

Geometria / GE

2. Perpendicularitat

© S. Xambó

- Vectors perpendiculars
- Ortogonal d'un subespai
- Varietats lineals ortogonals
- Projectió ortogonal
- Càlcul efectiu de la projectió ortogonal
- Aplicació: ortonormalització de Gram–Schmidt
- Projectió ortogonal sobre una varietat lineal
- L'equació cartesiana d'un hiperplà en termes del producte escalar
- Distància d'un punt a una varietat lineal
- Distància d'un punt a un hiperplà
- Distància d'un punt a una recta
- Distància entre dues rectes de l'espai de dimensió 3

Vectors perpendiculars

Dos vectors x i y són *perpendiculars* o *ortogonals* si $x \cdot y = 0$.

- El vector 0 és perpendicular a qualsevol vector.
- Si $x, y \neq 0$, $x \cdot y = 0$ equival a $\alpha(x, y) = \pi/2$.
- La relació de perpendicularitat és simètrica, ja que el producte escalar és simètric.
- Dos vectors x i y són ortogonals si i només si $\mathbf{x}G\mathbf{y}^T = 0$, on G , $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ són, respectivament, la matriu de la mètrica g i els vectors de coordenades de x i y respecte d'una base donada de V .

Remarca. Si $v_1, \dots, v_r$ són vectors no nuls tals que $v_i \cdot v_j = 0$ quan $i \neq j$, llavors $v_1, \dots, v_r$ són linealment independents.

En efecte, si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$), per a tot $k = 1, \dots, r$ tenim: $0 = v_k \cdot (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) = \lambda_k |v_k|^2$, d'on $\lambda_k = 0$.

Conjunts ortogonals. Si X i Y són dos subconjunts de V , direm que són *ortogonals* si $x \cdot y = 0$ qualssevol que siguin $x \in X$ i $y \in Y$, és a dir, si i només si tot vector de X és perpendicular a tot vector de Y .

Exemple. Si $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$, els subespais vectorial $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ i $\langle w_1, \dots, w_s \rangle$ són ortogonals si i només si $v_i \cdot w_j = 0$ per $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$. Aquesta propietat és una conseqüència immediata del caràcter bilineal del producte escalar.

Ortogonal d'un subespai

Donat $U \subseteq V$, posarem $U^\perp$ per denotar el conjunt de vectors $x \in V$ ortogonals a U , és a dir,

$$U^\perp = \{x \in V \mid u \cdot x = 0 \text{ per a tot } u \in U\}.$$

- $U^\perp$ és un subespai vectorial de V , qualsevol que sigui $U \subseteq V$.
- $U^\perp = \langle U \rangle^\perp$.
- $U \subseteq U^{\perp\perp}$ (usualment posarem $U^{\perp\perp}$ en lloc de $(U^\perp)^\perp$).

Teorema (dimensió de $U^\perp$). Per a tot subespai vectorial U de V ,

$$U \cap U^\perp = \{0\} \quad i \quad \dim(U^\perp) = n - \dim(U),$$

relacions que equivalen a dir que $V = U \oplus U^\perp$.

Prova. Sigui $u_1, \dots, u_r$ una base de U ($r = \dim(U)$) i definim

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^r \text{ tal que } x \mapsto (u_1 \cdot x, \dots, u_r \cdot x).$$

L'aplicació f és lineal i $\ker(f) = U^\perp$. Per tant,

$$\dim(U^\perp) = \dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}(f)) \geq n - r,$$

atès que $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^r) = r$.

Per altra banda tenim $U \cap U^\perp = 0$ (una conseqüència immediata del fet que el producte escalar és definit positiu) i així

$$n \geq \dim(U + U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp) = r + \dim(U^\perp)$$

d'on $\dim(U^\perp) \leq n - r$.

Corol·laris

- $U^{\perp\perp} = U$ per a tot subespai U de V .
- Si U_1 i U_2 són subespais de V , llavors $U_1 \subseteq U_2$ si i només si $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$.

