

Geometria / Geometria Projectiva (GP)

© S. Xambó

- Introducció: de la perspectiva a l'espai projectiu
- Espai projectiu. Varietats lineals
- Referència projectiva.
- Clausura projectiva d'un espai afí
- Raó doble
- Projectivitats. Grup projectiu
- Principi de dualitat

Geometria / GP

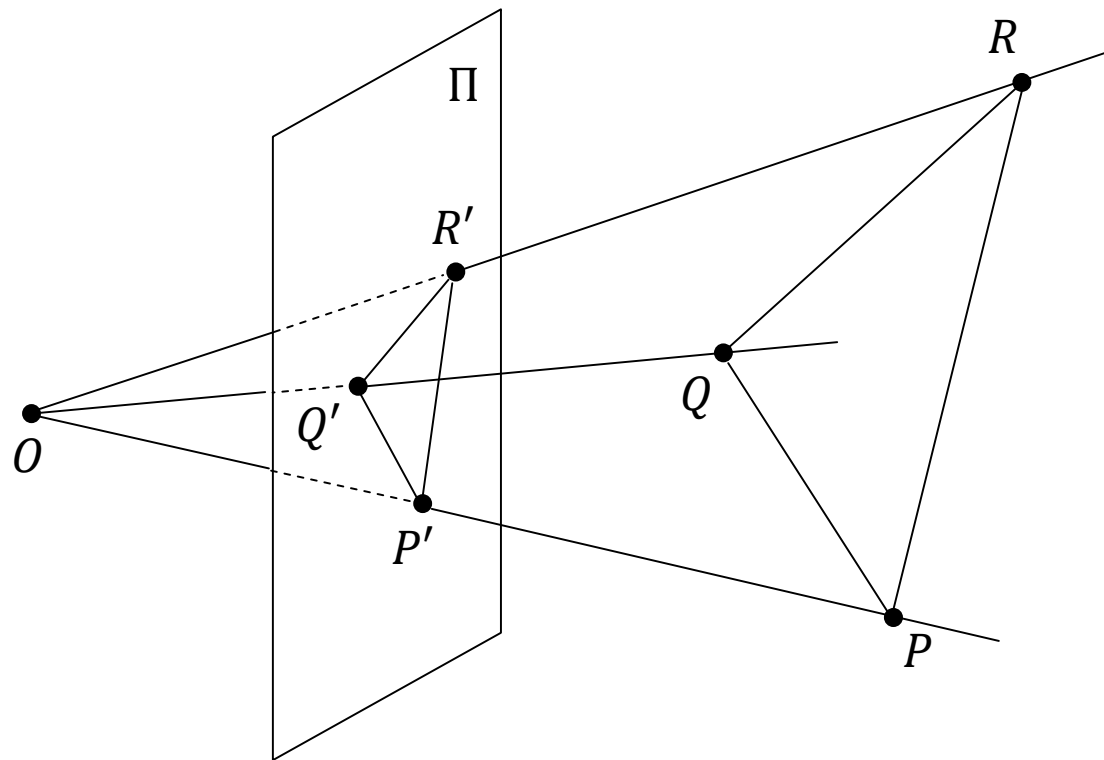
0. Introducció

© S. Xambó

- Perspectiva. Projectió i secció
- Representació projectiva d'una recta
- Punts impropis
- Teorema de Desargues
- Geometria projectiva axiomàtica (GPA)
- Teorema fonamental de la GPA
- L'enfocament actual de la GP

Perspectiva

El dibuix en *perspectiva* d'un objecte ha de satisfer les relacions que s'esquematitzen en la figura: si O és el punt des del qual es contemplen els



punts $P, Q, R, \dots$ de la figura, i Π és el pla del dibuix, els punts $P', Q', R', \dots$ corresponents a $P, Q, R, \dots$ són la intersecció de les rectes $OP, OQ, OR, \dots$ amb Π .

