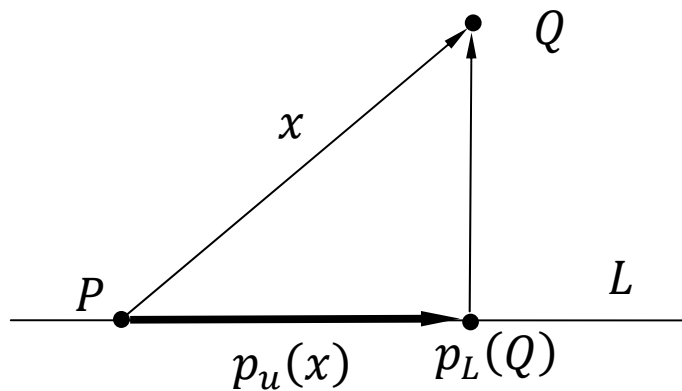


Geometria / GE

3. Àrees i volums. Producte vectorial

© S. Xambó

- Àrees
- Determinant de Gram
- Volum d'un paral·lelepípede
- Orientacions
- Àrea orientada
- Angle orientat en un pla orientat
- Volum orientat
- Producte vectorial
- Propietats del producte vectorial
- Distància entre dues rectes de A^3
- Àrea de polígons



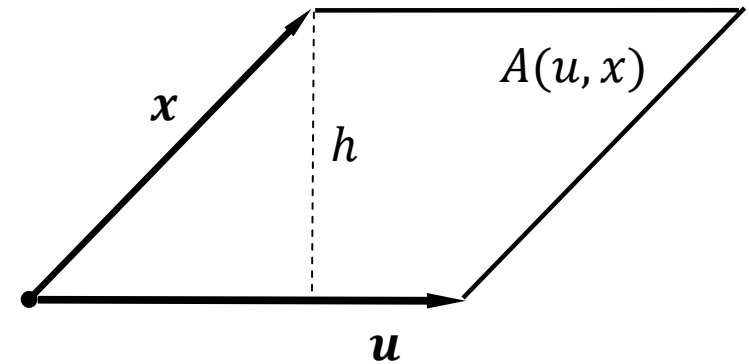
Àrees. En estudiar la distància d'un punt Q a una recta L , hem trobat la fórmula

$$d(Q, L) = \frac{\sqrt{|x|^2 |u|^2 - (u \cdot x)^2}}{|u|}$$

on P i u són un punt i un vector director de L i on $x = Q - P$. Així doncs tenim

$$|u|d(Q, L) = \sqrt{|x|^2 |u|^2 - (u \cdot x)^2},$$

la qual cosa mostra que podem interpretar l'expressió $\sqrt{|x|^2 |u|^2 - (u \cdot x)^2}$ com l'àrea del paral·lelogram format pels vectors u i x .



Aquesta conclusió la podem veure també directament. Recordant que $x \cdot u = |x||u| \cos(\alpha)$, on $\alpha = \alpha(u, x)$, obtenim que

$$|x|^2 |u|^2 - (u \cdot x)^2 = |x|^2 |u|^2 \sin^2(\alpha),$$

de manera que $\sqrt{|x|^2 |u|^2 - (u \cdot x)^2} = |x||u| \sin(\alpha) = |u|h$, on h és l'altura del paral·lelogram format per u i x .

Notem que en particular que

$$|x|^2|u|^2 - (u \cdot x)^2 = 0 \Leftrightarrow u, x \text{ són linealment dependents.}$$

Com que

$$|x|^2|u|^2 - (u \cdot x)^2 = \begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot u \\ u \cdot x & u \cdot u \end{vmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \cdot (x, u) \right),$$

podem resumir les conclusions anteriors de la manera següent:

Proposició. Si $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ són dos vectors de V , llavors el determinant de la matriu

$$\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = \left(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \cdot (e_1, e_2) \right) = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix}$$

és positiu si e_1, e_2 són linealment independents, nul si e_1, e_2 són linealment dependents i $\sqrt{\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}}$ és l'àrea del paral·lelogram definit pels vectors e_1, e_2 .

