

Geometria / GE

5. Semblances

© S. Xambó

- Definició de semblança
- Algunes propietats
- El grup $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ de les semblances
- Classificació de les semblances del pla
- Taula de classificació
- Algorisme de classificació de les semblances del pla
- Classificació de semblances a l'espai
- Taula de classificació de les semblances a l'espai
- Algorisme de classificació de les semblances de l'espai

Definició de semblança

Una *semblança* de raó $k > 0$ de l'espai euclidià $\mathbb{A}$ és una afinitat

$$\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$$

tal que

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = k \cdot d(P, Q) \quad [*]$$

per qualssevol $P, Q \in \mathbb{A}$.

Remarca. Es pot veure que una aplicació $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ que satisfà la condició $[*]$ és necessàriament una afinitat. Atès que l'establiment d'aquest fet és força laboriós, hem optat per incloure la conclusió en la definició de semblança (i, per tant, de desplaçament).

Exemples

- *Els desplaçaments són les semblances de raó 1.*
- L'homotècia $h_{O,\lambda}$ de centre O i raó $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ és una semblança de raó $k = |\lambda|$.

Algunes propietats

- Per a una afinitat $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ les condicions que segueixen són equivalents:
 - a) φ és una semblança de raó k .
 - b) $|\tilde{\varphi}(x)| = k|x|$ per a tot vector x .
 - c) $\tilde{\varphi}x \cdot \tilde{\varphi}y = k^2(x \cdot y)$ per a qualssevol $x, y \in V$.¹
 - d) $k^{-1}\tilde{\varphi}$ és una isometria lineal.
- Si les equacions d'una afinitat φ en una determinada referència són $\mathbf{x}'^T = B\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$, llavors φ és una semblança de raó k si i només si $B^TGB = k^2G$, on G és la matriu de la mètrica, o bé si i només si $A = k^{-1}B$ satisfà $A^TGA = G$ (equivalent, en referència ortonormal, a dir que A és una matriu ortogonal).
- Si φ és una semblança de raó k , llavors $\pm k$ són els únics possibles valors propis reals de $\tilde{\varphi}$.
- Si $k \neq 1$, llavors φ té un únic punt fix.

El grup $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ de les semblances

- La composició $\varphi' \circ \varphi$ d'una semblança φ de raó k amb una semblança φ' de raó k' és una semblança de raó kk' .
- La inversa φ^{-1} d'una semblança φ de raó k és una semblança de raó $1/k$.
- Així, doncs, el conjunt $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ de les semblances d'un espai euclidià formen un grup amb l'operació de composició.
- El grup $D(\mathbb{A})$ dels desplaçaments és un subgrup normal de $\mathcal{S}(\mathbb{A})$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ és un subgrup del grup $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ de les afinitats de $\mathbb{A}$.

Classificació de les semblances del pla

Considerem semblances φ de raó $k \neq 1$ del pla euclidià. Sigui O l'únic punt fix de φ . En una referència rectangular $[O; u_1, u_2]$ les equacions de φ tenen la forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A \text{ ortogonal.}$$

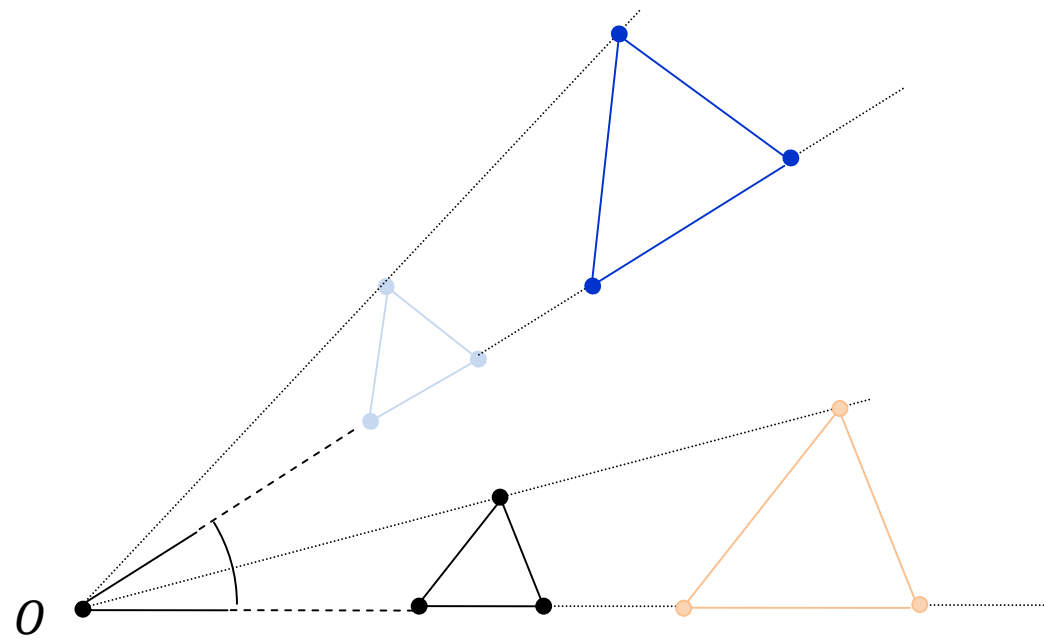
Es tracta, doncs, d'un desplaçament que deixa el punt O fix seguit d'una homotècia de raó k . Com que els desplaçaments que tenen un punt fix són la identitat, les simetries axials i els girs (comptant-hi les simetries centrals), obtenim les corresponents classes de semblances i llurs equacions reduïdes directament a partir de la taula de classificació dels desplaçaments del pla.