De la descripció anterior podem destil·lar dues operacions geomètriques fonamen-

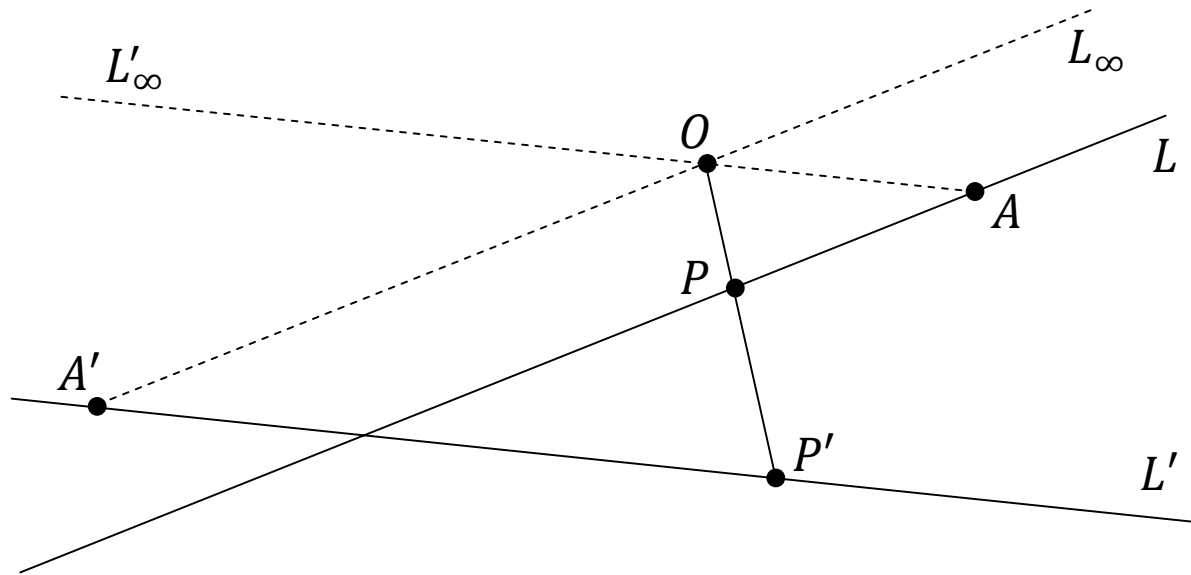
tals. La primera consisteix a *projectar* un punt P de l'espai afí des d'un punt fix O , és a dir, a formar la recta OP . La segona consisteix a *tallar* les rectes per O (dites *projectants des de* O) per un pla Π que no passa per O .

La composició d'aquestes dues operacions ens dóna la *projecció des de O* d'un punt P sobre el pla Π , això és, el punt P' d'intersecció amb Π de la projectant de P des de O (la recta OP): $P' = OP \cap \Pi$.

Remarques. El punt O és l'únic que no es pot projectar des de O , i que la secció per Π només està definida per les projectants des de O que tallen a Π , és a dir, no està definida per les projectants paral·leles a Π . D'això en resulta que la projecció d'un punt P sobre el pla Π no està definida precisament quan la projectant OP és paral·lela a Π .

Representació projectiva d'una recta

Per tal de veure que el comportament de les projeccions respecte del paral·lisme no és més satisfactori que el que podria fer pensar el darrer paràgraf, estudiem primer amb una mica més de detall la projecció d'una recta des d'un punt.



Considerem una recta L que no passa per O i formem el conjunt L_O de les projectants des de O dels punts P de L . És clar que L_O coincideix amb el conjunt de rec-

tes per O contingudes en el pla $L \vee O$, llevat de la recta per O paral·lela a L . Si posem $\bar{L}_O$ per denotar el conjunt de rectes per O contingudes en el pla $L \vee O$, conjunt al qual ens referirem dient-ne la **representació projectiva** de L , i $OL_\infty \in \bar{L}_O$ per denotar la recta per O paral·lela a L , llavors tenim $\bar{L}_O = L_O \sqcup \{OL_\infty\}$.

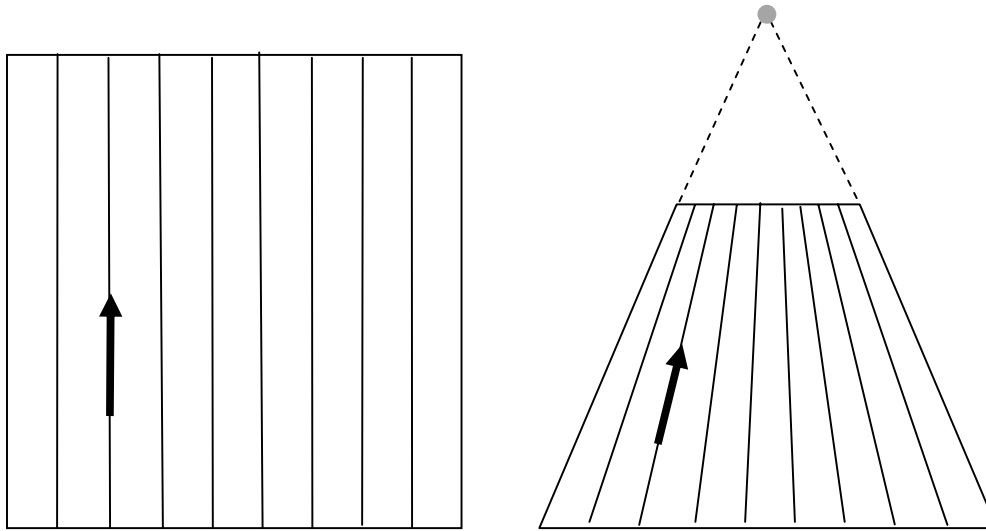
La projectant OL_∞ només és excepcional respecte de L o, més ben dit, de les rectes paral·leles a L . Per veure això amb més relleu, considerem una altra recta L' del pla $L \vee O$, no paral·lela a L i que no passa per O . Llavors

OL_∞ és la projectant des de O del punt A' de L' obtingut tallant OL_∞ i L' , és a dir, $OL_\infty = OA'$. És natural, per tant, pensar L_∞ com un «punt» (que podem anomenar *punt de l'infinit* de L), tal que la seva projectant des de O és la recta OL_∞ .

