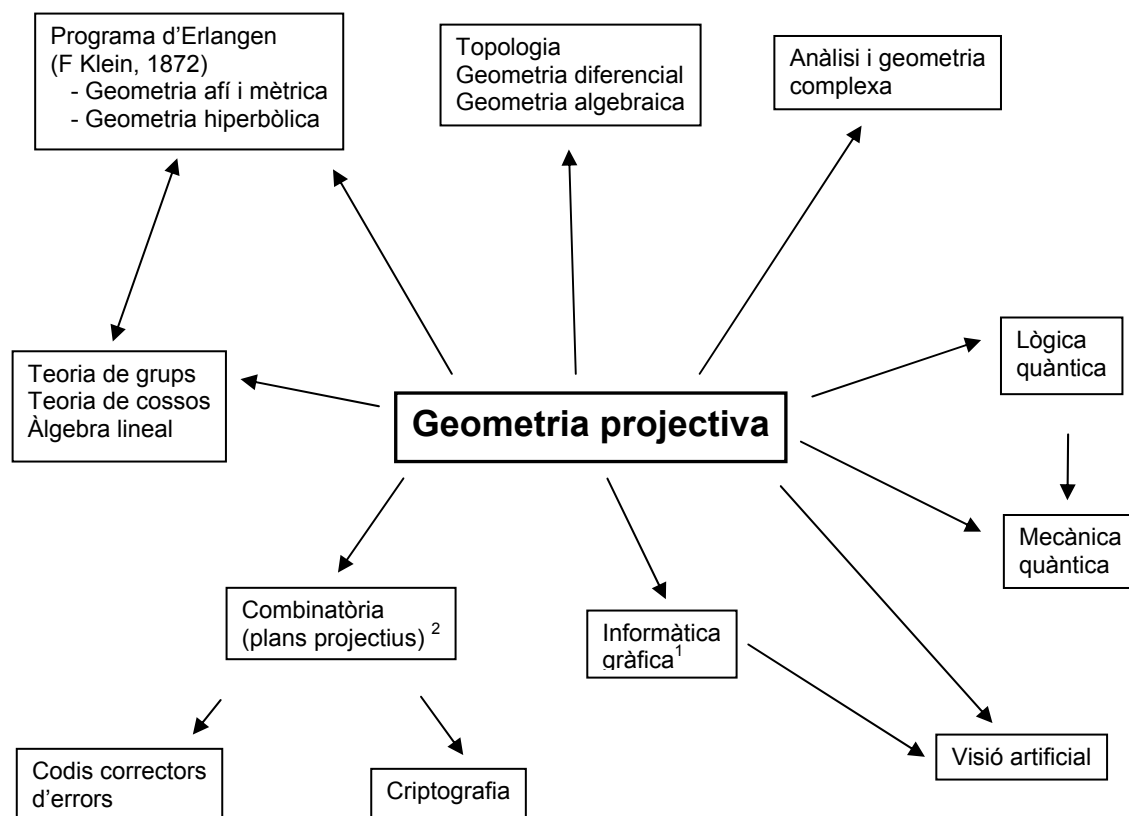


Geometria / GP

Sobre les aplicacions de la GP

© S. Xambó

Introducció



1. V., per exemple, R. Hartley, A. Zissermann: *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2003.

2. Ch. Weibel: *Survey of Non-Desarguessian Planes*. Notices AMS, Noveber 2007, pàg. 1294-1303.

Programa d'Erlangen. L'estudi d'una geometria és l'estudi de les propietats invariants pel grup característic de la geometria (el grup d'afinitats per la geometria afí, els grups de desplaçaments i semblances per la geometria mètrica, el grup projectiu—format per les *homografies*—en el cas de la geometria projectiva, ...).

