

Geometria / GE

3. Desplaçaments

© S. Xambó

- Definició de desplaçament
- Una condició equivalent
- Desplaçaments directes i inversos
- Exemple (simetria respecte d'una varietat lineal)
- Desplaçaments de la recta euclidiana
- Girs del pla euclidià orientat
- Exemple: rotacions a l'espai
- Classificació 2D
- Algorisme de classificació dels desplaçaments del pla
- Classificació 3D
- Algorisme de classificació dels desplaçaments de l'espai
- Notes

Definició de desplaçament

Un *desplaçament* de l'espai euclidià $(\mathbb{A}, V)$ és una afinitat $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ que conserva les distàncies, és a dir, tal que

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$$

qualssevol que siguin $P, Q \in \mathbb{A}$.

Proposició. Una afinitat φ és un desplaçament si i només si

$$|\tilde{\varphi}(x)| = |x| \text{ per a tot } x \in V, \quad [*]$$

on $\tilde{\varphi}$ és la transformació lineal associada a φ .

Prova. És conseqüència immediata de la relació

$$\varphi(Q) - \varphi(P) = \tilde{\varphi}(Q - P),$$

de la definició de distància, i del fet que $x = Q - P$ és un vector qualsevol de V .

Ens referim a la condició $[*]$ dient que $\tilde{\varphi}$ és una *isometria lineal* de V .

Una condició equivalent

Com que el producte escalar no només determina la norma, sinó que queda determinat per ella (fórmula $2x \cdot y = |x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2$),

- $\tilde{\varphi}$ és una isometria lineal si i només si

$$\tilde{\varphi}x \cdot \tilde{\varphi}y = x \cdot y$$

qualssevol que siguin $x, y \in V$.

En coordenades aquesta relació equival, si A és la matriu de $\tilde{\varphi}$ i G la matriu de la mètrica, a

$$(xA^T)G(Ay^T) = xGy^T$$

és a dir,

$$A^T G A = G.$$

[**]

Remarques

- En referència rectangular la condició $[**]$ equival a dir que $A^T A = I_n$ (és a dir, que A és una matriu ortogonal). En altres paraules, φ és un desplaçament si i només si $\tilde{\varphi}$ transforma tota base ortonormal (o una base ortonormal donada) en una base ortonormal.
- La condició més general $A^T G A = G$ significa que si G és la matriu de la mètrica en una base $\mathbf{e}$ i posem $\mathbf{e}' = \tilde{\varphi} \mathbf{e}$, llavors $\mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}' = A^T G A = G$, és a dir,

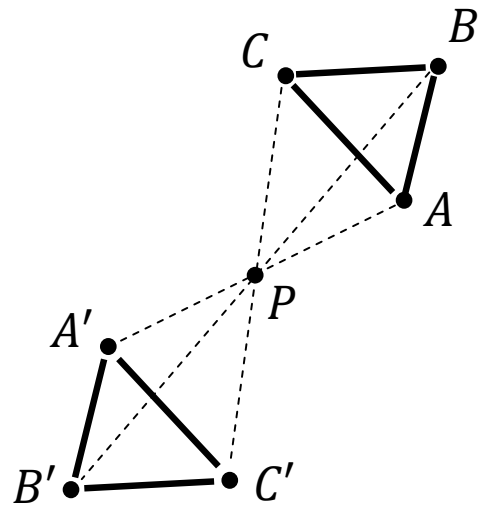
$$e'_i \cdot e'_j = e_i \cdot e_j$$

$$(1 \leq i, j \leq n).$$
- Adonem-nos, doncs, que aquestes condicions, necessàries per la propietat $\tilde{\varphi} x \cdot \tilde{\varphi} y = x \cdot y$, són suficients per tal que φ sigui un desplaçament.

Desplaçaments directes i inversos

Els desplaçaments es classifiquen en *directes* o *inversos*, segons que conservin o inverteixin l'orientació, és a dir, segons que $\det(\tilde{\varphi}) = 1$ o $\det(\tilde{\varphi}) = -1$ (o, en termes de les equacions, segons que $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$).

Exemple (translacions). Les translacions són les afinitats tals que $\tilde{\varphi} = Id$. Vist que la identitat de és clarament una isometria lineal, tenim que les translacions són desplaçaments directes.



Exemple (simetria central). L'homotècia de centre P i raó λ , $\varphi = h_{P,\lambda}$, és un desplaçament si i només si $\lambda = \pm 1$, ja que $\tilde{\varphi}(x) = \lambda x$ i per tant $\tilde{\varphi}x \cdot \tilde{\varphi}y = \lambda^2(x \cdot y)$. El cas $\lambda = 1$ dóna $\varphi = Id$ i el cas $\lambda = -1$ dóna $\varphi = h_{P,-1} = s_P$, la *simetria central de centre* P . Com que $\widetilde{s_P} = -Id \equiv -I_n$, σ_P és directa si n és parell i inversa si n és senar. La figura mostra el resultat, $A'B'C'$, d'aplicar σ_P al triangle ABC .