Determinant de Gram

Donats vectors $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k)$, del determinant $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ se'n sol dir *determinant de Gram* de $e_1, \dots, e_k$.

Proposició. Si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k)$ són vectors linealment independents, $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) > 0$.

Prova. En efecte, sigui $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ una base ortonormal del subespai $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ M la matriu dels vectors $\mathbf{e}$ respecte dels vectors $\mathbf{u}$, $\mathbf{e} = \mathbf{u}M$. Llavors

$$\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{u}M)^T \cdot (\mathbf{u}M) = M^T \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u}M = M^T M$$

i per tant

$$\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = \det(M)^2 > 0.$$

Remarca. $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ no depèn de l'ordre dels vectors. Per exemple, si transposem dos dels vectors e_i , aleshores queden transposades dues columnes de M i dues files de M^T , amb la qual cosa $\det(M^T M)$ queda inalterat.

Remarques

- Si G és la matriu de la mètrica en una base qualsevol, llavors $\det(G) > 0$.

- Un argument similar al de la prova anterior mostra que $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = 0$ si els vectors $\mathbf{e}$ són linealment dependents.

En efecte, si $d = \dim\langle e_1, \dots, e_k \rangle < k$, i $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ és una base ortonormal de $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$, i $\mathbf{e} = \mathbf{u}M$, llavors $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = M^T M$, com abans. En aquest cas, però, $\det(M^T M) = 0$ perquè $\text{rang}(M^T M) \leq \text{rang}(M) = d < k$.

- Si M és la matriu dels vectors linealment independents $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ respecte d'una base ortonormal $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ de $\langle e_1, e_2 \rangle$, llavors $A(e_1, e_2) = |\det(M)|$.

- Si (x_i, y_i) són les coordenades d'un punt P_i del pla euclidià respecte d'una referència rectangular ($i = 1, 2, 3$), llavors l'àrea del triangle $P_1 P_2 P_3$ és igual al valor absolut de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

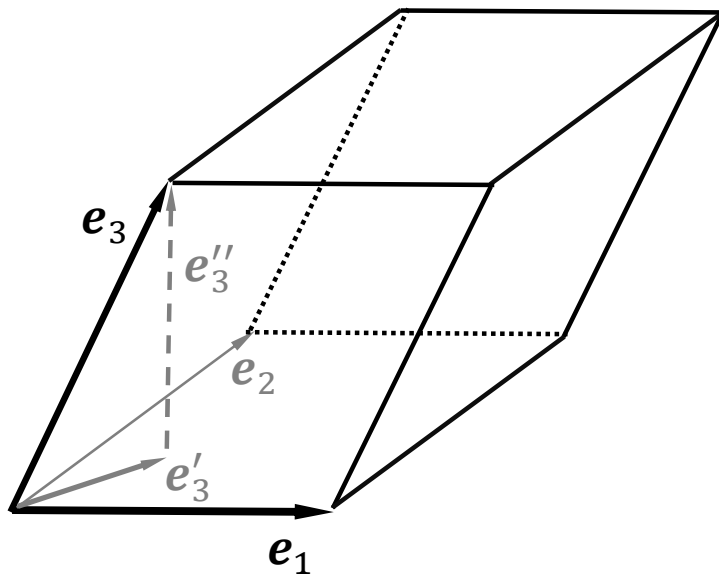
Volum d'un paral·lelepípede

Donats vectors $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, posem

$$V(e_1, e_2, e_3) = \sqrt{\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})}$$

i diem que és el volum del paral·lelepípede definit pels vectors $\mathbf{e}$, és a dir, el volum de

$$\{x \in V \mid x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$



Justificació

Sigui e'_3 la projecció ortogonal de e_3 sobre el subespai $\langle e_1, e_2 \rangle$ i

$$e''_3 = e_3 - e'_3.$$

Així, doncs, $e_3 = e'_3 + e''_3$ i e''_3 és ortogonal a e_1 i e_2 .