Per contrast, si A és la intersecció de L amb la paral·lela a L' per O (que d'acord amb les notacions ja explicades denotarem OL'_∞), llavors la projectant $OA \in L_O$ de A no és la projectant de cap punt de L' . Però com que $OA = OL'_\infty$, és natural dir que la projecció de A sobre L' és el «punt» L'_∞ .

Punts impropis

Les observacions de l'apartat anterior ens suggereixen la construcció, que exposem tot seguit i que essencialment és deguda a DESARGUES, de la clausura projectiva d'un espai afí.



Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí. Posem $\mathbb{A}_\infty$ per denotar el conjunt de classes d'equivalència de les rectes de $\mathbb{A}$ per la relació de paral·lelisme. Dels elements de $\mathbb{A}_\infty$ en direm *punts impropis*, o *punts de l'infinit*, de $\mathbb{A}$ i del con-

junt $\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \sqcup \mathbb{A}_\infty$ la *clausura projectiva* de $\mathbb{A}$.

Posarem $L_\infty \in \mathbb{A}_\infty$ per denotar la seva classe d'equivalència d'una recta L , i direm que L_∞ és el *punt impropí*, o *de l'infinit*, de L .

Notem que a tot vector $v \neq 0$ li correspon un punt impropí, que denotarem $[v]$, i que és la classe de les rectes que tenen espai director $\langle v \rangle$. És clar, doncs, que $L_\infty = [v]$ si L és una recta i v un vector director de L . També és clar que $[v] = [v']$ si i només si existeix un escalar λ tal que $v' = \lambda v$. Posem $\bar{L} = L \sqcup L_\infty$, i diem que $\bar{L}$ és la *clausura projectiva* de L .

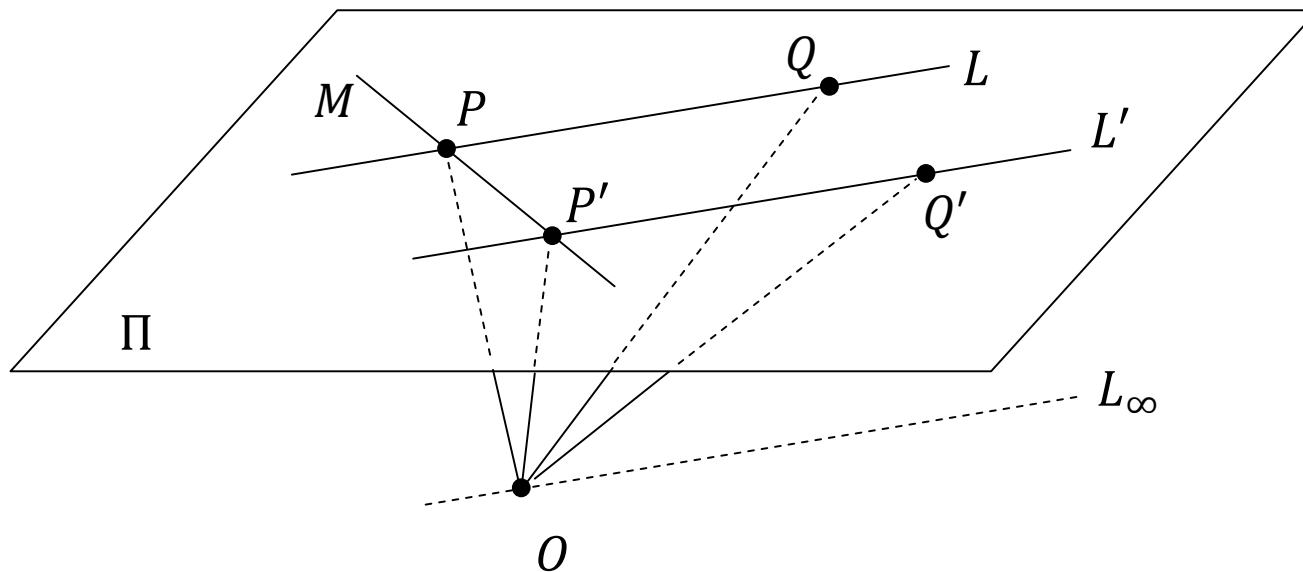
Donat un punt impropri $X \in \mathbb{A}_\infty$, i un punt $O \in \mathbb{A}$, posarem OX per denotar l'única recta per O el punt impropri de la qual és X , és a dir, l'única recta per O que és de la classe X . Així, si L és una recta, OL_∞ és la recta per O paral·lela a L . Diem que OX és la projectant des de O del punt impropri X .

