

Geometria / GE

1. Espai euclidià

© S. Xambó

- Definició d'espai euclidià
- Matriu de la mètrica i càlcul del producte scalar
- Construcció de productes scalars
- Matriu de la mètrica en una altra base
- Norma o longitud
- Distància
- Bases ortonormals
- Matrius ortogonals
- El grup O_2
- Angles: definició i càlcul
- Propietats dels angles
- Una demostració de la desigualtat de Schwarz
- Notes

Definició d'espai euclidià

Un *espai euclidià* és un espai afí **real** $(\mathbb{A}, V)^1$ dotat d'una **aplicació bilineal simètrica**

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

(dita *producte escalar* o *mètrica*) tal que

$$g(x, x) > 0 \text{ per a tot } x \in V - \{0\}$$

(aquesta condició l'expressem dient que g és *definida positiva*).²

Notem que per a tot $x \in V$ tenim $g(x, x) \geq 0$, i que

$$g(x, x) = 0 \text{ val si i només si } x = 0.$$

En lloc de $g(x, y)$ sovint escriurem $x \cdot y$, i x^2 en lloc de $x \cdot x$.

Matriu de la mètrica i càlcul del producte escalar

Si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ és una base de V , posarem

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j$$

i direm que $G = (g_{ij})$ és la *matriu de la mètrica g respecte de la base $\mathbf{e}$* .

Notem que en notació matricial podem escriure

$$G = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}$$

Siguin ara $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ les components dels vectors x i y respecte de $\mathbf{e}$, de forma que $x = \mathbf{e}\mathbf{x}^T$ i $y = \mathbf{e}\mathbf{y}^T$. Llavors, fixant-nos que també podem escriure $x = \mathbf{x}\mathbf{e}^T$, tenim

$$x \cdot y = (\mathbf{x}\mathbf{e}^T) \cdot (\mathbf{e}\mathbf{y}^T) = \mathbf{x}G\mathbf{y}^T.$$

En particular,

$$x^2 = \mathbf{x}G\mathbf{x}^T.$$

Construcció de productes escalars

Recíprocament, donada qualsevol matriu $G \in M_n(\mathbb{R})$, l'aplicació

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g(x, y) = \mathbf{x}G\mathbf{y}^T$$

és bilineal. Si a més G és simètrica, llavors g és simètrica (és a dir, $g(x, y) = g(y, x)$).

El problema de saber, en termes de G , si g és definida positiva, és més complicat i el resoldrem posteriorment (tanmateix, si g és definida positiva direm que G és definida positiva).

Exemple. Si $G = I_n$, llavors $g(x, y) = \mathbf{x}\mathbf{y}^T = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ i és clar que aquesta és definida positiva. Per tant, la matriu I_n és definida positiva.

Matriu de la mètrica en una altra base

Sigui $\mathbf{e}'$ una altra base de V i G' la matriu de la mètrica respecte de $\mathbf{e}'$. Si A és la matriu de $\mathbf{e}'$ respecte de $\mathbf{e}$, llavors $\mathbf{e}' = \mathbf{e}A$ i, per tant,

$$G' = \mathbf{e}'^T \cdot \mathbf{e}' = (A^T \mathbf{e}^T) \cdot (\mathbf{e}A) = A^T G A,$$

on en la darrera igualtat hem usat la bilinealitat del producte escalar. Així, doncs, l'expressió de G' en termes de G i A és

$$G' = A^T G A .$$

Remarca. En particular tenim que si A és invertible, llavors $A^T A$ és definida positiva. Més endavant veurem que tota matriu definida positiva té aquesta forma.

Exemple. Si posem $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, llavors $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ és definida positiva. Per tant

$$g(x, y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$$

és una mètrica.

Norma o longitud

Definim la *longitud*, o *norma*, d'un vector v , i posarem $|v|$ per denotar-la, per la fórmula

$$|v| = \sqrt{g(v, v)}.$$

Un vector u es diu *unitari* si $|u| = 1$.

- $|v| \geq 0$, i la igualtat val si i només si $v = 0$.
- $|\lambda v| = |\lambda| |v|$, qualssevol que siguin $\lambda \in \mathbb{R}$ i $v \in V$. En particular,

$$|-v| = |v|.$$

- Per a tot vector $v \neq 0$ hi ha exactament dos vectors unitaris proporcionals a v : $\pm \lambda v$, $\lambda = 1/|v|$ (és a dir, $\pm v/|v|$).

