serà denotat $[x]$. Si P és un punt i $P = [x]$, on x és un vector no nul de E , direm que x és un **representant** de P . Notem que si $x, x' \in E$ són no nuls, llavors

$$[x] = [x'] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \text{ tal que } x' = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow x \text{ i } x' \text{ són linealment independents.}$$

Varietats lineals

Si F és un subespai vectorial de E , llavors $[F] \subseteq [E]$. Els punts de $[F]$ són de la forma $[x]$, on x és un vector no nul arbitrari de F . Notem que

- $[\{0\}] = \emptyset$
- $[\langle x \rangle] = \{[x]\}$ per a tot vector no nul.

Un subconjunt L d'un espai projectiu $[E]$ és una **varietat lineal** si existeix un subespai vectorial F de E tal que $L = [F]$. Si F té dimensió $r + 1$, diem, d'acord amb la definició de dimensió de l'espai projectiu associat a un espai vectorial, que **L té dimensió r** , i escriurem

$$\dim(L) = r$$

(és a dir, $\dim([F]) = \dim_K(F) - 1$).

En aquesta definició no hi ha ambigüïtat, ja que, com mostra la proposició que segueix, el subespai vectorial F queda unívocament determinat per L .

■ Com que $[\{0\}] = \emptyset$, $\emptyset$ és una varietat lineal i $\dim(\emptyset) = -1$. De fet, $\emptyset$ és l'única varietat lineal que té dimensió negativa.

Proposició. Si F i F' són subespais vectorials de E , llavors

$$[F] \subseteq [F'] \Leftrightarrow F \subseteq F'.$$

En particular, $[F] = [F']$ si i només si $F = F'$.

Prova. Que $F \subseteq F'$ implica $[F] \subseteq [F']$ és clar: tot subespai de dimensió 1 de F és un subespai de dimensió 1 de F' .

Per a la implicació contrària, suposem $[F] \subseteq [F']$ i sigui $x \in F$. Volem veure que $x \in F'$. Com que aquesta conclusió és òbvia si $x = 0$, podem suposar que $x \neq 0$. Llavors $[x] \in [F] \subseteq [F']$ i per tant existeix $x' \in F'$,

$x' \neq 0$, tal que $[x] = [x']$. Aquesta igualtat implica que existeix $\lambda \in K$ tal que $x = \lambda x'$. Com que $x' \in F'$, tenim $\lambda x' \in F'$, d'on $x \in F$.

Per expressar que una varietat lineal L està continguda en una varietat lineal L' , sovint direm que *L' passa per L* , o que *L' és incident amb L* . Un punt P és diu que és *exterior* a una varietat L , o que és *independent de L* , si $P \notin L$.

Punts, rectes, plans, hiperplans

- Els punts són les varietats lineals de dimensió 0 (estrictament parlant, les varietats de dimensió 0 són les de la forma $\{P\}$, on P és un punt qualsevol, ja les varietats lineals de dimensió 0 són les de la forma $[F]$, on F és un subespai de dimensió 1 de E , i si x és qualsevol vector no nul de F , $[F] = [\langle x \rangle] = \{[x]\}$).
- Les varietats lineals de dimensió 1 s'anomenen *rectes*; les de dimensió 2, *plans*.
- Les varietats lineals de dimensió $n - 1$ s'anomenen *hiperplans*.

Notacions

- Si $x_0, x_1, \dots, x_r$ són vectors de E , posarem $[x_0, x_1, \dots, x_r]$ en lloc de $[\langle x_0, x_1, \dots, x_r \rangle]$.
- Els punts de la varietat lineal $[x_0, x_1, \dots, x_r]$ tenen la forma $[\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r]$, on $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ són tals que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \neq 0$. En particular tenim $[x_i] \in [x_0, x_1, \dots, x_r]$ si $x_i \neq 0$.
- Si $x_0, x_1, \dots, x_r$ són linealment independents, llavors $[x_0, x_1, \dots, x_r]$ té dimensió r i els seus punts tenen la forma $[\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r]$, amb $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, 0, \dots, 0)$. En aquest cas, $x_i \neq 0$ i per tant $[x_i] \in [x_0, x_1, \dots, x_r]$ per a $i = 0, 1, \dots, r$.
- En particular tenim que si $x, x' \in E$ són dos vectors linealment independents, llavors $[x, x']$ és una recta. Els punts d'aquesta recta tenen la forma $[\lambda x + \lambda' x']$, $\lambda, \lambda' \in K$, $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$. Com que $[x]$, $[x']$, $[x + x']$ són tres punts diferents de $[x, x']$, veiem que l'espai projectiu $[E]$ satisfà l'axioma A0.