Ara podem procedir com segueix:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) &= \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e'_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e'_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3'^2 + e_3''^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e'_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e'_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3'^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & 0 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & 0 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3''^2 \end{vmatrix} \\
&= |e_3''|^2 A(e_1, e_2)^2,
\end{aligned}$$

ja que el primer determinant de la darrera suma és nul per ser e_1, e_2, e'_3 linealment dependents. Però $h = |e_3''|$ és l'altura del paral·lelepípede definit pels vectors e_1, e_2, e_3 i per tant, extraient arrels quadrades,

$$V(e_1, e_2, e_3) = h \cdot A(e_1, e_2).$$

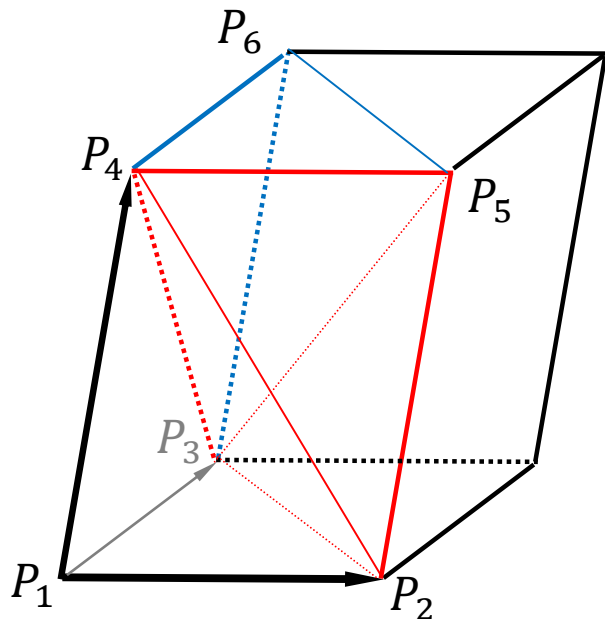
Remarca. Si e_1, e_2, e_3 són linealment dependents, la igualtat de la proposició també és vàlida, ja que d'una banda $\det(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})$ i de l'altra el paral·lelepípede definit pels vectors e_1, e_2, e_3 és «degenerat» (un dels vectors és combinació lineal dels altres dos).

Corol·lari. Si M és la matriu dels vectors $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ respecte d'una base ortonormal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, llavors

$$V(e_1, e_2, e_3) = |\det(M)|.$$

Corol·lari. Si (x_i, y_i, z_i) són les coordenades d'un punt P_i de l'espai euclidià respecte d'una referència rectangular ($i = 1, 2, 3, 4$), llavors el volum del tetràedre $P_1P_2P_3P_4$ és igual al valor absolut de

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$



Adonem-nos que el paral·lelepípede corresponent a $P_1P_2P_3P_4$ és unió de dos prismes triangulars iguals i que cadascun d'aquests prismes és unió de tres tetràedres iguals a $P_1P_2P_3P_4$. Per exemple, $P_1P_2P_3P_4$ i $P_2P_3P_4P_5$ comparteixen el vèrtex P_3 i les corresponents cares oposades $P_1P_2P_4$ i $P_2P_4P_5$ són iguals.

Orientacions

Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita n . Donades dues bases $\mathbf{e}$ i $\mathbf{e}'$ de V , direm que *tenen la mateixa orientació*, i escriurem $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$, si $\det(A) > 0$, on A és la matriu de $\mathbf{e}$ respecte de $\mathbf{e}'$. Si $\det(A) < 0$, direm que $\mathbf{e}$ i $\mathbf{e}'$ *tenen orientacions oposades*, o *contràries*.