Exemple (simetria respecte d'una varietat lineal)

Sigui L una varietat lineal. El **simètric** d'un punt Q respecte de L , $\sigma_L(Q)$, es defineix (fig. (a)) així:

$$\sigma_L(Q) = Q + 2(p_L(Q) - Q).$$

Veurem que σ_L és un desplaçament i identificarem la seva transformació lineal associada. Amb les notacions de la figura (b), i amb $W = W(L)$, tenim

$$x = Q - P, x = x' + x'', x' \in W, x'' \in W^\perp, \text{ i}$$

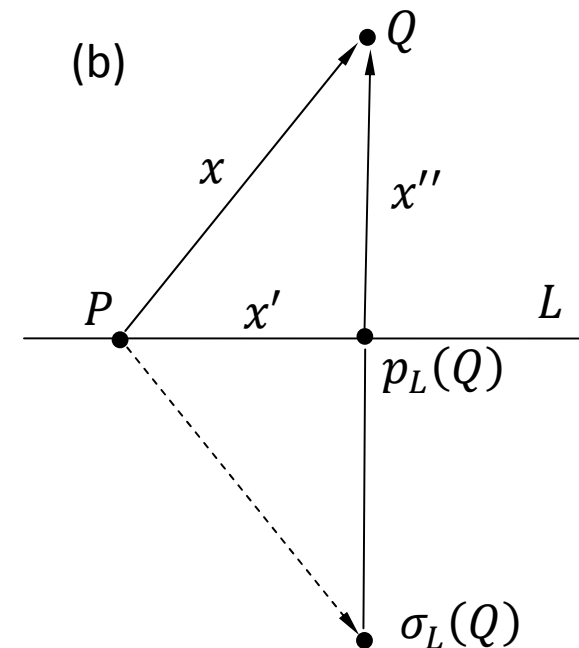
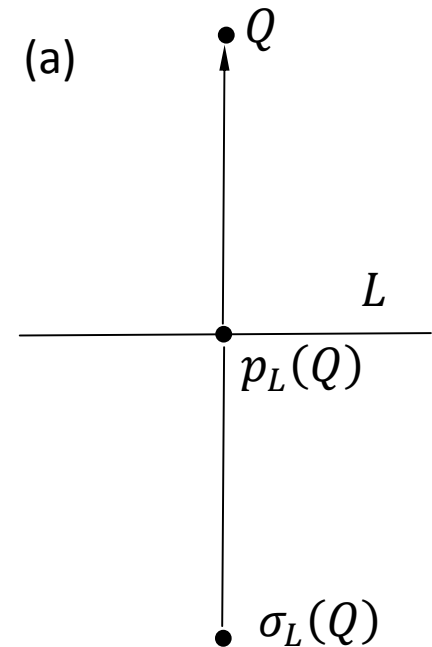
$$\begin{aligned} \sigma_L(Q) &= Q + 2(p_L(Q) - Q) \\ &= P + x - 2x'' = P + x' - x'' \\ &= P + \bar{x}, \end{aligned}$$

on $\bar{x} = x' - x''$. Com que l'aplicació

$$s_W : V \rightarrow V, x = x' + x'' \mapsto \bar{x} = x' - x''$$

és una isometria lineal, resulta que **σ_L és un desplaçament i $\widetilde{\sigma}_L = s_W$.**

Si escollim una base ortonormal $\mathbf{u}$ de manera que $u_1, \dots, u_k$ és una base de W , llavors les equacions



de σ_L en la referència $[P; \mathbf{u}]$ són

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ -x_i & \text{si } k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

En particular resulta que σ_L és directa si $n - k$ és parell i inversa si $n - k$ és senar. Un cas particular important és quan L és un punt P , en el qual σ_P és la *simetria central* de centre P (v. el segon exemple de la pàgina 6):

$$\sigma_P(P + x) = P - x$$

per a tot vector $x \in V$, ja que en aquest cas $x' = 0$ (l'espai director de P és $\{0\}$) i $x'' = x$.

Simetria especular. En el cas en què L és un hiperplà, σ_L és un desplaçament invers i es diu que és una *simetria especular* (per a $n = 2$, la simetria especular s'anomena *simetria axial*).

Exemple (Desplaçaments de la recta euclidiana). Les afinitats d'una recta afí són translacions t_u ($u \in V$), o homotècies $h_{P,\lambda}$ ($\lambda \neq 0,1$). Les translacions són desplaçaments, però de les homotècies només les de raó -1 (simetries centrals) ho són. En resum: els desplaçaments de la recta euclidiana són les translacions i les simetries centrals.¹

Girs del pla euclidià orientat

Suposem que estem en un pla euclidià orientat $(\mathbb{A}_2, V_2)$ i sigui $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ una base ortonormal positiva de V_2 . Donat un nombre real α i un punt P , anem a determinar els desplaçaments del pla que deixen fix P i compleixen

$$\tilde{\varphi}(u_1) = \cos(\alpha) u_1 + \sin(\alpha) u_2.$$

Com que $\tilde{\varphi}(u_2)$ ha de ser unitari i perpendicular a $\tilde{\varphi}(u_1)$, tenim

$$\tilde{\varphi}(u_2) = \pm(-\sin(\alpha) u_1 + \cos(\alpha) u_2).$$

A més, vist que les funcions $\cos$ i $\sin$ són periòdiques de període 2π , podem suposar que $\alpha \in [0, 2\pi)$. Analitzem les dues possibilitats $\pm$ per separat.

Cas $\tilde{\varphi}(u_2) = -\sin(\alpha) u_1 + \cos(\alpha) u_2$. Aquest desplaçament, que en principi depèn de P , α i $\mathbf{u}$, de fet només depèn de P i α . En efecte, si provisionalment posem $g_{P,\alpha,\mathbf{u}}$ per denotar-lo, es tracta de veure, si $\mathbf{u}'$ és una altra base ortonormal positiva, que $g_{P,\alpha,\mathbf{u}'} = g_{P,\alpha,\mathbf{u}}$.