Proposició (axioma A1). Donats dos punts diferents P i P' d'un espai projectiu $\mathbb{P}$, existeix una única recta que els conté.

Prova. Sigui E l'espai vectorial tal que $\mathbb{P} = [E]$. Siguin $x, x' \in E$ vectors no nuls tals que $P = [x]$ i $P' = [x']$. Com que $P \neq P'$, x i x' són linealment independents. Per tant, $\langle x, x' \rangle$ té dimensió 2 i $L = [x, x']$ és una recta. Com que $P = [x] \in L$ i $P' = [x'] \in L$, queda provada l'existència d'una recta que conté els punts P i P' .

Sigui ara M una altra recta que conté els punts P i P' . Veurem que $M = L$, i això acabarà la prova. Sigui F el subespai vectorial de E tal que $M = [F]$. Com que M és una recta, F té dimensió 2. Atès que $P, P' \in M$, tenim $x, x' \in F$ i per tant $\langle x, x' \rangle \subseteq F$. Com que els dos subespais vectorials d'aquesta inclusió tenen dimensió 2, de fet tenim $\langle x, x' \rangle = F$, d'on $L = M$.

La recta que uneix dos punts diferents P i P' serà denotada PP' . La demostració anterior prova que si x és un representant de P i x' un representant de P' , llavors $PP' = [x, x']$.

És també immediat comprovar que si L és una varietat lineal i P, P' són dos punts diferents de L , aleshores $PP' \subseteq L$.

L'afirmació recíproca també és certa: si $L \subseteq \mathbb{P}$ té la propietat que $PP' \subseteq L$ quan $P, P' \in L$, aleshores L és una varietat lineal.¹

Remarca. Veiem, doncs, que les varietats lineals coincideixen amb les varietats lineals en el sentit de la geometria projectiva axiomàtica. Amb això és fàcil veure que $\mathbb{P}^n$ compleix l'axioma A3.

En efecte, d'una banda tenim, si $e_0, e_1, \dots, e_n$ una base de E i posem $L_i = [e_0, e_1, \dots, e_i]$ per $i = 0, \dots, n$, $L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n$, de manera que existeix una cadena de varietats lineals de longitud n . Per altra banda, la longitud r de qualsevol altra cadena de varietats lineals $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r$ satisfà $r \leq n$, ja que si $M_j = [F_j]$, llavors $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_r$ i per tant $r + 1 \leq \dim(F_r) \leq \dim(E) = n + 1$.

Definició. Direm que tres punts d'un espai projectiu de dimensió $n \geq 1$ estan *alineats* si existeix una recta que els conté.

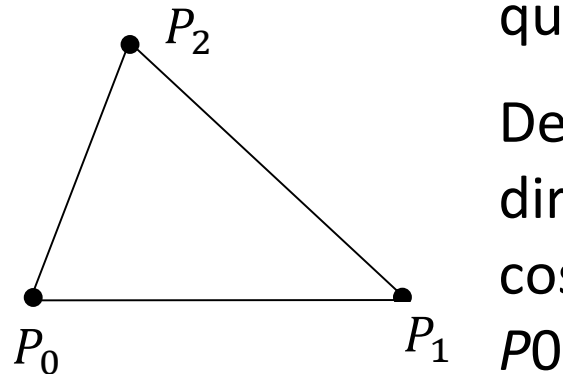
Proposició. Sigui $\mathbb{P} = [E]$ un espai projectiu de dimensió $n \geq 1$ i $P, Q, R \in \mathbb{P}$. Siguin $x, y, z \in E$ representants de P, Q, R , respectivament. Llavors P, Q, R estan alineats si i només si són linealment dependents.