Anàlogament, si $\Pi \subseteq \mathbb{A}$ és un pla, posarem Π_∞ per denotar el conjunt de punts impropis de les rectes contingudes a Π , o, el que és el mateix, el conjunt de punts impropis de les rectes paral·leles a Π . Si W és l'espai director de Π , llavors Π_∞ és el conjunt, que també denotarem $[W]$, de punts de la forma $[v]$, on $v \in W - \{0\}$.

Considerem ara, amb el propòsit d'il·lustrar les idees anteriors en relació amb les projeccions i seccions, la projecció d'un pla Π que no passa per O . (En el que segueix podem suposem que $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3$.) La projectant OP d'un punt $P \in \Pi$ variable ens dóna una bijecció entre Π i el conjunt Π_O de les projectants des de O no paral·leles a Π .

Per altra banda, la projectant OX d'un punt variable $X \in \Pi_\infty$ ens dóna una bijecció entre Π_∞ i el conjunt de projectants des de O paral·leles a Π . Per analogia amb el cas d'una recta, posarem $\bar{\Pi}_O$ per denotar el conjunt de projectants des de O contingudes a $\Pi \vee O$, amb la qual cosa tenim una bijecció entre $\bar{\Pi}$ i $\bar{\Pi}_O$, donada per $X \mapsto OX$, per a tot $X \in \bar{\Pi}$.

Direm que $\bar{\Pi}_O$ és la *representació projectiva* de Π .