Per veure això, notem primer que per definició

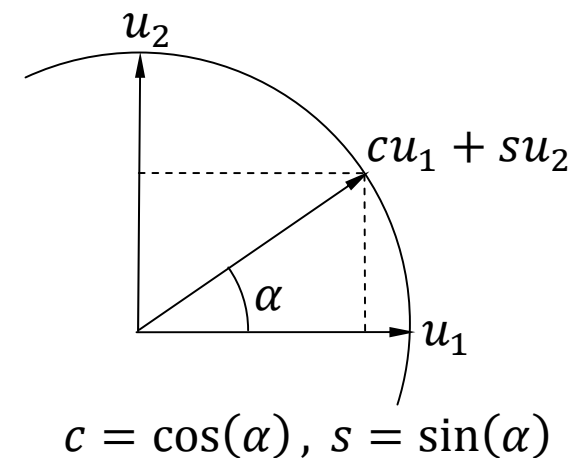
$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

és ensem la matriu de $g_{P,\alpha,\mathbf{u}}$ respecte de la base $\mathbf{u}$ i la de $g_{P,\alpha,\mathbf{u}'}$ respecte de la base $\mathbf{u}'$. Si posem $\mathbf{u}' = \mathbf{u}M$ (és a dir, M és la matriu de $\mathbf{u}'$ respecte de $\mathbf{u}$), llavors la matriu de $g_{P,\alpha,\mathbf{u}'}$ respecte de $\mathbf{u}$ és $M\rho_\alpha M^{-1}$. Però sabem que $M = \rho_\beta$ per algun β i per tant $M\rho_\alpha M^{-1} = \rho_\alpha$, com volíem demostrar.

Per tant, podem posar $g_{P,\alpha}$ per denotar el desplaçament caracteritzat per deixar P fix i de manera que $\widetilde{g_{P,\alpha}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\rho_\alpha$ per una base ortonormal positiva qualsevol $\mathbf{u}$. D'aquest desplaçament en direm el *gir de centre P i amplitud* (o *angle*) α . Les equacions de $g_{P,\alpha}$ en la referència $[P; \mathbf{u}]$ són

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Remarquem que $g_{P,\alpha}$ és la identitat per $\alpha = 0$ i la simetria central σ_P per $\alpha = \pi$. En tot cas, $g_{P,\alpha}$ és un desplaçament directe.²



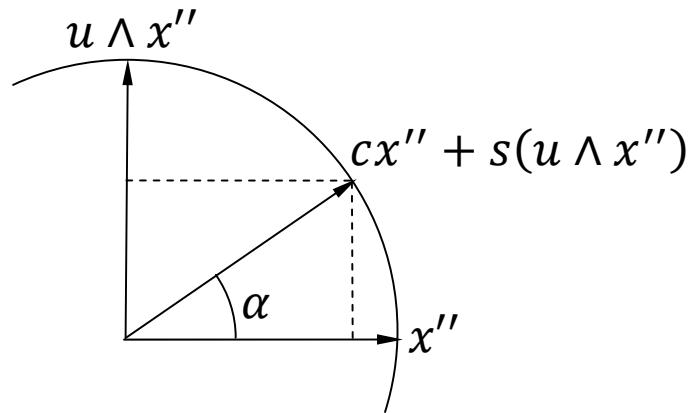
Cas $\tilde{\varphi}(u_2) = \sin(\alpha) u_1 - \cos(\alpha) u_2$. La matriu de $\tilde{\varphi}$ respecte de $\mathbf{u}$ és

$$s_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic de s_α és $\lambda^2 - 1$, de manera que els seus valors propis són ± 1 . Per tant, s_α és diagonalitzable i la corresponent matriu diagonal és $\text{diag}(1, -1)$. De fet

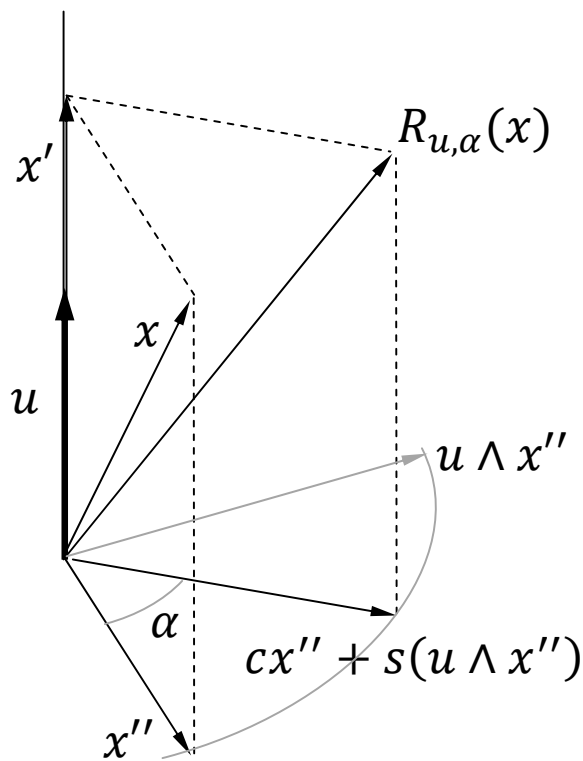
$\cos(\alpha/2) u_1 + \sin(\alpha/2) u_2$ i $-\sin(\alpha/2) u_1 + \cos(\alpha/2) u_2$ són vectors propis unitaris de valors propis $+1$ i -1 , respectivament. Podem, doncs, concloure que

φ és la simetria axial $\sigma_{\alpha/2}$ respecte de la recta que passa per P amb vector director $\cos(\alpha/2) u_1 + \sin(\alpha/2) u_2$.



$$c = \cos(\alpha), s = \sin(\alpha)$$

Pla $u^\perp$



$$c = \cos(\alpha), s = \sin(\alpha)$$

Exemple (rotacions a l'espai). Considerem un vector unitari u de l'espai euclidià orientat $(\mathbb{A}^3, V^3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $P \in \mathbb{A}$. Definim

$$R_{P,u,\alpha}: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$$

de la manera següent:

$$R_{P,u,\alpha}(P + x) = P + R_{u,\alpha}(x),$$

$$R_{u,\alpha}(x) = x' + \cos(\alpha)x'' + \sin(\alpha)(u \wedge x''),$$

$$x' = p_u(x) = (x \cdot u)u,$$

$$x'' = p_{u^\perp}(x) = x - x'.$$

$R_{P,u,\alpha}$ és una aplicació afí amb aplicació lineal associada $R_{u,\alpha}$, i és un desplaçament:

$$\begin{aligned} |R_{u,\alpha}(x)|^2 &= |x'|^2 + \cos^2(\alpha)|x''|^2 + \sin^2(\alpha)|u \wedge x''|^2 \\ &= |x'|^2 + \cos^2(\alpha)|x''|^2 + \sin^2(\alpha)|x''|^2 \\ &= |x'|^2 + |x''|^2 = |x|^2. \end{aligned}$$

$R_{P,u,\alpha}$ deixa invariants els punts de la recta $P + \langle u \rangle$ i indueix un gir de centre P i amplitud α en el pla $P + u^\perp$.