Prova. Si P, Q, R estan continguts en una recta $[F]$, llavors $x, y, z \in F$. Com que F té dimensió 2, els vectors x, y, z són linealment dependents. Recíprocament, si x, y, z són linealment dependents, aleshores $\dim(\langle x, y, z \rangle) \leq 2$ i, atès que $\dim(E) \geq 2$, podem trobar un subespai vectorial F de dimensió 2 de E tal que $\langle x, y, z \rangle \subseteq F$ (notem que $F = \langle x, y, z \rangle$ si els tres punts no coincideixen). Així tenim $P, Q, R \in [F]$ i els tres punts estan alineats.

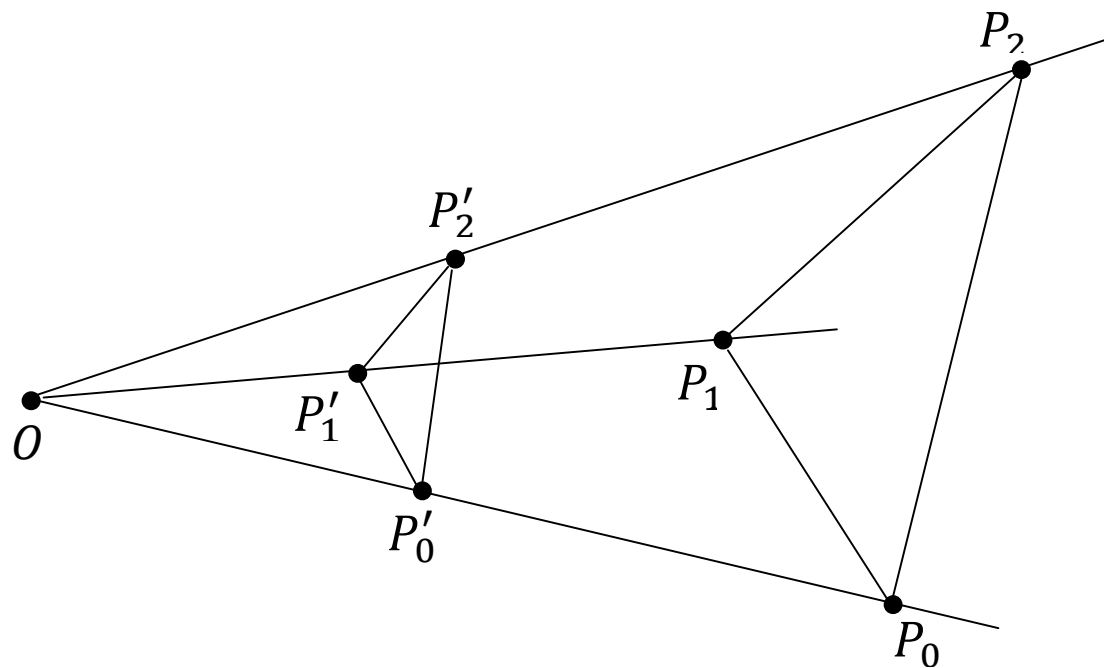
Proposició. Si P, Q, R són tres punts alineats **diferents** i x és un representant de P , aleshores existeix un representant y de Q tal que $R = [x + y]$.

Prova. Sigui y' qualsevol representant de Q . Els vectors x, y' són linealment independents, per ser $P \neq Q$. Com que $R \in PQ$, existeixen escalars λ, μ tals que $\lambda x + \mu y'$ és un representant de R . Si fos $\lambda = 0$, tindríem $R = [\mu y'] = [y'] = Q$, que és contradictori amb la suposició que $Q \neq R$. Per tant, $\lambda \neq 0$ i el vector $x + \frac{\mu}{\lambda} y'$ també és un representant de R . Anàlogament tenim $\mu \neq 0$ (altrament tindríem $P = R$), amb la qual cosa és clar que basta posar $y = \frac{\mu}{\lambda} y'$.

Triangles. Un *triangle ordenat* d'un espai projectiu $\mathbb{P}$ és una successió de tres punts P_0, P_1, P_2 no alineats. Escrivem $P_0P_1P_2$ per denotar-lo i direm que els punts P_0, P_1, P_2 són els seus *vèrtexs*.