Exemples

1. Si $n = 2$, $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ i posem $\mathbf{e}' = (e_2, e_1)$, llavors $\mathbf{e}$ i $\mathbf{e}'$ tenen orientacions oposades, ja que la matriu de $\mathbf{e}'$ respecte de $\mathbf{e}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i aquesta matriu té determinant -1 .
2. Si $n = 3$ i $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, llavors les bases (e_2, e_3, e_1) i (e_3, e_1, e_2) tenen la mateixa orientació que $\mathbf{e}$, mentre que les bases (e_2, e_1, e_3) , (e_3, e_2, e_1) i (e_1, e_3, e_2) tenen orientació contrària a la de $\mathbf{e}$.
3. Per a qualsevol $n > 0$, si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ és una base, i posem $\bar{\mathbf{e}} = (e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)$, llavors $\mathbf{e}$ i $\bar{\mathbf{e}}$ tenen orientacions oposades, ja que la matriu de $\bar{\mathbf{e}}$ respecte de $\mathbf{e}$ és $J_n = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$ i $\det(J_n) = -1$.

Proposició. La relació $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$ és d'equivalència.

Prova. Com que la matriu d'una base $\mathbf{e}$ respecte d'ella mateixa és la matriu identitat I_n i $\det(I_n) = 1$ resulta que $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}$, és a dir, la relació és reflexiva.

Siguin ara $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ i $\mathbf{e}''$ bases tal que $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}'$ i $\mathbf{e}' \sim \mathbf{e}''$. Llavors tenim, si $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$ i $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}'A'$, $\det(A) > 0$ i $\det(A') > 0$. Però com que $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}'A' = \mathbf{e}AA'$ i $\det(AA') = \det(A)\det(A') > 0$, resulta que $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}''$, amb la qual cosa queda vist que $\sim$ és transitiva.

Finalment, atès que si $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$ i $\det(A) > 0$ llavors $\mathbf{e} = \mathbf{e}'A^{-1}$ i $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} > 0$, obtenim que $\sim$ és simètrica.

Definicions. Posarem $o(\mathbf{e})$ per denotar la classe d'equivalència de la base $\mathbf{e}$ per la relació $\sim$, de la qual en direm que és l'*orientació* definida per $\mathbf{e}$. Amb les notacions de l'exemple 3 vist abans sabem que $o(\mathbf{e}) \neq o(\bar{\mathbf{e}})$.

Per altra banda, donada una altra base qualsevol $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$, es compleix $o(\mathbf{e}') = o(\mathbf{e})$ si $\det(A) > 0$ i $o(\mathbf{e}') = o(\bar{\mathbf{e}})$ si $\det(A) < 0$.

Hem doncs demostrat que l'espai vectorial V té exactament dues orientacions.

Un *espai orientat* és un espai en el qual hem distingit una de les dues orientacions, diguem o , com a *orientació positiva*. En aquest cas es diu que l'orientació contrària, $\bar{o}$, és l'*orientació negativa*.

Àrea orientada

Donats dos vectors $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ d'un pla euclidià, sabem que

$$A(e_1, e_2) = |\det(M)|$$

on M és la matriu dels vectors respecte d'una base ortonormal qualsevol $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Tenim, doncs, que $A(e_1, e_2) = \pm \det(M)$, amb el signe $+$ si $\mathbf{e}$ té la mateixa orientació que $\mathbf{u}$ i amb el signe $-$ altrament. Si el pla és orientat, i o és l'orientació positiva, posarem

$$A_o(e_1, e_2) = \det(M),$$

on ara $\mathbf{u}$ és qualsevol base ortonormal positiva (és a dir, amb $o(\mathbf{u}) = o$). Tenim, doncs, que