Varietats lineals ortogonals

Varietat perpendicular a una varietat per un punt. Si L és una varietat lineal i Q un punt, posarem

$$L_Q^\perp = Q + W(L)^\perp$$

i diem que $L_Q^\perp$ és la *varietat perpendicular a L per Q* .

- $W(L_Q^\perp) = W(L)^\perp$.
- $\dim(L_Q^\perp) = n - \dim(L)$.
- Si L és fixa i Q variable, les varietats perpendiculars $L_Q^\perp$ són paral·leles entre elles.
- L és la varietat perpendicular a $L_Q^\perp$ per un punt qualsevol de L .

Varietats lineals perpendiculars. Siguin L i L' dues varietats lineals de l'espai euclidià i posem $W = W(L)$ i $W' = W(L')$. Direm que L' és *perpendicular* o *ortogonal* a L si $W^\perp \subseteq W'$ o $W^\perp \supseteq W'$. Si $P' \in L'$, la condició $W^\perp \subseteq W'$ equival a $L_{P'}^\perp \subseteq L'$ i la condició $W^\perp \supseteq W'$ equival a

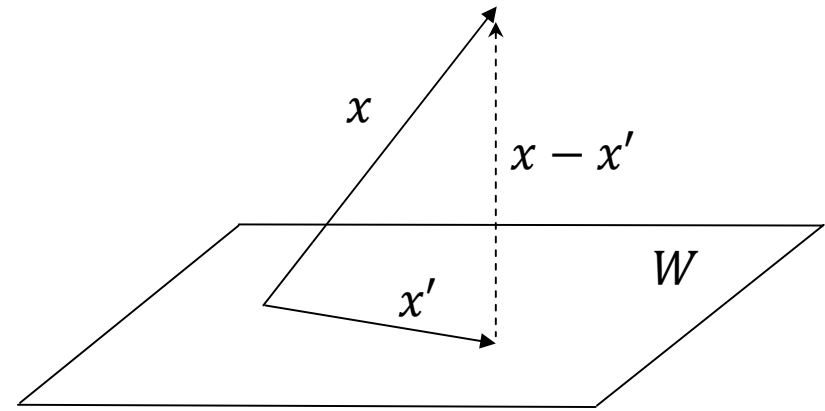
$L_P^\perp \supseteq L'$. Així, doncs, una varietat L' és perpendicular a L si conté, o està continguda en, la varietat $L_P^\perp$ per a un cert punt $P' \in L'$.

Projecció ortogonal

Si W és un subespai vectorial de V , sabem que $V = W \oplus W^\perp$. Per tant, existeix una única aplicació lineal

$$p_W: V \rightarrow W,$$

$$p_W(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in W \\ 0 & \text{si } x \notin W \end{cases}$$



Direm que p_W és la **projecció ortogonal** de V sobre W .

- Si $x = x' + x''$, amb $x' \in W$ i $x'' \in W^\perp$, llavors $p_W(x) = x'$.
- $p_W(x)$ és l'únic vector $x' \in W$ tal que $x'' = x - x' \in W^\perp$.
- Com que $|x|^2 = |x'|^2 + |x''|^2$, $|p_W(x)| \leq |x|$, amb igualtat si i només si $x \in W$.

Càlcul efectiu de la projecció ortogonal

A. Usant una base ortonormal de W

Proposició. Si $u_1, \dots, u_r$ és una base ortonormal de W , llavors

$$p_W(x) = (x \cdot u_1)u_1 + \dots + (x \cdot u_r)u_r$$

per a tot vector $x \in V$. En particular,

$$|p_W(x)|^2 = (x \cdot u_1)^2 + \dots + (x \cdot u_r)^2.$$

Prova. El vector

$$x' = (x \cdot u_1)u_1 + \dots + (x \cdot u_r)u_r$$

és de W . Com que

$$x' \cdot u_j = x \cdot u_j \Leftrightarrow (x - x') \cdot u_j = 0 \quad (j = 1, \dots, r),$$

$x - x' \in W^\perp$ i per tant $x' = p_W x$.