Exemple. La norma del vector $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ és

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Exemple. En el cas de la mètrica

$$g(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

$$|x| = \sqrt{2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2}.$$

Si $x \equiv (2, 1)$, llavors $|x| = 1$; si $y \equiv (1, 2)$, llavors $|y| = \sqrt{10}$.

Teorema (Desigualtat de Schwarz). Donats dos vectors v i w qualssevol, es compleix la desigualtat

$$|v \cdot w| \leq |v||w|.$$

La igualtat $|v \cdot w| = |v||w|$ es compleix si i només si v i w són linealment dependents.

Remarca. Si els vectors v i w són no nuls, la desigualtat de Schwarz equival a les desigualtats

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{|v||w|} \leq 1.$$

Remarca

La igualtat $-1 = v \cdot w / |v||w|$ (respectivament $1 = v \cdot w / |v||w|$) es compleix si i només si $w = \lambda v$, per a un cert $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$ (respectivament $\lambda > 0$).

Corol·lari (desigualtat triangular de la norma). *Siguin v i w vectors arbitraris. Llavors $|v + w| \leq |v| + |w|$.*

La igualtat $|v + w| = |v| + |w|$ és vàlida si i només si o bé un dels dos vectors és nul o bé existeix un nombre real $\lambda > 0$ tal que $w = \lambda v$.

Prova.
$$\begin{aligned} |v + w|^2 &= (v + w) \cdot (v + w) = |v|^2 + |w|^2 + 2v \cdot w \\ &\leq |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| = (|v| + |w|)^2, \end{aligned}$$

d'on la desigualtat enunciada en resulta immediatament.

Per tal que valgui la igualtat $|v+w|=|v|+|w|$, és clar, per la deducció precedent, que és necessari i suficient que $v \cdot w = |v||w|$. Ara bé, aquesta condició es compleix si i només si o bé un dels dos vectors és nul o bé si v i w són no nuls i proporcionals segons un factor positiu.

Remarca. Els dos primers passos de la prova anterior mostren que si $v, w \in V$, llavors

$$v \cdot w = \frac{1}{2}(|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2).$$

Teorema de Pitàgores. Si v i w són vectors, llavors

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2$$

si i només si $v \cdot w = 0$.

Més en general, si $v_1, \dots, v_r$ són vectors tals que $v_i \cdot v_j = 0$ per tot $i \neq j$, llavors

$$|v_1 + \dots + v_r|^2 = |v_1|^2 + \dots + |v_r|^2.$$

Prova. Si $v, w \in V$, llavors

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2 + 2v \cdot w$$

i d'aquí l'enunciat en resulta immediatament.

Definició. Quan $v \cdot w = 0$, diem que els vectors v i w són *ortogonals* o *perpendiculars*.

Distància

La *distància entre dos punts* P i Q , que denotarem $d(P, Q)$, es defineix per la fórmula

$$d(P, Q) = |Q - P| = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Exemple. La distància entre els punts $(a_1, \dots, a_n)$ i $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ és

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

■ De les propietats de la norma resulta que $d(P, Q) \geq 0$ i que $d(P, Q) = 0$ si i només si $P = Q$. També tenim que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

■ $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ (*desigualtat triangular de la distància*):

$$d(P, R) = |R - P| = |(R - Q) + (Q - P)| \leq |R - Q| + |Q - P| = d(P, Q) + d(Q, R).$$

Quan val la igualtat en la desigualtat triangular de la distància?

Si i només si $P = Q$, o $Q = R$ o, altrament, si P, Q, R són tres punts alineats distints amb $\sigma(P, Q, R) > 1$.

En efecte, per la desigualtat triangular (de la norma) la igualtat es dona si i només si o bé $Q - P = 0$ o $R - Q = 0$ (és a dir, $Q = P$ o $R = Q$), o, altrament, si $R - Q = \lambda(Q - P)$, per algun $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. En aquest darrer cas, $R = Q + \lambda(Q - P) = P + (1 + \lambda)(Q - P)$ i $\sigma(P, Q, R) = 1 + \lambda > 1$.