Direm que $R_{P,u,\alpha}$ és la **rotació** (o **gir**) d'**eix** $P + \langle u \rangle$ i **amplitud** α . Notem que podem escriure

$$\begin{aligned} R_{P,u,\alpha}(P + x) &= P + (x \cdot u)u + \cos(\alpha)(x - (x \cdot u)u) + \sin(\alpha)u \wedge x \\ &= P + \cos(\alpha)x + (1 - \cos(\alpha))(x \cdot u)u + \sin(\alpha)u \wedge x. \end{aligned}$$

Una referència convenient per expressar les equacions de $R_{P,u,\alpha}$ és $\mathcal{R} = [P; u_1, u_2, u_3]$, on $u_1 = u$, u_2 és qualsevol vector unitari perpendicular a u i $u_3 = u_1 \wedge u_2$. La matriu de $R_{u,\alpha}$ en la base u_1, u_2, u_3 és

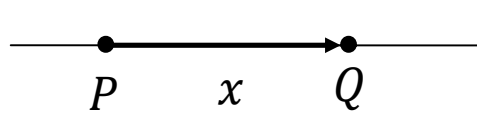
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

i per tant les equacions de $R_{P,u,\alpha}$ en la referència $\mathcal{R}$ són

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = \cos(\alpha)x_2 - \sin(\alpha)x_3, \quad x'_3 = \sin(\alpha)x_2 + \cos(\alpha)x_3.$$

En particular veiem que **les rotacions de l'espai són desplaçaments directes**.

Classificació 2D



Lema. Si P i Q són dos punts fixos d'un desplaçament φ , llavors $x = Q - P$ és un vector propi de $\tilde{\varphi}$ de valor propi 1. Recíprocament, si P és un punt fix de φ i x és un vector propi de valor propi 1 de $\tilde{\varphi}$, llavors Q també és fix.

Prova. Si P i Q són dos punts fixos del desplaçament φ ,

$$P + x = Q = \varphi(Q) = \varphi(P + x) = \varphi(P) + \tilde{\varphi}(x) = P + \tilde{\varphi}(x),$$

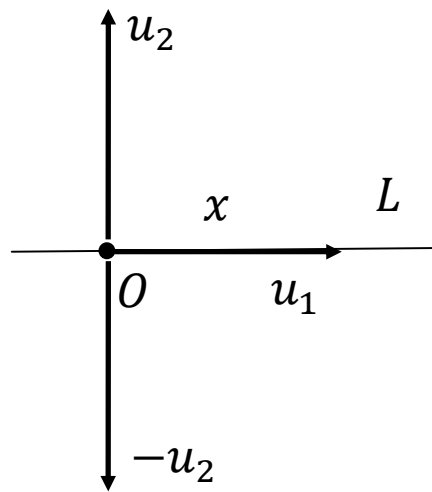
de manera que $\tilde{\varphi}(x) = x$. Recíprocament, si P és fix i $\tilde{\varphi}(x) = x$,

$$\varphi(Q) = \varphi(P + x) = \varphi(P) + \tilde{\varphi}(x) = P + x = Q.$$

Ara procedirem per casos segons la dimensió de la varietat de punts fixos F d'un desplaçament φ del pla euclidià orientat $(\mathbb{A}^2, V_2)$.

Cas $F = \mathbb{A}^2$. El desplaçament és la *identitat*. En qualsevol referència les seves equacions són

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2.$$



Cas $F = L$, L una recta. Siguin O i u_1 un punt i un vector director unitari de L . Llavors u_1 és un vector propi de valor propi 1 de $\tilde{\varphi}$ (pel lema). Si u_2 és un vector unitari perpendicular a u_1 , ha de ser $\tilde{\varphi}(u_2) = -u_2$, ja que altrament seria $\tilde{\varphi}(u_2) = u_2$ i la varietat de punts fixos no es reduiria a L (el punt $O + u_2$ seria fix). Per tant, φ és la **simetria axial** d'eix $O + \langle u_1 \rangle = L$.

En la referència $[O; u_1, u_2]$ les equacions de φ són

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -x_2.$$

Cas $F=O$, O un punt. Si u_1, u_2 és una base ortonormal de V_2 , les equacions de φ en la referència $[O; u_1, u_2]$ tenen la forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

on A és una matriu ortogonal. Sabem, però, que aquestes matrius tenen la forma

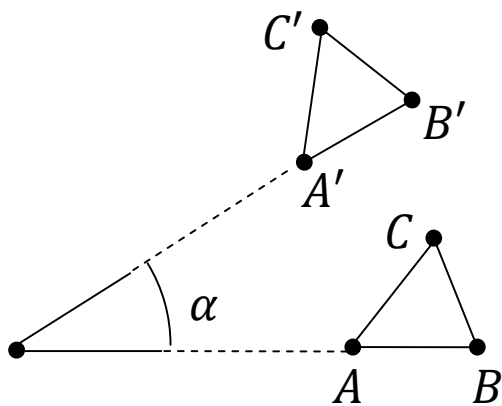
$$A = \rho_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ o } A = \rho_\alpha J_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

amb $\alpha \in [0, 2\pi)$.