Exemple (cas $W = V$). Si $W = V$, $p_V = Id$. Per tant, si $u_1, \dots, u_n$ és una base ortonormal de V ,

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot u_i) u_i \quad \text{i} \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^n (x \cdot u_i)^2 \quad \text{per a tot } x \in V.$$

Exemple ($\dim(W) = 1$). Si w és un vector no nul de W i posem $u = w/|w|$ (de manera que u és una base ortonormal de W), aleshores

$$p_w(x) = (x \cdot u)u = \frac{(x \cdot w)}{|w|^2} w \quad \text{i} \quad |p_w(x)| = \frac{|x \cdot w|}{|w|},$$

on hem posat $p_w = p_{\langle w \rangle}$.

B. Usant una base qualsevol de W

Sigui $\mathbf{e} = e_1, \dots, e_k$ una base qualsevol de W . Tindrem

$$p_W(x) = t_1 e_1 + \dots + t_k e_k = \mathbf{t} \mathbf{e}^T, \quad t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R},$$

i es tracta d'obtenir una expressió per als coeficients $t_1, \dots, t_k$.

Com que $x - \mathbf{t} \mathbf{e}^T \in W^\perp$, tenim $(x - \mathbf{t} \mathbf{e}^T) \cdot e_j = 0$ per a $j = 1, \dots, k$, o, en notació compacta, $(x - \mathbf{t} \mathbf{e}^T) \cdot \mathbf{e} = 0$, és a dir,

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) = x \cdot \mathbf{e}.$$

Aquesta relació és un sistema de k equacions lineals en $\mathbf{t} = t_1, \dots, t_k$ i sabem que té solució única. Per tant $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}$ és una matriu invertible i com a conseqüència

$$\mathbf{t} = (x \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e})^{-1}.$$

Remarca. Si $\mathbf{e}$ és ortonormal, llavors $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = I_k$ i el resultat coincideix amb el que ja hem obtingut en aquest cas. El mateix passa en el cas $\dim(W) = 1$ (segon exemple de la pàgina anterior), en què $\mathbf{e}$ es redueix a un vector w : $\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = |w|^2$, $\mathbf{t}$ es redueix a $t = (x \cdot w)/|w|^2$ i $\mathbf{t}\mathbf{e}^T$ és igual a $tw = \frac{x \cdot w}{|w|^2} w$.

Aplicació: ortonormalització de Gram–Schmidt

Si $e_1, \dots, e_k$ són vectors linealment independents de V , el procediment

$$u_1 = e_1 / |e_1|;$$

per $j = 2, \dots, k$,

$$u_j = \frac{e_j - (e_j \cdot u_1)u_1 + \dots + (e_j \cdot u_{j-1})u_{j-1}}{|e_j - (e_j \cdot u_1)u_1 + \dots + (e_j \cdot u_{j-1})u_{j-1}|}$$

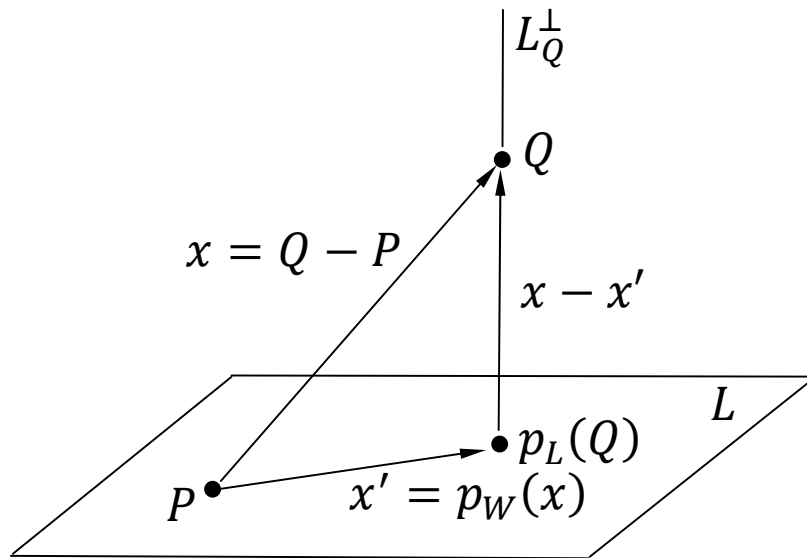
subministra una base ortonormal $u_1, \dots, u_k$ de $W = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ tal que