$$A_o(e_1, e_2) > 0 \text{ si } \mathbf{e} \text{ té orientació positiva i}$$

$$A_o(e_1, e_2) < 0 \text{ si } \mathbf{e} \text{ té orientació negativa.}$$

Angle orientat en un pla orientat

Vegem, com a aplicació de l'àrea orientada, la noció d'*angle orientat*,

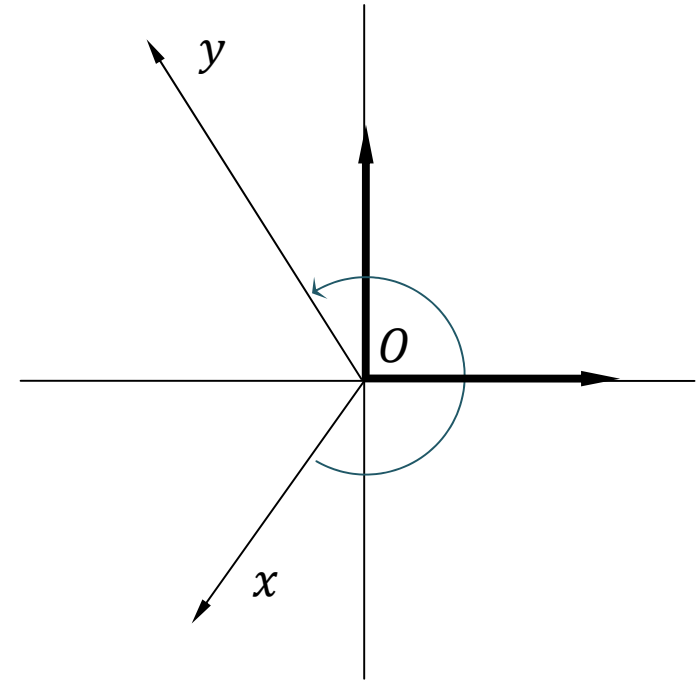
$$\alpha_o(x, y) \in [0, 2\pi),$$

entre dos vectors no nuls x i y del pla euclidià orientat (per una orientació o):

$$\alpha_o(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y) & \text{si } A_o(x, y) > 0 \\ 2\pi - \alpha(x, y) & \text{si } A_o(x, y) < 0 \end{cases}$$

Notem que si $A_o(x, y) \neq 0$, llavors x i y són linealment independents i, per tant, $\alpha(x, y) \in (0, \pi)$, amb la qual cosa $\alpha_o(x, y) \in (\pi, 2\pi)$ si $A_o(x, y) < 0$. En tot cas es compleix

$$\cos(\alpha_o) = \cos(\alpha) = \frac{x \cdot y}{|x||y|}, \quad \sin(\alpha_o) = \frac{A_o(x, y)}{|x||y|}.$$



Volum orientat

Consideracions similars a les de l'àrea valen per al volum. Donats tres vectors $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ d'un espai euclidià, sabem que

$$V(e_1, e_2, e_3) = |\det(M)|$$

on M és la matriu dels vectors $\mathbf{e}$ respecte d'una base ortonormal qualsevol $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Tenim, doncs, que

$$V(e_1, e_2, e_3) = \pm \det(M),$$

amb el signe $+$ si $\mathbf{e}$ té la mateixa orientació que $\mathbf{u}$ i amb el signe $-$ altrament.

Si l'espai és orientat, i o és l'orientació positiva, posarem

$$V_o(e_1, e_2, e_3) = \det(M)$$

on ara $\mathbf{u}$ és qualsevol base ortonormal positiva (és a dir, amb $o(\mathbf{u}) = o$). Tenim, doncs, que $V_o(e_1, e_2, e_3) > 0$ si $\mathbf{e}$ és una base amb orientació positiva i $V_o(e_1, e_2, e_3) < 0$ si $\mathbf{e}$ és una base amb orientació negativa.