El cas $A = \rho_\alpha J_2$ no es pot donar, vist que A tindria el valor propi 1 (el seu polinomi característic és $\lambda^2 - 1$) i per tant els punts fixos de φ no es reduirien a O .

En el cas $A = \rho_\alpha$, tenim el gir $g_{O,\alpha}$ de centre O i amplitud α . Podem excloure el cas $\alpha = 0$, ja que tindríem $A = \text{diag}(1, 1) = I_2$ i φ seria la identitat. Per $\alpha = \pi$, $A = \text{diag}(-1, -1) = -I_2$ (té el valor propi -1 repetit) i

$\varphi = \sigma_O$, la simetria central de centre O . Altrament A no té valors propis reals, ja que el seu polinomi característic és $\lambda^2 - 2\cos(\alpha)\lambda + 1$, que no té arrels reals si $\alpha \neq 0, \pi$. La distinció geomètrica és que σ_O deixa invariants totes les rectes per O , mentre que $g_{O,\alpha}$ no deixa cap recta invariant si $\alpha \neq 0, \pi$.



Cas $F = \emptyset$. En aquest cas $\tilde{\varphi}$ ha de tenir el valor propi 1, ja que altrament sabem que tindria un punt fix. Sigui u_1 un vector propi unitari de valor propi 1 i u_2 un vector unitari perpendicular a u_1 . Llavors $\tilde{\varphi}(u_2)$ és unitari i ortogonal a u_1 i, per tant, tenim dues possibilitats:

$$\tilde{\varphi}(u_1) = \pm u_2.$$

Donat un punt arbitrari O com a origen, en la referència $[O; u_1, u_2]$ les equacions de φ tenen la forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$x'_1 = x_1 + p_1, \quad x'_2 = \pm x_2 + p_2.$$

El cas del signe $+$, tenim una translació. Prenent u_1 en la direcció de la translació, podem suposar que $p_2 = 0$, de manera que ens queda, posant $p = p_1$,

$$x'_1 = x_1 + p, \quad x'_2 = x_2 \quad (p \neq 0, \text{ altrament tindríem la identitat}).$$

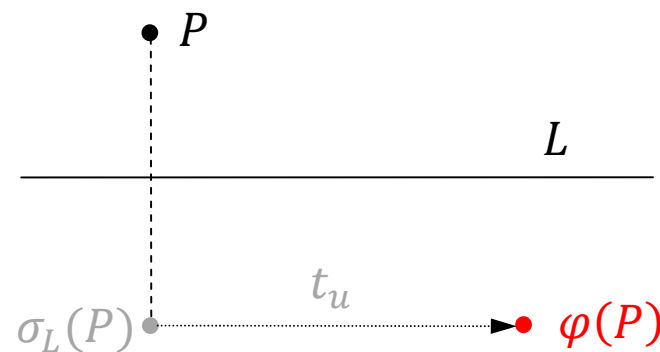
El cas del signe $-$, tenim una *simetria axial seguida de translació*. Com que podem escriure

$$x'_2 - p_2/2 = -(x_2 - p_2/2),$$

fent el canvi d'origen $(0, 0) \mapsto (0, p_2/2)$ podem aconseguir que $p_2 = 0$, de manera que ens queda, posant $p = p_1$,

$$x'_1 = x_1 + p, \quad x'_2 = x_2$$

($p \neq 0$, altrament tindríem una simetria axial). Es tracta, doncs, d'una simetria axial $((x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2))$ seguida d'una translació paral·lela a l'eix de la simetria, i en diem *simetria axial amb translació paral·lela* o *amb lliscament*.³



Taula de la classificació 2D

F	Equacions canòniques	n^+	n^-	φ	Nom	s
$\mathbb{A}^2$	$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2$	2	0	Id	Id	d
L	$x'_1 = x_1, x'_2 = -x_2$	1	1	σ_L	SA	i
O	$x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2$	0	2	$h_{O,-1}$	SC	d
	$x'_1 = cx_1 - sx_2, x'_2 = sx_1 + cx_2$	0	0	$g_{O,\alpha}, \alpha \neq 0, \pi$	G	d
$\emptyset$	$x'_1 = x_1 + p, x'_2 = x_2 (p \neq 0)$	2	0	t_u	T	d
	$x'_1 = x_1 + p, x'_2 = -x_2 (p \neq 0)$	1	1	$\tau\sigma$	SA+T	i

La columna F conté una descripció del conjunt de punts fixos: L significa que F és una recta, O que hi ha un únic punt fix i $\emptyset$ que no hi ha punts fixos. En la columna de les equacions canòniques posem $c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$ en el cas $F = O$ i amb $\tilde{\varphi}$ sense valors propis. En la columna φ , que conté una descripció simbòlica del desplaçament, σ representa una simetria axial, τ una translació paral·lela a l'eix de σ . Abreugem els noms amb les convencions següents: SA indica una simetria axial; SC una simetria central; G un gir d'amplitud $\alpha \neq 0, \pi$; T una translació diferent de la identitat; i SA+T una simetria axial amb translació paral·lela. Finalment, n^+ (n^-) és la multiplicitat del valor propi $+1$ (-1) de la transformació lineal associada i s denota el «sentit» del desplaçament (d directe, i invers).