$$\langle u_1, \dots, u_j \rangle = \langle e_1, \dots, e_j \rangle \text{ i } e_j \cdot u_j > 0 \text{ per } j = 1, \dots, k.$$

Remarca. L'expressió $e'_j = (e_j \cdot u_1)u_1 + \dots + (e_j \cdot u_{j-1})u_{j-1}$ dóna la projecció ortogonal de e_j sobre $U_{j-1} = \langle u_1, \dots, u_{j-1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle$ (aquesta igualtat és vàlida per recurrència). Per tant $e''_j = e_j - e'_j$ és un vector perpendicular a U_{j-1} , i és no nul per la independència lineal de $e_1, \dots, e_k$, la qual cosa mostra que

$$u_j = e''_j / |e''_j| \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$$

compleix les condicions enunciades.



Projecció ortogonal sobre una varietat lineal. Sigui L una varietat lineal i Q un punt. Posem $W = W(L)$ i fixem un punt arbitrari $P \in L$. Els punts X d'intersecció de $L_Q^\perp$ amb L són els que compleixen $X = Q + w' = P + w$, amb $w \in W$, $w' \in W^\perp$. Com que l'única solució és $w = p_W(Q - P)$ i $w' = w - (Q - P)$,

resulta que existeix un únic punt d'intersecció i que aquest punt és

$$Q' = P + p_W(Q - P).$$

Fixem-nos que, en particular, $P + p_W(Q - P)$ és independent del punt $P \in L$. Direm que Q' és la **projecció ortogonal de Q sobre L** i posarem $p_L(Q)$ per denotar-lo. Per definició, doncs, tenim

$$p_L(Q) = P + p_W(Q - P)$$

per a qualsevol punt P de L . Com que p_W és lineal, $p_L: \mathbb{A} \rightarrow L$ és una aplicació afí.

■ $p_L(X) = p_L(Q)$ equival a $X \in L_Q^\perp$.

L'equació cartesiana d'un hiperplà en termes del producte escalar

Sigui H un hiperplà. Com que $W(H)^\perp$ és un espai vectorial de dimensió 1, $W(H)^\perp = \langle a \rangle$, on a és qualsevol vector no nul de $W(H)^\perp$. Si $P \in H$,

$$X \in H \Leftrightarrow X - P \in W(H) \Leftrightarrow a \cdot (X - P) = 0.$$

En una referència $\mathcal{R} = [O; \mathbf{u}]$, aquesta condició adopta la forma

$$\mathbf{a}G\mathbf{x}^T = \mathbf{a}G\mathbf{p}^T,$$

on $\mathbf{a}$ són les components de a respecte de $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ les $\mathcal{R}$ -coordenades de X i $\mathbf{p}$ les $\mathcal{R}$ -coordenades de P . Si ara posem

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n), \text{ on } \mathbf{b} = \mathbf{a}G, \text{ i } \beta = b_1p_1 + \dots + b_np_n,$$

la darrera equació adopta la forma

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \beta.$$

Hem obtingut així, a partir del vector a perpendicular a H i mitjançant el producte escalar, una equació cartesiana de H en la referència $\mathcal{R}$.