Jerarquia projectiva. El grup afí és un subgrup del grup projectiu (les afinitats són les homografies que deixen invariant l'hiperplà dels punts de l'infinit. El grup euclidià és el subgrup del grup projectiu format per afinitats que deixen invariant una estructura resident a l'hiperplà de l'infinit anomenada *absolut* (en el cas d'un pla projectiu, aquesta estructura està formada per dos punts imaginaris conjugats). El grup projectiu conté també el grup de la geometria hiperbòlica.

Espai projectiu real. Tot punt $[x]$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n = \mathbb{P}\mathbb{R}^{n+1}$ té exactament dos representants $\pm \frac{x}{|x|} \in S^n$. Així, doncs, es pot entendre com el resultat d'identificar punts antipodals de

l'esfera S^n . En particular resulta que $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ és un espai compacte (amb la topologia induïda per S^n). Notem que $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ coincideix amb el resultat d'unir els extrems d'una semicircumferència, de manera que és una circumferència S^1 . El pla projectiu real, en canvi, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ és un exemple de superfície no orientable.

Espai projectiu complex. Els representant unitaris d'un punt $[x]$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{P}\mathbb{C}^{n+1}$ tenen la forma $\xi \frac{x}{|x|} \in S^n$, on ξ és un nombre complex de mòdul 1. Com que els vectors unitaris de $\mathbb{C}^{n+1}$ formen una esfera S^{2n+1} , i el conjunt $U(1)$ dels nombres complexos de mòdul 1 formen una circumferència S^1 , tenim una aplicació exhaustiva $h: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ les fibres de la qual són circumferències (la fibra d'un punt $[x] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ per l'aplicació h és l'antimatge d'aquest punt per h , és a dir,

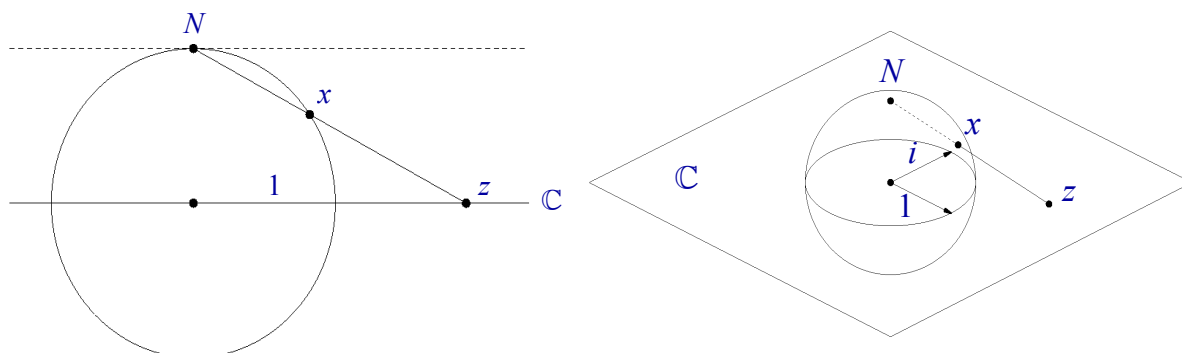
$$\left\{ \xi \frac{x}{|x|} \mid \xi \in U(1) \right\} \simeq U(1) \simeq S^1.$$

De l'aplicació h se'n diu la *fibració de Hopf* de S^{2n+1} .

En el cas particular de la recta projectiva complexa $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, tenim una inclusió

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \quad z \mapsto [(z, 1)] \quad (\text{que denotarem } [z]),$$

i és clar que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \mathbb{C} = \{[1, 0]\}$ (que denotarem $[\infty]$). Així doncs $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Per altra banda, $\hat{\mathbb{C}} \simeq S^2$, per projecció estereogràfica:



Per càlcul es pot veure que la relació que hi ha entre $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ i $z = a + bi$ ve donada per les fórmules

$$a = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad b = \frac{x_2}{1 - x_3}$$

per obtenir z en termes de x o per les fórmules

$$x_1 = \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}$$

per obtenir x en termes de z .