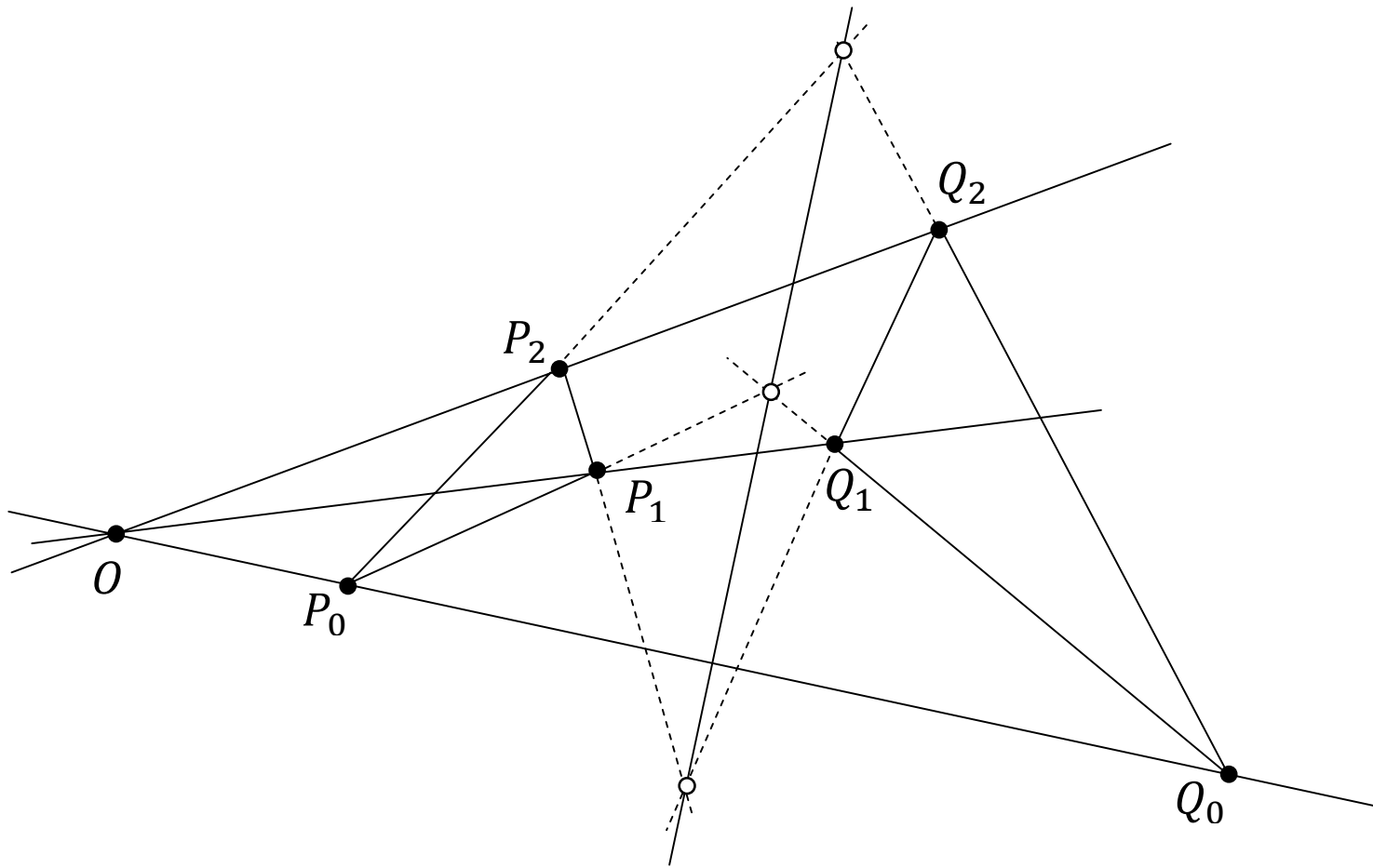


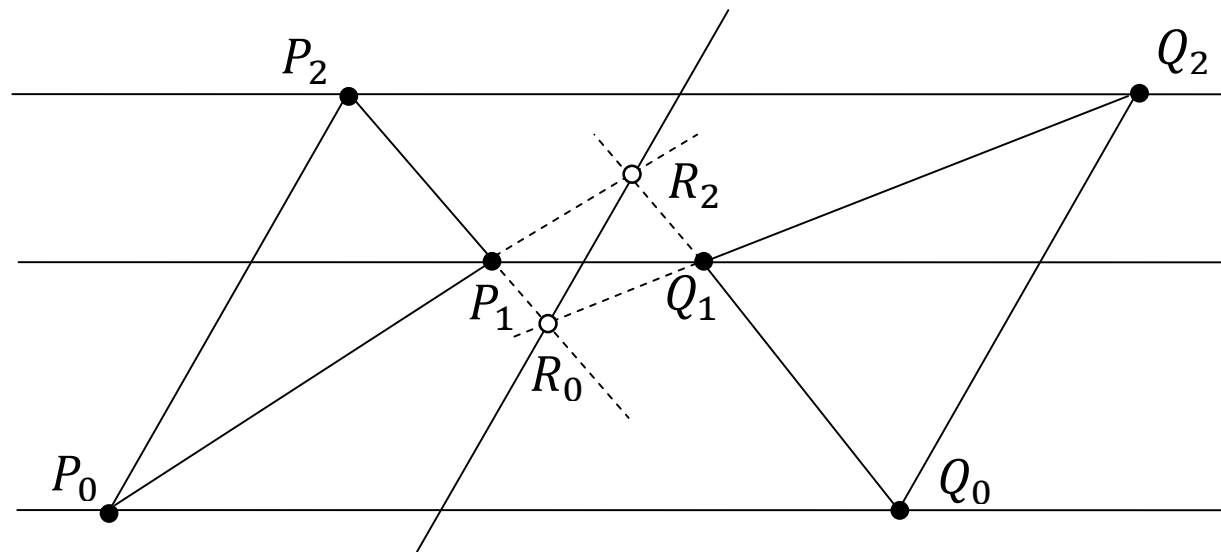
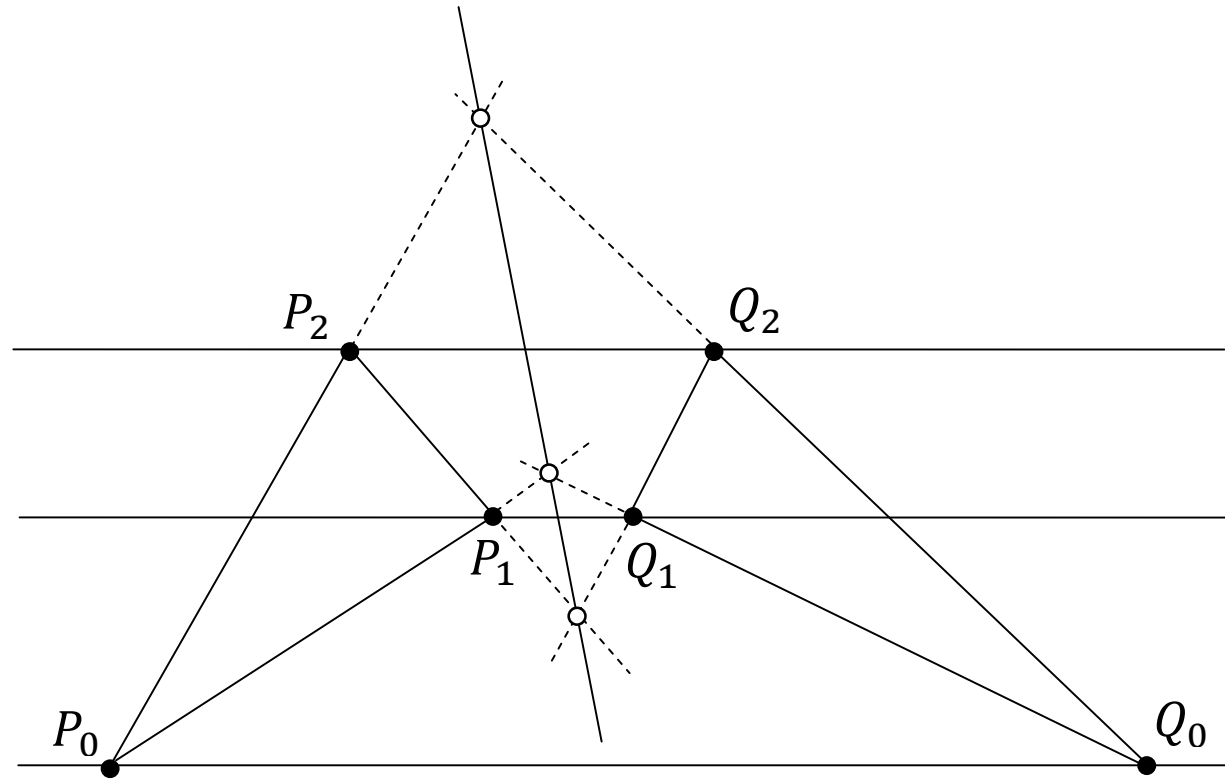
Sigui L una recta continguda a Π . La bijecció entre $\bar{\Pi}$ i $\bar{\Pi}_O$ ($X \mapsto OX$), restringida a $\bar{L}$, ens dóna la bijecció, que hem descrit anteriorment, entre $\bar{L}$ i el conjunt $\bar{L}_O$. Al punt impropï de L , L_∞ , li correspon la projectant OL_∞ . (Parem esment: a l'apartat anterior OL_∞ no era més que una notació per designar la recta per O paral·lela a L ; aquesta notació ens ha suggerit tractar L_∞ com un punt; ara, un cop definit què cal entendre per L_∞ , OL_∞ representa efectivament la projectant de L_∞ des de O .)