Algorisme de classificació dels desplaçaments del pla

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial

$$\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T.$$

Suposem que hem verificat que es compleix la condició $A^TGA = G$ per ser un desplaçament, que hem calculat les multiplicitats n^+ i n^- dels valors propis $+1$ i -1 de A , i que hem decidit (mirant si el sistema $\mathbf{x}^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$ és compatible o no) si hi ha punts fixos o no ($F \neq \emptyset$ o $F = \emptyset$).

$$\left\{ \begin{array}{l} n^+ + n^- < 2 \rightarrow G, \cos(\alpha) = \frac{1}{2}\text{tr}(A) \\ n^+ + n^- = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^+ = 2 \rightarrow \begin{cases} F = \emptyset \rightarrow T \\ F \neq \emptyset \rightarrow \text{Id} \end{cases} \\ n^+ = 1 \rightarrow \begin{cases} F = \emptyset \rightarrow SA + T \\ F \neq \emptyset \rightarrow SA \end{cases} \\ n^+ = 0 \rightarrow SC \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Classificació 3D

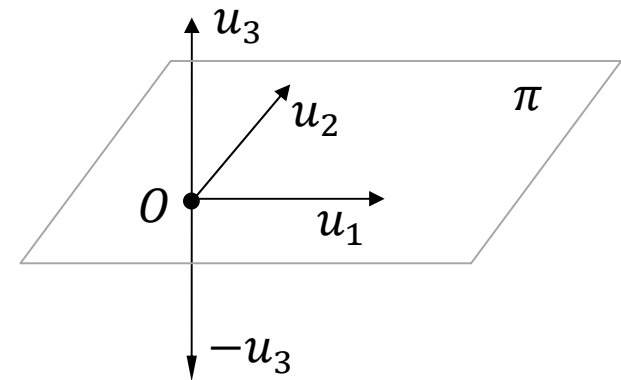
Anàlogament al cas 2D, procedirem per casos segons la dimensió de la varietat F de punts fixos d'un desplaçament φ de l'espai euclidià orientat $(\mathbb{A}^3, V_3)$.

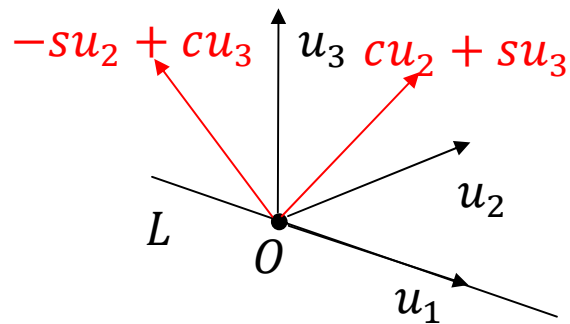
Cas $F = \mathbb{A}^3$. El desplaçament és la identitat. En qualsevol referència les seves equacions són

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3 .$$

Cas $F = \pi$, π un pla. Siguin O i u_1, u_2 un punt i dos vectors unitaris ortogonals directors de π . Llavors u_1, u_2 són vectors propis de valor propi 1 de $\tilde{\varphi}$. Si u_3 és un vector unitari perpendicular a $\langle u_1, u_2 \rangle$, ha de ser $\tilde{\varphi}(u_3) = -u_3$. Per tant, φ és la simetria especular respecte del pla π . En la referència $[O; u_1, u_2]$ les equacions de φ són

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3 .$$





Cas $F = L$, L una recta. Siguin O i u_1 un punt i un vector director unitari de L . Llavors, u_1 és un vector propi de valor propi 1 de $\tilde{\varphi}$. Siguin u_2, u_3 vectors unitaris ortogonals a u_1 , i ortogonals entre sí. Llavors

$$\tilde{\varphi}(\langle u_2, u_3 \rangle) = \langle u_2, u_3 \rangle$$

i φ indueix un desplaçament φ' del pla $O + \langle u_2, u_3 \rangle$ que té el punt O com a únic punt fix (altrament φ no es reduiria a L). Per tant φ' és un gir de centre O i amplitud $\alpha \in (0, 2\pi)$, gir que és una simetria central si $\alpha = \pi$. En resulta que φ és un gir d'amplitud α al voltant de l'eix L , gir que esdevé la simetria axial del mateix eix quan $\alpha = \pi$. En la referència $[O; u_1, u_2, u_3]$, les equacions de φ són

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = cx_2 - sx_3, \quad x'_3 = sx_2 + cx_3 \quad (c = \cos(\alpha), s = \sin(\alpha)).$$

Per $\alpha = \pi$,

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3.$$

(equacions de la simetria axial).

Cas $F = O$, O un punt. Si u_1, u_2, u_3 és una base ortonormal de V_3 , les equacions de φ en la referència $[O; u_1, u_2, u_3]$ tenen la forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

on A és una matriu ortogonal. Estant en dimensió senar, A té necessàriament un valor propi real. Aquest valor propi ha de ser -1 (altrament φ tindria punts fixos distints de O). Podem suposar, doncs, que u_3 és un vector propi amb valor propi -1 . Igual que en el cas anterior, φ indueix un desplaçament φ' del pla $O + \langle u_1, u_2 \rangle$ que té el punt O com a únic punt fix (altrament F no es reduiria a O). Per tant φ' és un gir de centre O i amplitud $\alpha \in (0, 2\pi)$, gir que és una simetria central si $\alpha = \pi$. En resulta que φ és **un gir d'amplitud α al voltant de l'eix $O + \langle u_3 \rangle$** (gir que esdevé la simetria axial del mateix eix quan $\alpha = \pi$), **seguit de la simetria especular respecte del pla $O + \langle u_1, u_2 \rangle$** . En la referència $[O; u_1, u_2, u_3]$, les equacions de φ són (amb $c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$):

$$x'_1 = cx_1 - sx_2, \quad x'_2 = sx_1 + cx_2, \quad x'_3 = -x_3.$$

Pere $\alpha = \pi$, $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = -x_2$, $x'_3 = -x_3$ (simetria central σ_O).

Cas $F = \emptyset$. En aquest cas $\tilde{\varphi}$ ha de tenir el valor propi 1, ja que altrament sabem que tindria un punt fix. Sigui n^+ la dimensió de l'espai V_3^+ de vectors propis de valor propi 1. Les possibilitats són $n^+ = 3$, $n^+ = 2$ o $n^+ = 1$.