Notem que si $\mathcal{R}$ és **rectangular**, és a dir, si $\mathbf{u}$ és ortonormal, llavors $G = I_n$ i $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, amb la qual cosa l'equació de l'hiperplà s'escriu

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \alpha, \text{ on } \alpha = a_1p_1 + \cdots + a_np_n.$$

Com trobar un vector perpendicular a un hiperplà. Suposem que

$$b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = \beta$$

és l'equació d'un hiperplà H en una referència $\mathcal{R} = [O; \mathbf{u}]$ de $\mathbb{A}$. Sigui

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$$

i definim

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{b}G^{-1},$$

on G és la matriu de la mètrica en la referència $\mathcal{R}$. Llavors el vector

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{a}^T = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$$

és un vector perpendicular a H . Notem que en el cas que $\mathcal{R}$ sigui rectangular, els mateixos coeficients $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ són les $\mathbf{u}$ -components d'un vector perpendicular a H .

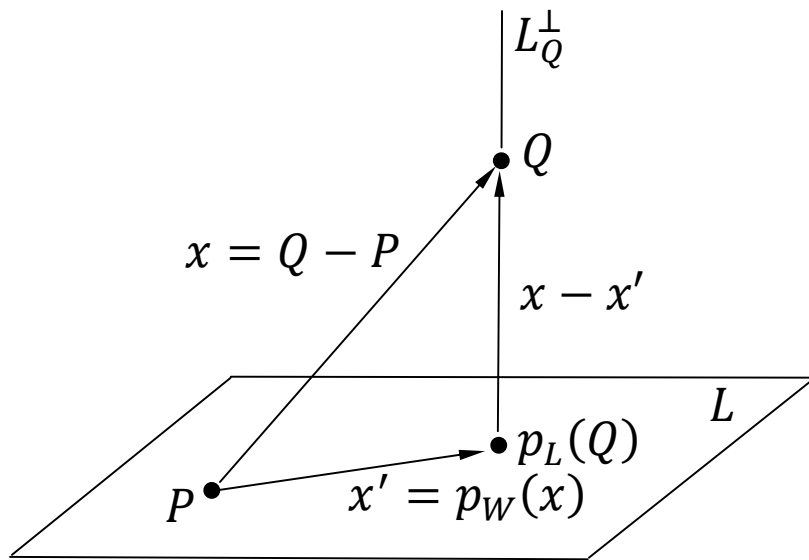
Exemple (hiperplà bisector d'un segment). Donats dos punts diferents P i Q , el conjunt de punts X tals que $d(X, P) = d(X, Q)$ és l'hiperplà perpendicular a $Q - P$ que passa pel punt mitjà M del segment $[P, Q]$.

D'aquest hiperplà en diem *hiperplà bisector del segment $[P, Q]$* (*recta mediatriu* en el cas de dimensió 2 i *pla bisector* en el cas de dimensió 3).

En efecte, si escollim un origen O arbitrari i posem $P = O + p$, $Q = O + q$, $X = O + x$ i $M = O + m$, llavors $m = (p + q)/2$ i

$$\begin{aligned}
 d(X, P) = d(X, Q) &\Leftrightarrow (X - P)^2 = (X - Q)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x - p)^2 = (x - q)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2p \cdot x + p^2 = x^2 - 2q \cdot x + q^2 \\
 &\Leftrightarrow 2(q - p) \cdot x = q^2 - p^2 \\
 &\Leftrightarrow 2(q - p) \cdot x = (q - p) \cdot (q + p) \\
 &\Leftrightarrow (q - p) \cdot (x - m) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (Q - P) \cdot (X - M) = 0,
 \end{aligned}$$

i aquesta expressió és l'equació de l'hiperplà perpendicular a $Q - P$ que passa pel punt M .