Producte vectorial

En aquesta secció suposarem que V_3 és un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Posem $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ per denotar una base ortonormal positiva de V_3 .¹

Donats dos vectors x i y , amb components (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) respecte de $\mathbf{u}$, definim el seu *producte vectorial*, $x \wedge y$, de la manera següent:

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{u}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{u}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{u}_3,$$

és a dir,

$$x \wedge y \equiv \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3).$$

Simbòlicament,

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{u}^T, \mathbf{u}^T \cdot x, \mathbf{u}^T \cdot y).$$

Propietats del producte vectorial

- El producte vectorial és bilineal.
- $y \wedge x = -x \wedge y$ (es diu que el producte vectorial és *alternat*). En particular, $x \wedge x = 0$.
- $u_1 \wedge u_2 = u_3, u_2 \wedge u_3 = u_1, u_3 \wedge u_1 = u_2$.

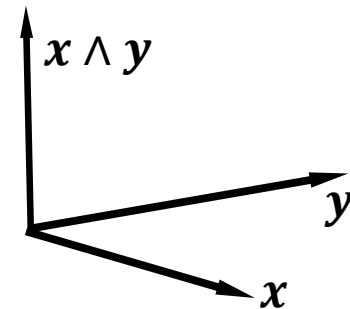
a) **Fórmula del producte mixt.** El vector $x \wedge y$ compleix la *fórmula del producte mixt*: si z és un altre vector, llavors

$$(x \wedge y) \cdot z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot z & \mathbf{u}_2 \cdot z & \mathbf{u}_3 \cdot z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = V_o(x, y, z),$$

ja que $z \cdot \mathbf{u}_i = z_i$. En particular resulta que $x \wedge y$ no depèn de la base positiva usada per calcular-lo. Notem també que la fórmula implica que

$$(x \wedge y) \cdot z = (y \wedge z) \cdot x = (z \wedge x) \cdot y.$$

b) $x \wedge y$ és perpendicular a x i y . És clar, ja que $V_o(x, y, x) = V_o(x, y, y) = 0$.



c) Norma del producte vectorial

$$|x \wedge y| = A(x, y) .$$

En efecte, $|x \wedge y|^2 = V_o(x, y, x \wedge y) = V(x, y, x \wedge y) = |x \wedge y|A(x, y)$.

d) Càlcul del producte vectorial en una base qualsevol

Si $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ és una base qualsevol de l'espai euclidià orientat de dimensió 3, llavors

$$x \wedge y = \frac{1}{V_o(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x \cdot \mathbf{e}_1 & x \cdot \mathbf{e}_2 & x \cdot \mathbf{e}_3 \\ y \cdot \mathbf{e}_1 & y \cdot \mathbf{e}_2 & y \cdot \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} .$$

En efecte, el determinant d'aquesta expressió coincideix amb

$$\det(\mathbf{e}^T, \mathbf{e}^T \cdot x, \mathbf{e}^T \cdot y).$$

Si M és la matriu de $\mathbf{e}$ respecte d'una base ortonormal positiva $\mathbf{u}$, llavors

$\det(\mathbf{e}^T, \mathbf{e}^T \cdot x, \mathbf{e}^T \cdot y) = \det(M^T \mathbf{u}^T, M^T \mathbf{u}^T \cdot x, M^T \mathbf{u}^T \cdot y) = \det(M) x \wedge y$,
i l'afirmació resulta del fet que $\det(M) = V_o(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

e) Doble producte vectorial. Si x, y, z són vectors, aleshores

$$(x \wedge y) \wedge z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x .$$

En efecte, podem suposar que x i y són linealment independents, ja que altrament les dues expressions són nul·les. En tal cas, podem calcular el doble producte vectorial $(x \wedge y) \wedge z$ usant la base positiva $x, y, x \wedge y$:

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \wedge z &= \frac{1}{V(x, y, x \wedge y)} \begin{vmatrix} x & y & x \wedge y \\ (x \wedge y) \cdot x & (x \wedge y) \cdot y & (x \wedge y)^2 \\ z \cdot x & z \cdot y & z \cdot (x \wedge y) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{|x \wedge y|^2} \begin{vmatrix} x & y & x \wedge y \\ 0 & 0 & (x \wedge y)^2 \\ z \cdot x & z \cdot y & z \cdot (x \wedge y) \end{vmatrix} \\ &= -((z \cdot y)x - (z \cdot x)y) . \end{aligned}$$

f) Producte escalar de dos productes vectorials. Si x, y, x', y' són vectors,

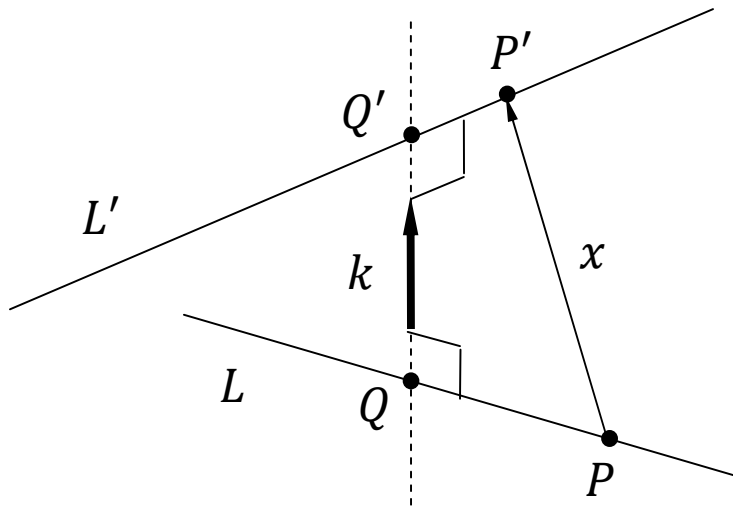
$$\text{aleshores } (x \wedge y) \cdot (x' \wedge y') = \begin{vmatrix} x \cdot x' & y \cdot x' \\ y \cdot x' & y \cdot y' \end{vmatrix}.$$

De nou, podem suposar que x i y són linealment independents. Llavors tenim

$$x' \wedge y' = \frac{1}{|x \wedge y|^2} \begin{vmatrix} x & y & x \wedge y \\ x \cdot x' & y \cdot x' & (x \wedge y) \cdot x' \\ x \cdot y' & y \cdot y' & (x \wedge y) \cdot y' \end{vmatrix}.$$

Multiplicant escalarment per $x \wedge y$, obtenim

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \cdot (x' \wedge y') &= \frac{1}{|x \wedge y|^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & (x \wedge y)^2 \\ x \cdot x' & y \cdot x' & (x \wedge y) \cdot x' \\ x \cdot y' & y \cdot y' & (x \wedge y) \cdot y' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x \cdot x' & y \cdot x' \\ x \cdot x' & y \cdot y' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$



Distància entre dues rectes de $\mathbb{A}^3$

Sabem que la distància entre dues rectes no paral·leles $L = P + \langle u \rangle$ i $L' = P' + \langle u' \rangle$ de l'espai euclidià ordinari ve donada per la fórmula

$$d(L, L') = \frac{|k \cdot x|}{|k|},$$

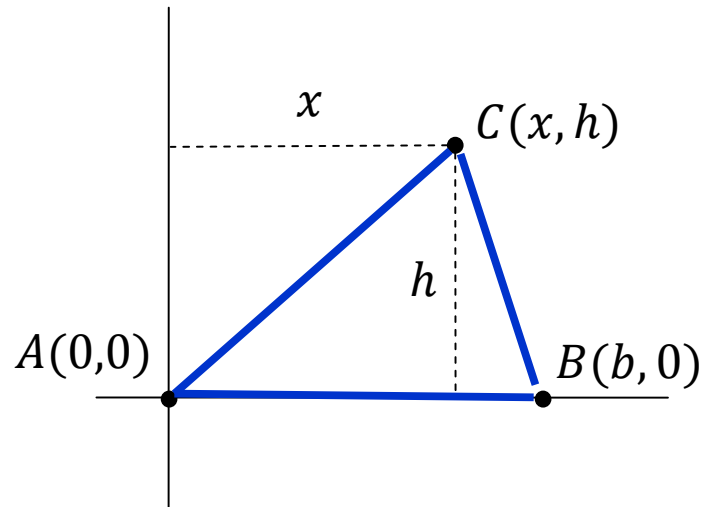
on $x = P' - P$ i on k és qualsevol vector no nul perpendicular a u i u' .
Doncs bé, ara veiem que podem posar $k = u \wedge u'$, amb la qual cosa