$n^+ = 3$. En aquest cas $\tilde{\varphi} = Id$ i φ és una translació diferent de la identitat. Escollint u_1 de manera que estigui en la direcció de la translació, aconseguim que les equacions de la translació tinguin la forma

$$x'_1 = x_1 + p, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3 \quad (p > 0).$$

$n^+ = 2$ Podem escollir u_1 i u_2 de manera que formin una base de V_3^+ . Llavors u_3 és necessàriament un vector propi de valor propi -1 i les equacions de φ tenen la forma

$$x'_1 = x_1 + p_1, \quad x'_2 = x_2 + p_2, \quad x'_3 = -x_3 + p_3.$$

Fent el canvi d'origen $(0, 0, 0) \mapsto (0, 0, p_3/2)$, podem suposar que $p_3 = 0$. Es tracta d'una simetria especular seguida d'una translació paral·lela al pla de la simetria (*simetria especular amb translació paral·lela* o *amb lliscament*).

Observem finalment que podem escollir una altra base ortonormal de V_3^+ amb la qual $p_2 = 0$ i $p = p_1 > 0$, quedant finalment les equacions $x'_1 = x_1 + p$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = -x_3$.

$n^+ = 1$ Sigui u_1 un vector unitari de valor propi 1 i siguin u_2, u_3 vectors unitaris ortogonals a u_1 i ortogonals entre si. Llavors $\tilde{\varphi}(\langle u_2, u_3 \rangle) = \langle u_2, u_3 \rangle$ i la restricció de $\tilde{\varphi}$ a $\langle u_2, u_3 \rangle$ no té el valor propi 1. En resulta que les equacions de φ en la referència $[O; u_1, u_2, u_3]$, O un origen arbitrari, tenen la forma (posant $c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$)

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Vist que $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ no té el valor propi 1, podem fer un canvi d'origen de la forma $(0, 0, 0) \mapsto (0, a, b)$ i aconseguir que en la nova referència tinguem $p_2 = p_3 = 0$. Ens queden, doncs, les equacions

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que mostren que el desplaçament és un gir d'eix $O + \langle u_1 \rangle$ seguit d'una translació en la direcció d'aquest eix. D'aquest desplaçament se'n diu *moviment helicoidal*. En el cas $\alpha = \pi$, és una simetria axial seguida d'una translació paral·lela a l'eix de la simetria (també es diu que és una *simetria axial amb lliscament*).⁴

Taula de classificacio 3D

F	Equacions canòniques	n^+	n^-	φ	Nom	s
$\mathbb{A}^3$	$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3$	3	0	Id	Id	d
π	$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = -x_3$	2	1	σ_π	SE	i
L	$x'_1 = x_1, x'_2 = -x_2, x'_3 = -x_3$	1	2	σ_L	SA	d
	$x'_1 = cx_1 - sx_2, x'_2 = sx_1 + cx_2, x'_3 = x_3$	1	0	$R_{L,\alpha}$	G	d
O	$x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2, x'_3 = -x_3$	0	3	σ_O	SC	i
	$x'_1 = cx_1 - sx_2, x'_2 = sx_1 + cx_2, x'_3 = -x_3$	0	1	$\sigma\gamma$	G+SE	i
$\emptyset$	$x'_1 = x_1 + p, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3$	3	0	t_u	T	d
	$x'_1 = x_1 + p, x'_2 = x_2, x'_3 = -x_3$	2	1	$\tau\sigma$	SE+T	i
	$x'_1 = x_1 + p, x'_2 = -x_2, x'_3 = -x_3$	1	2	$\tau\rho$	SA+T	d
	$x'_1 = cx_1 - sx_2, x'_2 = sx_1 + cx_2, x'_3 = x_3 + p$	1	0	$\tau\gamma$	G+T	d

Explicació de les convencions de la taula

Columna F (varietat de punts fixos): $\emptyset$ significa que no hi ha punts fixos; O , un únic punt fix; L , que F és una recta; i π que, F és un pla.

Columna de les equacions: $c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$, $\alpha \neq 0, \pi$.

Columna φ (descripció simbòlica del desplaçament): γ representa un gir d'amplitud $\alpha \neq 0, \pi$; ρ , una simetria axial; σ una simetria especular (que en el cas de $\sigma\gamma$ és respecte d'un pla perpendicular al l'eix de γ); τ una translació paral·lela a l'eix de σ , ρ o γ , segons correspongui.

Nom: SE indica una simetria especular; SA, una simetria axial; G un gir d'amplitud $\alpha \neq 0, \pi$; SC, una simetria central; T, una translació diferent de la identitat; SE+T, una simetria especular amb translació paral·lela al pla de la simetria; SA+T, una simetria axial amb translació paral·lela al seu eix; i G+T, un moviment helicoidal.

n^+ (n^-): multiplicitat del valor propi $+1$ (-1).

La columna s conté el «sentit» (d directe, i invers). És igual a $(-1)^{n^-}$.

Algorisme de classificació dels desplaçaments de l'espai

Partim d'una afinitat donada per l'equació matricial $\mathbf{x}'^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$.

Suposem que hem verificat que es compleix la condició $A^TGA = G$ per ser un desplaçament, que hem calculat les multiplicitats n^+ i n^- dels valors propis $+1$ i -1 de A , i que hem decidit (mirant si el sistema $\mathbf{x}^T = A\mathbf{x}^T + \mathbf{p}^T$ és compatible o no) si hi ha punts fixos o no ($F \neq \emptyset$ o $F = \emptyset$).

$$\left\{ \begin{array}{l} n^+ + n^- < 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} F = \emptyset \rightarrow G + T, & 2\cos(\alpha) = \text{tr}(A) - 1 \\ F \neq \emptyset \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} n^+ > 0 \rightarrow G, & 2\cos(\alpha) = \text{tr}(A) - 1 \\ n^+ = 0 \rightarrow G + SE, & 2\cos(\alpha) = \text{tr}(A) + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ n^+ + n^- = 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} n^+ = 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F = \emptyset \rightarrow T \\ F \neq \emptyset \rightarrow \text{Id} \end{array} \right. \\ n^+ = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F = \emptyset \rightarrow SE + T \\ F \neq \emptyset \rightarrow SE \end{array} \right. \\ n^+ = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F = \emptyset \rightarrow SA + T \\ F \neq \emptyset \rightarrow SA \end{array} \right. \\ n^+ = 0 \rightarrow SC \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Notes