Distància d'un punt a una varietat lineal. Per definició, la *distància d'un punt Q a una varietat lineal L* , $d(Q, L)$, és la distància de Q a la seva projecció orthogonal sobre L , és a dir,

$$d(P, Q) = d(Q, p_L(Q)).$$

Si P és un punt qualsevol de L , i

$W = W(L)$, llavors

$$Q - P = (Q - p_L(Q)) + (p_L(Q) - P) = (Q - p_L(Q)) + p_W(Q - P).$$

Com que $p_W(Q - P) \in W$, veiem que $Q - p_L(Q) = p_{W^\perp}(Q - P) \in W^\perp$, de manera que

$$d(Q, L) = |p_{W^\perp}(Q - P)|. \quad [*]$$

A més, $|Q - P|^2 = |Q - p_L(Q)|^2 + |p_L(Q) - P|^2$ (teorema de Pitàgores), d'on $|Q - P|^2 \geq |Q - p_L(Q)|^2$ per a tot $P \in L$, amb igualtat si i només si $P = p_L(Q)$.

Distància d'un punt a un hiperplà

Segons la fórmula [*] de la pàgina anterior, la distància $d = d(Q, H)$ d'un punt Q a un hiperplà H ve donada per

$$d = |p_a(Q - P)| = |a \cdot (Q - P)| / |a| ,$$

on P és un punt qualsevol de H i a és un vector no nul perpendicular a H (en aquest cas $W^\perp = \langle a \rangle$).

Vegem com s'expressa aquesta distància en una referència $\mathcal{R} = [O; \mathbf{u}]$.
Sigui

$$b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = k \quad (\text{o } \mathbf{b} \mathbf{x}^T - k = 0)$$

una equació de H , $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ les coordenades de Q i $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ les coordenades de P . Aleshores sabem, si $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ són els coeficients de l'equació de H , que $\mathbf{a} = \mathbf{b} G^{-1}$ són les components d'un vector a no nul perpendicular a H i la fórmula anterior dóna

$$d = \frac{|\mathbf{b} \mathbf{q}^T - k|}{\sqrt{\mathbf{b} G^{-1} \mathbf{b}^T}} \left(\frac{|b_1 q_1 + \dots + b_n q_n - k|}{\sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}} \text{ si } \mathbf{u} \text{ és ortonormal} \right)$$

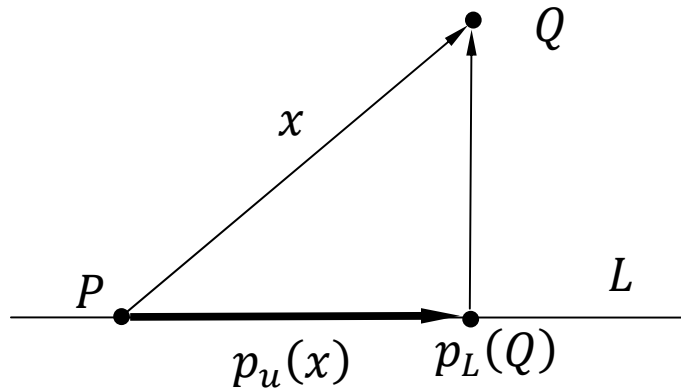
Alguns detalls

- $|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{aGa^T} = \sqrt{bG^{-1}GG^{-1}b^T} = \sqrt{bG^{-1}b^T}.$
- $a \cdot (Q - P) = aG(q^T - p^T) = b(q^T - p^T) = bq^T - bp^T = bq^T - k$
(en el darrer pas hem usat que $P \in H$).

Exemple (hiperplans bisectors de dos hiperplans). Siguin H i H' dos hiperplans no paral·lels. Siguin a i a' vectors **unitaris** perpendiculars a H i H' , respectivament. El lloc geomètric dels punts X que equidisten dels dos hiperplans ve donat per la relació

$$|a \cdot (X - P)| = |a' \cdot (X - P)| \Leftrightarrow a \cdot (X - P) = \pm a' \cdot (X - P),$$

on P és qualsevol punt de $H \cap H'$. Com que la darrera relació equival a $(a \pm a')(X - P) = 0$, veiem que **el lloc geomètric en qüestió està format per dos hiperplans**. D'aquests hiperplans en diem que són **bisectors** dels hiperplans H i H' (en dimensió 2 són les **bisectrius** de dues rectes). Notem que són perpendiculars (ja que $a + a'$ i $a - a'$ ho són) i que contenen a $H \cap H'$.