De les rectes $L_0 = P_1P_2$, $L_1 = P_2P_0$, $L_2 = P_0P_1$, en direm *costats* del triangle. També diem que L_i és el costat oposat al vèrtex P_i .



Triangles en perspectiva

Dos triangles ordenats $P_0P_1P_2$ i $P'_0P'_1P'_2$ estan en perspectiva si $P_i \neq P'_i$ i les tres rectes $P_iP'_i$ passen per un mateix punt, diferent de qualsevol dels vèrtexs P_i i de qualsevol dels vèrtexs P'_i .

Teorema (Desargues, 1639). Si els triangles $P_0P_1P_2$ i $P'_0P'_1P'_2$ estan en perspectiva, i posem L_i, L'_i per denotar els costats de $P_0P_1P_2$ i $P'_0P'_1P'_2$ oposats a P_i i a P'_i , respectivament, llavors les interseccions $R_i = L_i \cap L'_i$ són tres punts alineats.

Prova. Sigui P el punt en el qual concorren les tres rectes $P_iP'_i$. Siguin $x, x_0, x_1, x_2 \in E - \{0\}$ tals que $P = [x]$ i $P_i = [x_i]$. Com que P, P_i, P'_i estan alineats i són diferents, podem escollir x_i de manera que $P'_i = [x + x_i]$. Ara observem que el punt $[x_1 - x_2]$ de la recta $L_0 = P_1P_2$ és també de la recta $L'_0 = P'_1P'_2$, ja que $[x_1 - x_2] = [(x + x_1) - (x + x_2)]$. Com que les rectes L_0 i L'_0 són clarament distintes, veiem que

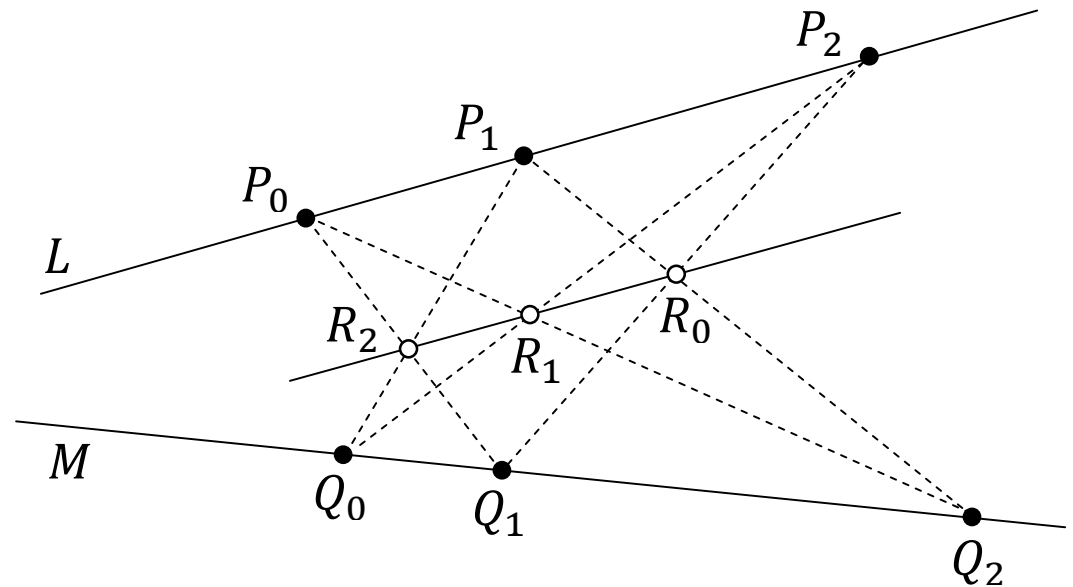
$$R_0 = L_0 \cap L'_0 = [x_1 - x_2].$$

Anàlogament, $R_1 = [x_2 - x_0]$, $R_2 = [x_0 - x_1]$. Finalment, els punts R_0, R_1, R_2 estan alineats, ja que

$$(x_1 - x_2) + (x_2 - x_0) + (x_0 - x_1) = 0.$$

En l'enunciat del teorema que segueix usem que **dues rectes diferents d'un pla projectiu es tallen en un punt**. Això és clar, atès que la intersecció de dos subespais vectorials de dimensió 2 diferents d'un espai vectorial de dimensió 3 és un subespai vectorial de dimensió 1.