1. És fàcil comprovar les següents regles de càlcul:

$$t_u \circ \sigma_P = \sigma_{P+\frac{1}{2}u},$$

$$\sigma_P \circ t_u = \sigma_{P-\frac{1}{2}u},$$

$$\sigma_Q \circ \sigma_P = t_{2x}, \text{ on } x = Q - P.$$

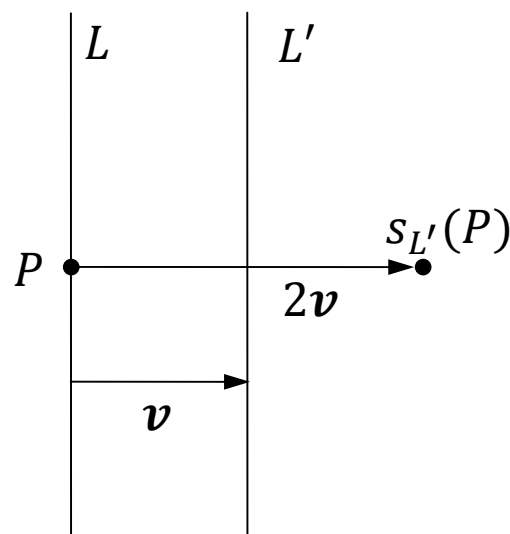
Vegem, com a exemple, el primer cas. Com que el desplaçament $\varphi = t_u \circ \sigma_P$ és invers, serà la simetria central respecte del seu punt fix Q . Si posem $x = Q - P$, llavors $Q = P + x$ i

$$(t_u \circ \sigma_P)(Q) = \begin{cases} \varphi(Q) = Q = P + x \\ t_u(\sigma_P(Q)) = t_u(\sigma_P(P + x)) = P - x + u \end{cases}$$

d'on resulta que $x = -x + u$, és a dir, $x = \frac{1}{2}u$ i $\varphi = \sigma_Q = \sigma_{P+\frac{1}{2}u}$.

2. La matriu de $g_{P,\alpha}$ respecte d'una base ortonormal orientada negativament és $\rho(-\alpha)$.

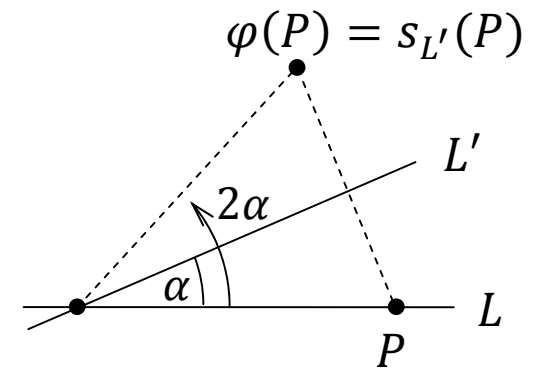
3. A la nota 1 hem vist que tot desplaçament de la recta euclidiana és o una simetria central o producte de dues simetries centrals (les translacions). En el cas 2D, tot desplaçament és composició de com a molt 3 simetries axials. La raó d'aquesta afirmació prové del fet que les translacions (girs) es poden posar com a composició de dues simetries axials d'eixos paral·lels (respectivament d'eixos que es tallen en el centre de gir).



En efecte, el producte $\varphi = s_{L'} \circ s_L$ de dues simetries axials s_L i $s_{L'}$ és un desplaçament directe. Si els eixos L i L' són paral·lels, φ és una translació, ja que si W és l'espai director d'aquests eixos, $\tilde{\varphi} = s_W^2 = Id$). Més concretament, $\varphi = t_{2v}$, on v és el vector perpendicular a les rectes i de norma igual a la distància entre elles).

I si la intersecció dels eixos L i L' és un punt O , llavors φ és un gir de centre O (si considerem la simetria central de centre O com un gir d'amplitud π), ja que O és l'únic punt fix de φ (si P és un punt fix de φ , llavors

$s_{L'}(s_L(P)) = P \Rightarrow s_L(P) = s_{L'}(P) \Rightarrow s_L(P) - P = s_{L'}(P) - P$; però $s_L(P) - P$ és perpendicular a L i $s_{L'}(P) - P$ és perpendicular a L' , de manera que $s_L(P) - P = 0$ i $s_{L'}(P) - P = 0$, és a dir, P ha de ser fix per s_L i per $s_{L'}$). Si l'angle entre els dos eixos és α , l'amplitud del gir φ és 2α .



Resumint: si un desplaçament φ del pla té una recta de punts fixos, φ és la simetria respecte d'aquesta recta; si té un únic punt fix O és el producte de dues simetries respecte d'eixos que passen per O ; i si no té punts fixos, és el producte de dues simetries axials d'eixos paral·lels si és una translació i el producte de tres simetries axials si és una simetria axial amb lliscament.

4. En el cas 3D tot desplaçament és composició de com a molt 4 simetries especulars. La raó d'aquesta afirmació prové del fet que les translacions (rotacions) es poden posar com a composició de dues simetries especulars respecte de plans paral·lels (respectivament, de plans no paral·lels). Els arguments són similars al cas del pla i es deixen com a exercici.

En relació a la taula de classificació 3D, el nombre n de simetries necessàries per expressar els diversos casos ve donat per la taula següent:

Nom	SE	SA	G	SC	G+SE	T	SE+T	SA+T	G+T
n	1	2	2	3	3	2	3	4	4