Distància d'un punt a una recta. Donat un punt Q i una recta L d'equació paramètrica

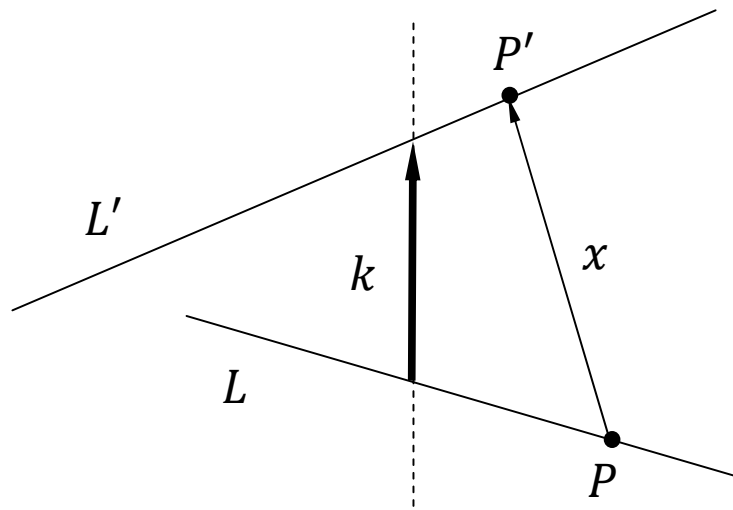
$$X = P + \lambda u \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} Q - P_L(Q) &= (Q - P) - (p_L(Q) - P) \\ &= x - p_u(x), \end{aligned}$$

on $x = Q - P$. Pel teorema de Pitàgores,

$$|Q - p_L(Q)|^2 = |x|^2 - |p_u(x)|^2 = |x|^2 - \frac{(x \cdot u)^2}{|u|^2} = \frac{|x|^2 |u|^2 - (x \cdot u)^2}{|u|^2}$$

$$d(Q, L) = \frac{\sqrt{|x|^2 |u|^2 - (x \cdot u)^2}}{|u|}.$$



Distància entre dues rectes de l'espai de dimensió 3

Siguin L i L' dues rectes no paral·leles de l'espai euclidià de dimensió 3 (d'aquest espai és costum dir-ne *espai ordinari*), u i u' sengles vectors directors, i $P \in L, P' \in L'$.

Com que u i u' són linealment independents, l'espai $\langle u, u' \rangle^\perp$ té dimensió 1. Si k és qualsevol vector no nul perpendicular a u i u' , llavors

$p_k(P' - P)$ només depèn de L i L' , i no dels punts P i P' .

En efecte, si $Q \in L$ i $Q' \in L'$, llavors

- $Q = P + \alpha u, Q' = P' + \alpha' u'$;
- $Q' - Q = (P' - P) + \alpha' u' - \alpha u$; i
- $p_k(Q' - Q) = p_k(P' - P)$.

Ara diem que $|p_k(P' - P)|$ és la *distància entre les rectes L i L'* , $d(L, L')$.

Si posem $x = P' - P$, finalment tenim

$$d(L, L') = |k \cdot x| / |k|.$$

- Notem que $d(P, P') \geq d(L, L')$, amb igualtat si i només si $P' - P$ és perpendicular a u i u' .
- Hi ha una única recta M perpendicular a L i a L' que talla L i a L' .
De fet, si M existeix, serà

$$M \subset L \vee M = P + \langle u, k \rangle \text{ i } M \subset L' \vee M = P' + \langle u', k \rangle$$
d'on $M = (P + \langle u, k \rangle) \cap (P' + \langle u', k \rangle)$. Com que aquesta intersecció és una recta amb vector director k , queda també provada l'existència. Finalment, M talla a L (respectivament L') perquè M i L (respectivament M i L') són coplanàries i no paral·leles.
- Si $M \cap L = Q$ i $M \cap L' = Q'$, llavors $d(L, L') = |Q' - Q|$.