Si M és una altra recta del pla Π , no paral·lela a L , i si $\{P\} = L \cap M$, llavors $\{OP\} = \bar{L}_O \cap \bar{M}_O$, en correspondència amb la relació $\bar{L} \cap \bar{M} = \{P\}$. Per altra banda, si L' és una recta del pla Π paral·lela a L , però diferent de L , llavors $\bar{L}_O \cap \bar{L}'_O = \{OL_\infty\} (= OL'_\infty)$, en correspondència amb la relació $\bar{L} \cap \bar{L}' = \{L_\infty\}$.

Hem trobat, així, que la clausura projectiva $\bar{\Pi}$ d'un pla Π de l'espai afí de dimensió 3 es pot descriure com el conjunt de rectes que passen per un punt O exterior a Π , corresponent-se les rectes no paral·leles a Π amb els punts de Π i les rectes paral·leles a Π amb els punts impropis de Π . En aquesta correspondència, la clausura projectiva d'una recta L de Π es representa com el conjunt de rectes per O contingudes en el pla $L \vee O$, de manera que queda establerta una bijecció entre les rectes L de Π i els plans que passen per O , llevat el paral·lel a Π . Ara els punts impropis de Π estan en correspondència bijectiva amb les rectes per O paral·leles a Π . Com que aquestes rectes són les rectes per O contingudes en el pla per O paral·lel a Π , veiem que Π_∞ té, des del punt de vista de les projeccions des de O , la mateixa estructura que $\bar{L}$, raó per la qual Π_∞ s'anomena **recta de punts impropis** de Π .

Teorema de Desargues





Geometria projectiva axiomàtica

Sigui $\mathbb{P}$ un conjunt (els elements del qual en direm *punts*) i $\mathcal{R}$ una família de subconjunts de $\mathbb{P}$ (dels seus elements en direm *rectes*). Si P és un punt i r un recta, en lloc de $P \in r$ també direm que r *passa per* P o que P i r són *incidents*. Donats tres o més punts diem que estan *alineats* si hi ha una recta que els conté.

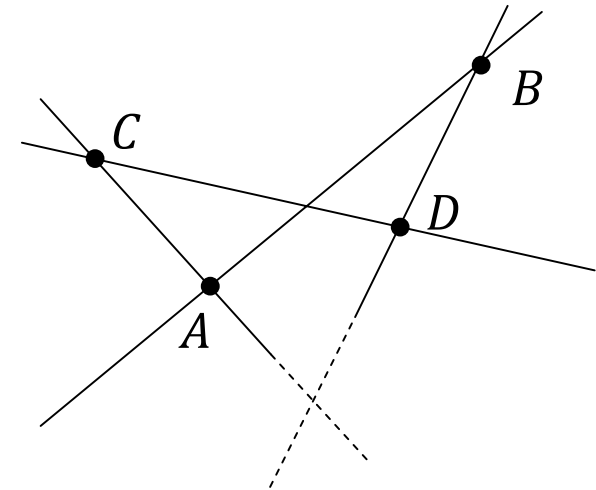
Direm que $(\mathbb{P}, \mathcal{R})$ és un *espai projectiu* de dimensió n si satisfà els axiomes A0-A3 següents.

A0. Tota recta conté almenys tres punts.

A1. Per dos punts diferents A i B hi passa una recta i només una, i posem AB per denotar-la.

D'un subconjunt L de $\mathbb{P}$ diem que és una *varietat lineal* si $A, B \in L, A \neq B \Rightarrow AB \subseteq L$.

A2. Si A, B, C, D són punts, tres qualssevol dels quals no estan alineats, i AB i CD es tallen en un punt, llavors AC i BD es tallen en un punt. (Aquest axioma es coneix com a axioma de Veblen—Young).¹



A3. Existeixen varietats lineals no buides $L_j, j = 0, \dots, n$, tals que

$$L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \text{ (cadena estricta de longitud } n\text{)}$$

i n és màxim amb aquesta propietat.