Taula de classificació de les semblances del pla

Equacions canòniques	n^+	n^-	φ	Nom	s
$x'_1 = kx_1, x'_2 = kx_2$	2	0	$h_{O,k}$	h	d
$x'_1 = kx_1, x'_2 = -kx_2$	1	1	$h_{O,k}\sigma$	$SA + h$	i
$x'_1 = -kx_1, x'_2 = -kx_2$	0	2	$h_{O,-k}$	h'	d
$x'_1 = k(cx_1 - sx_2), x'_2 = k(sx_1 + cx_2)$	0	0	$h_{O,k} \circ g_{O,\alpha}$	$G + h$	d

La columna φ conté una descripció simbòlica de la semblança (σ denota una simetria axial respecte d'una recta que passa per O). Els símbols h i h' designen homotècies de raó k i k' , respectivament; $SA+h$, una simetria axial seguida d'una homotècia de raó k amb centre sobre l'eix de simetria; i $G + h$ un gir d'amplitud $\alpha \neq 0, \pi$, seguit d'una homotècia de raó k amb el mateix centre que el gir ($c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$). Posem n^+ i n^- per denotar les multiplicitats dels valors propis k i $-k$ de A , respectivament. Els altres elements de la taula tenen el mateix significat que per la taula de desplaçaments del pla.

Notem que $h_{O,k}\sigma = \sigma h_{O,k}$ en el cas $SA + h$ i $h_{O,k} \circ g_{O,k} = g_{O,k} \circ h_{O,k}$ en el cas $G + h$.



$$h_{O,k} \circ g_{O,k} = g_{O,k} \circ h_{O,k}$$

Algorisme de classificació de les semblances del pla

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$ i suposem que hem verificat la condició $A^T G A = k^2 G$, $k \neq 1$, i que hem calculat les multiplicitats n^+ i n^- dels valors propis de A de valor propi $+k$ i $-k$, respectivament.

$$\left\{ \begin{array}{l} n^+ + n^- < 2 \rightarrow G + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{tr}(A) \\ n^+ + n^- = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 2 \rightarrow h_{O,k} \\ n^+ = 1 \rightarrow SA + h \\ n^+ = 0 \rightarrow h_{O,-k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Classificació de semblances a l'espai

Sigui φ una semblança de raó $k \neq 1$ de l'espai euclidià ordinari i posem O per denotar el seu únic punt fix. En una referència rectangular $[O; u_1, u_2, u_3]$ les equacions de φ tenen la forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A \text{ ortogonal.}$$

Es tracta, doncs, d'un desplaçament que deixa el punt O fix seguit d'una homotècia de raó k . Com que els desplaçaments de $\mathbb{A}^3$ que tenen un punt fix són la identitat, les simetries axials i les rotacions (comptant-hi les simetries centrals) i les rotacions amb simetria especular respecte d'un pla perpendicular a l'eix, les corresponents classes de semblances i llurs equacions reduïdes es poden obtenir directament a partir de la taula de classificació dels desplaçaments de l'espai.