Teorema (Pappus, ~ 340). En un pla projectiu $\mathbb{P}$, siguin L i M dues rectes diferents i P el seu punt d'intersecció. Siguin P_0, P_1, P_2 punts diferents de $L - \{P\}$ i Q_0, Q_1, Q_2 punts diferents de $M - \{P\}$. Aleshores, les interseccions



$R_0 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$, $R_1 = P_2Q_0 \cap P_0Q_2$, $R_2 = P_0Q_1 \cap P_1Q_0$
són tres punts alineats.

Prova. Sigui $x \in E - \{0\}$ tal que $P = [x]$. Com que P, P_0, P_1, P_2 són punts diferents de L , existeix $y \in E - \{0\}$ tal que $P_0 = [y]$, $P_1 = [x + y]$, $P_2 = [x + ay]$ per un cert $a \in K - \{0,1\}$. Anàlogament, existeix

$z \in E - \{0\}$ tal que $Q_0 = [z]$, $Q_1 = [x + z]$, $Q_2 = [x + bz]$ per un cert $b \in K - \{0,1\}$.

Com que P, P_0, Q_0 no estan alineats, els vectors x, y, z són linealment independents. Ara tenim

$$R_2 = [x + y + z],$$

ja que

$$[x + y + z] = \begin{cases} [(x + y) + z] \in P_1 Q_0 \\ [y + (x + z)] \in P_0 Q_1 \end{cases}$$

Notem que les rectes $P_0 Q_1$ i $P_1 Q_0$ són diferents i, per tant, $[x + y + z]$ és l'únic punt comú a aquestes dues rectes.

També tenim

$$R_1 = [x + ay + bz],$$

ja que

$$[x + ay + bz] = \begin{cases} [(x + ay) + bz] \in P_2 Q_0 \\ [ay + (x + bz)] \in P_0 Q_2 \end{cases}$$

Anàlogament

$$R_0 = [(ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z],$$

ja que

$$\begin{aligned} & [(ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z] \\ &= \begin{cases} [(a(b - 1)(x + y) + (a - 1)(x + bz))] \in P_1Q_2 \\ [(a - 1)b(x + z) + (b - 1)(x + ay)] \in P_2Q_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalment observem que

$$ab(x + y + z) - (x + ay + bz) = (ab - 1)x + a(b - 1)y + b(a - 1)z$$

i, per tant, $R_0 \in R_1R_2$.

Remarca. En la darrera igualtat usem que $ab = ba$, de manera que estrictament parlant el teorema de Pappus és vàlid si, i només si, el cos L és commutatiu.

Intersecció i suma projectiva de varietats lineals

La intersecció $L \cap L'$ de dues varietats lineals $L = [F]$ i $L' = [F']$ d'un espai projectiu $\mathbb{P} = [E]$ és una varietat lineal, ja que

$$[F] \cap [F'] = [F \cap F'].$$

Notem que $L \cap L'$ és la màxima varietat lineal continguda a L i L' , en el sentit que una varietat lineal M compleix $M \subseteq L$ i $M \subseteq L'$ si i només si $M \subseteq L \cap L'$.

Vegem ara que existeix, amb les mateixes notacions, una varietat $L \vee L'$ que és la mínima que conté L i L' , en el sentit que $M \supseteq L$ i $M \supseteq L'$ si i només si $M \supseteq L \vee L'$. En efecte, si $L = [F]$ i $L' = [F']$, on F i F' són subespais vectorials de E , llavors

$$L \vee L' = [F + F']$$

satisfà les condicions, atès que $F + F'$ és el mínim subespai vectorial de E que conté F i F' . Direm que $L \vee L'$ és la **suma projectiva** de les varietats L i L' . Per exemple, si P i Q són punts, llavors $P \vee Q = PQ$.