Escriurem $\mathbb{P}^n$ per denotar un espai projectiu de dimensió n .

Remarca. En el cas d'un pla projectiu $\mathbb{P}^2$, A2 i A3 equivalen a dir que $\mathbb{P}$ conté almenys quatre punts no alineats i que dues rectes distintes tenen almenys un punt en comú (que necessàriament és únic).²

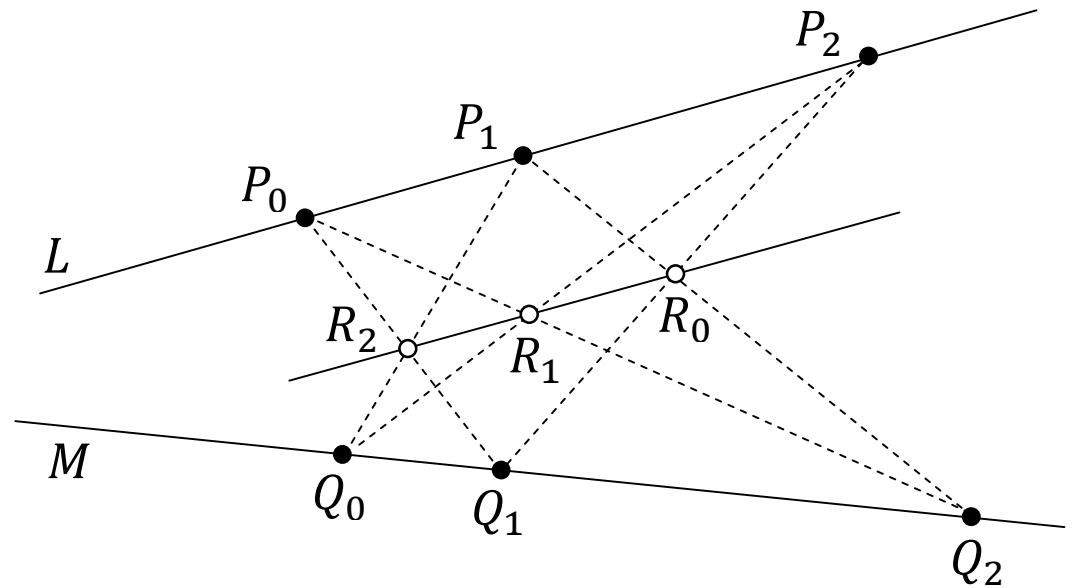
Teorema fonamental de la geometria projectiva axiomàtica

Donat un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ amb $n \geq 3$, o un pla projectiu $\mathbb{P}^2$ que compleix el teorema de Desargues (d'aquests plans se'n diu desarguessians), existeix un cos K (possiblement no commutatiu), un K -espai vectorial E de dimensió $n + 1$, i una bijecció $\mathbb{P}^n \leftrightarrow [E]$, on $[E]$ és el conjunt de subespais vectorials de dimensió 1 de E tal que $L \subseteq \mathbb{P}^n$ és una recta si i només si es correspon amb un subconjunt $[F] \subseteq [E]$, F un subespai vectorial de dimensió 2 de E .

Referències. R. J. Brumcrot, *Modern Projective Geometry* (Holt, Reinhart and Winston). B. Segre, *Lectures on Modern Geometry* (Ed. Cremonese).

Remarca. Un teorema remarcable de geometria projectiva és el següent:

Teorema (Pappus). Sigui L i M dues rectes distintes d'un pla projectiu i $P = L \cap M$. Siguin $P_0, P_1, P_2 \in L - \{P\}$ i $Q_0, Q_1, Q_2 \in M - \{P\}$. Posem
 $R_0 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$,
 $R_1 = P_2Q_0 \cap P_0Q_2$,
 $R_2 = P_0Q_1 \cap P_1Q_0$. Aleshores els punts R_0, R_1, R_2 estan alineats.



Doncs bé, en el capítol següent veurem que un espai projectiu axiomàtic satisfà el teorema de Pappus si i només si el cos K (notacions del teorema fonamental) és commutatiu.