$$k \cdot x = (u \wedge u') \cdot x = V_o(u, u', x), \quad |k| = |u \wedge u'| = A(u, u'),$$

d'on

$$d(L, L') = \frac{V(u, u', x)}{A(u, u')}.$$

Àrea de polígons



Recordem... Donats tres punts $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$, l'àrea orientada $S = S(ABC)$ del triangle ABC ve donada per la fórmula

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}.$$

Observem... Si $A(0,0)$, $B(b,0)$ i $C(x,h)$, la fórmula ens dona l'expressió familiar $S = bh/2$ (notem que $S > 0$ si el triangle és antihorari i $S < 0$ si és horari).

Una meravellosa fórmula. L'àrea (orientada) d'un polígon de N costats ve donada per la fórmula

$$S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \begin{vmatrix} a_j & b_j \\ a_{j+1} & b_{j+1} \end{vmatrix}$$

on $P_j(a_j, b_j)$ ($j = 1, \dots, N$) són els vèrtexs consecutius del polígon i on $P_{N+1} = P_1$ per convenció. Notem que el j -èsim sumand és l'àrea orientada del triangle OP_jP_{j+1} , O l'origen de coordenades.²

Exemple: el cas d'un triangle

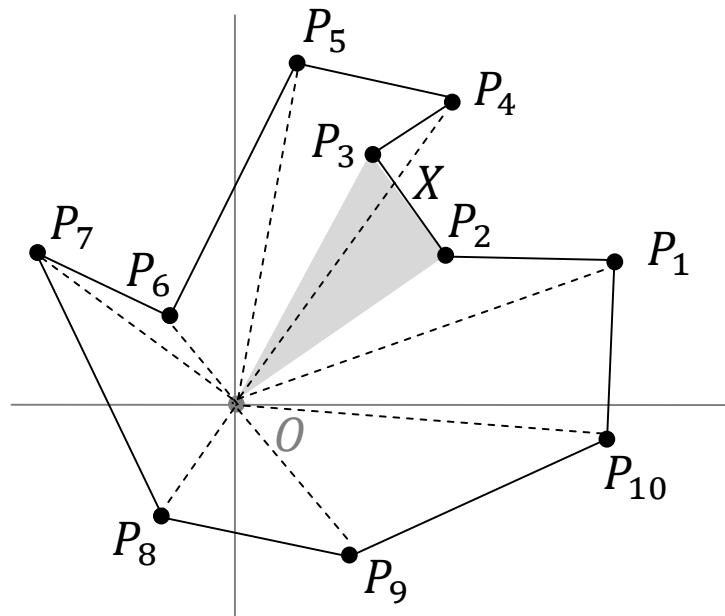
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

que coincideix amb l'àrea orientada del triangle.

Notes

1. Aquesta base és també denotada $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, especialment en les llibres de física.

2. La figura representa un polígon amb $N = 10$ vèrtexs. Adonem-nos que



l'àrea del polígon $OP_2P_3P_4P_5$ és efectivament la suma de les àrees **orientades** dels triangles OP_2P_3 , OP_3P_4 i OP_4P_5 (la suma dels dos primers equival a l'àrea de OP_2X , positiva, més la de XP_3P_4 , negativa, i al sumar l'àrea de OP_4P_5 , que és positiva, restem la de OXP_3 i cancel·lem la de XP_3P_4).