Fórmula de les dimensions

Proposició. Si L i L' són varietats lineals de l'espai projectiu $\mathbb{P} = [E]$, llavors

$$\dim(L \vee L') + \dim(L \cap L') = \dim(L) + \dim(L').$$

Prova. Siguin F i F' els subespais vectorials de E tals que $L = [F]$ i $L' = [F']$. Aleshores

$$\dim(F + F') + \dim(F \cap F') = \dim(F) + \dim(F').$$

La fórmula de l'enunciat en resulta immediatament, ja que

$$\dim(F + F') = \dim(L \vee L') + 1,$$

$$\dim(F \cap F') = \dim(L \cap L') + 1,$$

$$\dim(F) = \dim(L) + 1,$$

$$\dim(F') = \dim(L') + 1.$$

Exemple. Sigui L una varietat lineal d'un espai projectiu i Q un punt exterior a L . Així $L \cap Q = \emptyset$ i, per tant, $\dim(L \cap Q) = -1$. Com que $\dim(Q) = 0$, de la fórmula de les dimensions en deduïm que

$$\dim(L \vee Q) = \dim(L) + 1.$$

En el cas particular en què L és un punt P , aquesta fórmula ens diu que $P \vee Q$ és una recta, i per tant que $P \vee Q = PQ$, com ja hem observat anteriorment. Notem que si L és una recta, aleshores $L \vee Q$ és un pla.

Exemple.

Sigui H un hiperplà de $\mathbb{P}^n$ i suposem que L és una varietat lineal no continguda a H . Llavors $H \vee L = \mathbb{P}^n$ i la fórmula de les dimensions ens dona

$\dim(H \cap L) = \dim(H) + \dim(L) - \dim(H \vee L) = n - 1 + \dim(L) - n = \dim(L) - 1$,
és a dir,

$$\dim(H \cap L) = \dim(L) - 1.$$

En el cas en què $\dim(L) = 1$, aquesta fórmula ens diu que la intersecció d'una recta amb un hiperplà que no la conté és un punt.

Quan $n = 2$, H és una recta i l'enunciat precedent ens dona que dues rectes distintes d'un pla projectiu es tallen en un punt.

Exemple. Considerem el cas $n = 3$. Com que els hiperplans de $\mathbb{P}^3$ són els plans, l'enunciat precedent ens dóna que dos plans diferents de es tallen en una recta. Per altra banda, la intersecció d'una recta amb un pla que no la conté és un punt. Pel que fa a dues rectes diferents L i L' de $\mathbb{P}^3$, es poden donar dues possibilitats. Una és que

$$\dim(L \vee L') = 2,$$

és a dir, que les dues rectes estiguin contingudes en un mateix pla (es diu, aleshores, que les dues rectes són *coplanàries*), i que és equivalent a dir que $L \cap L'$ és un punt. L'altra possibilitat és que

$$\dim(L \vee L') = 3$$

i que equival a dir que $L \cap L' = \emptyset$. En aquest cas, es diu que les dues rectes *es creuen*.

Exemple (verificació de l'axioma A2). Siguin A, B, C, D quatre punts distints i no alineats, i suposem que les rectes AB i CD es tallen. Llavors $AB \vee CD$ és un pla. Com que AC i BD són rectes d'aquest pla, també es tallen, com es tractava de veure.²

Notes

1. Sigui $L \subseteq \mathbb{P}(E)$ tal que $PP' \subseteq L$ quan $P, P' \in L$. Per veure que L és una varietat lineal, basta veure que $F = \{0\} \cup \{x \in E - \{0\} \mid [x] \in L\}$ és un subespai vectorial, ja que si aquest és el cas aleshores és clar que $L = [F]$.

La propietat $\lambda x \in F$ si $x \in F$ i $\lambda \in K$ és òbvia si $x = 0$ o $\lambda = 0$, i altrament és conseqüència de $[\lambda x] = [x] \in L$ i la definició de F .

Queda per mostrar que $x + x' \in F$ si $x, x' \in F$. Com que la relació és òbvia si $x = 0$ o $x' = 0$ o $x + x' = 0$, podem suposar que $x, x', x + x' \neq 0$. Sigui $P = [x] \in L$ i $P' = [x'] \in L$. Aleshores $PP' \subseteq L$, per hipòtesi, i $[x + x'] \in PP'$, i així $[x + x'] \in L$, és a dir, $x + x' \in F$.

2. En la formulació de l'axioma A2 es suposa que tres qualssevol dels punts no estan sobre una recta, però la conclusió és vàlida encara que n'hi hagi tres d'alineats.