Taula de classificació de les semblances a l'espai

Equacions canòniques	n^+	n^-	φ	Nom	s
$x'_1 = kx_1, x'_2 = kx_2, x'_3 = kx_3$	3	0	$h_{O,k}$	h	d
$x'_1 = kx_1, x'_2 = kx_2, x'_3 = -kx_3$	2	1	$h_{O,k}\sigma$	$SE + h$	i
$x'_1 = kx_1, x'_2 = -kx_2, x'_3 = -kx_3$	1	2	$h_{O,k}\rho$	$SA + h$	d
$x'_1 = -kx_1, x'_2 = -kx_2, x'_3 = -kx_3$	0	3	$h_{O,-k}$	h'	i
$x'_1 = k(cx_1 - sx_2), x'_2 = k(sx_1 + cx_2), x'_3 = kx_3$	1	0	$h_{O,k}\gamma$	$G + h$	d
$x'_1 = k(cx_1 - sx_2), x'_2 = k(sx_1 + cx_2), x'_3 = -kx_3$	0	1	$h_{O,k}\sigma\gamma$	$G + SE + h$	i

En aquesta taula posem n^+ i n^- per denotar les multiplicitats dels valors propis k i $-k$ de A , respectivament. La columna φ conté una descripció simbòlica de la semblança: ρ denota una simetria axial l'eix de la qual passa per O ; γ , una rotació d'amplitud $\alpha \neq 0, \pi$, al voltant d'una recta que passa per O ; i σ una simetria especular respecte d'un pla que passa per O , que en el darrer cas és respecte d'un pla perpendicular a l'eix de γ . Els símbols h i h' designen homotècies de raó k i $-k$, respectivament; $SE + h$, una simetria especular seguida d'homotècia de raó k amb centre

sobre el pla de la simetria; $SA + h$, una simetria axial seguida d'homotècia de raó k amb centre sobre l'eix de simetria; $G + h$, un gir d'amplitud $\alpha \neq 0, \pi$ seguit d'una homotècia de raó k amb centre sobre l'eix del gir ($c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$); i $G + SE + h$, un gir d'amplitud $\alpha \neq 0, \pi$ seguit per una simetria especular respecte d'un pla perpendicular a l'eix de gir i després per una homotècia de raó k amb el centre el punt d'intersecció de l'eix de gir i el pla de la simetria. Els altres elements de la taula tenen el mateix significat que per la taula de desplaçaments del pla.

Notem que els productes

$$h_{O,k}\sigma, h_{O,k}\rho, h_{O,k}\gamma \text{ i } h_{O,k}\sigma\gamma$$

dels casos

$$SE + h, SA + h, G + h \text{ i } G + SE + h$$

són commutatius.

Algorisme de classificació de les semblances de l'espai

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$ i suposem que hem verificat la condició $A^T G A = k^2 G$, $k \neq 1$, i que hem calculat les multiplicitats n^+ i n^- dels valors propis de valor propi $+k$ i $-k$ de A , respectivament.

$$\left\{ \begin{array}{l} n^+ + n^- < 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 1 \rightarrow G + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{tr}(A) - \frac{1}{2} \\ n^+ = 0 \rightarrow G + SE + h, \cos(\alpha) = \frac{1}{2k} \text{tr}(A) + \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ n^+ + n^- = 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 3 \rightarrow h_{O,k} \\ n^+ = 2 \rightarrow SE + h \\ n^+ = 1 \rightarrow SA + h \\ n^+ = 0 \rightarrow h_{O,-k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Notes

1. Si φ és una semblança de raó k i x, y, z són vectors, llavors

$$A(\tilde{\varphi}x, \tilde{\varphi}y) = k^2 A(x, y)$$

$$V(\tilde{\varphi}x, \tilde{\varphi}y, \tilde{\varphi}z) = k^3 V(x, y, z)$$

Per exemple,

$$\begin{aligned} A(\tilde{\varphi}x, \tilde{\varphi}y)^2 &= \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}x \cdot \tilde{\varphi}x & \tilde{\varphi}x \cdot \tilde{\varphi}y \\ \tilde{\varphi}y \cdot \tilde{\varphi}x & \tilde{\varphi}y \cdot \tilde{\varphi}y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2 x \cdot x & k^2 x \cdot y \\ k^2 y \cdot x & k^2 y \cdot y \end{vmatrix} \\ &= k^4 \begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot y \\ y \cdot x & y \cdot y \end{vmatrix} = k^4 A(x, y)^2. \end{aligned}$$