Enfocament actual de la geometria projectiva

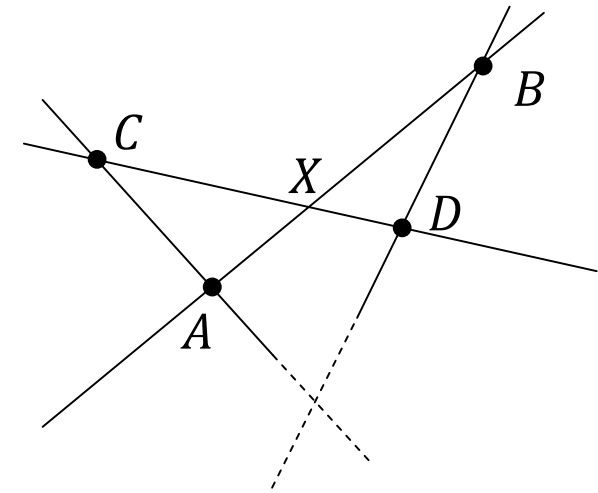
El resultat del teorema fonamental de la geometria projectiva axiomàtica és que els punts d'un espai projectiu axiomàtic de dimensió n es poden representar com els subespais vectorials de dimensió 1 d'un cert K -espai vectorial E de dimensió $n + 1$. Si ens mirem aquest espai vectorial com un espai afí, els subespais de E de dimensió 1 són les rectes de E que passen per l'origen. La conclusió concorda, doncs, amb les consideracions fetes anteriorment (pàgines 4-11), ja que hem trobat (per exemple) que el pla projectiu $\bar{\Pi} = \Pi \sqcup \Pi_{\infty}$ associat a un pla afí $\Pi \subset \mathbb{A}^3$ es podia representar pel conjunt de rectes de $\mathbb{A}^3$ que passen per un punt O exterior a Π .

Això ens porta a prendre el conjunt $[E]$ de les rectes vectorials d'un K -espai vectorial E com el punt de partida més convenient per a l'estudi de la geometria projectiva des d'un punt de vista modern. Aquest enfocament té molts avantatges:

- com en el cas de la geometria afí i mètrica, tenim a la nostra disposició tot el formalisme de l'àlgebra lineal;
- obtenim tot el que es pot aconseguir amb la geometria projectiva axiomàtica (llevat els plans no desarguessians³);
- el tractament inclou el cas de dimensió $n = 1$, que la geometria axiomàtica només pot considerar com a part d'un espai de dimensió superior, però no com una entitat en si;
- ens permet retrobar la representació projectiva de l'espai projectiu $\bar{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \sqcup \mathbb{A}_\infty$ associat a un espai afí, ja que aquesta representació ens mostrava que podem pensar $\bar{\mathbb{A}}$ com el conjunt de rectes per un punt O exterior a $\mathbb{A}$, corresponent les rectes paral·leles a $\mathbb{A}$ als punts impropis o de l'infinit.

Notes

1. L'axioma A2 també es pot formular dient que una recta que talla a dos costats d'un triangle en punts diferents també talla el tercer.



En la figura, que reproduïx la que acompanya l'enunciat de A2, podem formar el triangle AXC , on X és el punt d'intersecció de AB i CD . Llavors la recta BD talla els costats AX i CX del triangle AXC en els punts B i D , respectivament, i dir que BD talla AC és tant com dir que BD talla el tercer costat AC de AXC .

2. Suposem primer que es verifiquen A2 i A3 amb $n = 2$. Aleshores volem veure que

- $\mathbb{P}$ conté 4 punts no alineats
- Dues rectes distintes de $\mathbb{P}$ es tallen en un punt.

En efecte, per hipòtesi existeix una cadena $L_0 \subset L_1 \subset L_2$ de varietats lineals de longitud 2 i cap altra cadena de varietats lineals pot tenir longi-

tud superior a 2. En resulta que L_1 ha de ser una recta i llavors per obtenir quatre punts no alineats basta prendre tres punts d'aquesta recta i un punt de $L_2 - L_1$. Per altra banda, si L i L' són rectes, i $Q \in L' - L$, llavors no és difícil veure, usant A2, que el conjunt $\bigcup_{P \in L} QP$ és una varietat lineal. Com que conté L estrictament, A3 ens diu que $\mathbb{P} = \bigcup_{P \in L} QP$. En particular resulta $L' \subset \bigcup_{P \in L} QP$, d'on resulta que L' ha de ser de la forma OP per algun P de L .

Recíprocament, suposem que $\mathbb{P}$ conté quatre punts no alineats i que dues rectes distintes sempre es tallen en un punt. Llavors l'axioma A2 és obvi. Pel que fa a A3, hem de veure que hi ha una cadena $L_0 \subset L_1 \subset L_2$ de varietats lineals de longitud 2 i cap altra cadena de varietats lineals pot tenir longitud superior a 2. Per a l'existència d'una tal cadena, basta prendre una recta $L = PQ$ i fer $L_0 = P$, $L_1 = L$, $L_2 = \mathbb{P}$. I per veure que la longitud r d'una cadena $L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_r$ (que podem suposar irrefinable, i amb $r \geq 2$) no pot ser superior a 2, adonem-nos que L_0 ha de ser un punt i $L = L_1$ una recta. Aleshores, si $Q \in L_2 - L$, $\bigcup_{P \in L} QP$ es una va-

rietat lineal (això es veu usant que dues rectes qualssevol es tallen) i per tant $L_2 = \bigcup_{P \in L} QP$, ja que altrament la cadena seria refinable. Això prova que $r = 2$.

3. És molt recomanable l'article de Ch Weible titulat *Survey of Non-Desarguessian Planes* (Notices AMS, Noveber 2007, pàg. 1294-1303).