Recíprocament, si $R = P + \sigma(Q - P)$, amb $\sigma > 1$, llavors, posant $\lambda = \sigma - 1$, tenim $\lambda > 0$ i $R = P + (Q - P) + \lambda(Q - P) = Q + \lambda(Q - P)$, d'on es desprèn que $R - Q = \lambda(Q - P)$ i, per tant, $d(Q, R) = \lambda d(P, Q)$. Llavors $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, Q) + \lambda d(P, Q) = \sigma d(P, Q) = d(P, R)$, i això acaba la prova de l'afirmació.

Bases ortonormals

Direm que la base $\mathbf{e}$ és *ortonormal* quan $G = I_n$, és a dir, quan els vectors e_i són unitaris i dos a dos ortogonals:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Exemple. Els vectors

$$\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \epsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \epsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

són una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Remarca. Més endavant estudiarem un procediment per obtenir una base ortonormal a partir d'una base qualsevol de V .

Remarca. En el cas que $u_1, \dots, u_n$ sigui una base ortonormal de V ,

$$(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) \cdot (y_1 u_1 + \dots + y_n u_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Matrius ortogonals

Suposem que $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ i $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ són bases de V . Sigui A la matriu de $\mathbf{u}$ respecte de $\mathbf{e}$, és a dir, $\mathbf{u} = \mathbf{e}A$, i sigui G la matriu de la mètrica respecte de $\mathbf{e}$. Llavors sabem que $A^T G A$ és la matriu de la mètrica respecte de la base $\mathbf{u}$. Obtenim així que $\mathbf{u}$ és una base ortonormal de V si i només si

$$A^T G A = I_n.$$

En particular resulta que si $\mathbf{e}$ és una base ortonormal, llavors $\mathbf{u}$ és ortonormal si i només si

$$A^T A = I_n,$$

és a dir, si i només si A és invertible i $A^{-1} = A^T$.

Les matrius que compleixen aquesta propietat s'anomenen *matrius ortogonals*.

Remarca. Si A és una matriu ortogonal, llavors $\det(A)^2 = 1$. Per tant

$$\det(A) = \pm 1.$$

El grup O_n

Posarem O_n per denotar el conjunt de matrius ortogonals d'ordre n i O_n^+ per denotar el subconjunt de O_n format per les matrius ortogonals que tenen determinant 1. Remarquem que $O_1^+ = \{1\}$ i $O_1 = \{\pm 1\}$.

- Si A i B són matrius ortogonals, llavors AB també ho és, ja que $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = I_n$.
- Si A és ortogonal, llavors A^{-1} també ho és, ja que $(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A^{-1})^{-1} A^{-1} = AA^{-1} = I_n$.

Atès que I_n és clarament ortogonal, tenim que O_n és un grup amb el producte de matrius. Direm que O_n és el *grup ortogonal* d'ordre n .

De les propietats dels determinants es dedueix fàcilment que O_n^+ és un subgrup de O_n : és clar que $I_n \in O_n^+$, i si $A, B \in O_n^+$, llavors de

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \text{ i } \det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1$$

resulta que $A^{-1}, AB \in O_n^+$. Direm que O_n^+ és el grup *ortogonal especial d'ordre n* (també es denota SO_n).

Remarques

- La matriu $J_n = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$ és ortogonal i $\det(J_n) = -1$
- $J_n \cdot O_n^+ = \{J_n A | A \in O_n^+\}$ és el subconjunt O_n^- de O_n format per les matrius ortogonals el determinant de les quals és -1 .
- $O_n = O_n^+ \sqcup O_n^-$. Remarquem que $\{I_n, J_n\}$ és un subgrup de O_n , ja que $J_n^2 = I_n$.
- O_n^+ és el nucli de l'homomorfisme $\det : O_n \rightarrow \{\pm 1\}$.
- O_n^+ és un subgrup normal de O_n .
- O_n/O_n^+ és isomorf al grup $\{I_n, J_n\} \simeq \{\pm 1\}$.

Definició. Una referència $[O; \mathbf{u}]$ es diu que és *rectangular* si $\mathbf{u}$ és orto-normal, i en aquest cas diem que les corresponents coordenades són *cartesianes rectangulars*.

El grup O_2

Una matriu $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ és ortogonal si i només si

$$a^2 + b^2 = 1, ac + bd = 0 \text{ i } c^2 + d^2 = 1.$$

Les solucions de l'equació $a^2 + b^2 = 1$ estan en correspondència bijectiva amb els $\alpha \in [0, 2\pi)$, segons les relacions $a = \cos(\alpha)$, $b = \sin(\alpha)$. L'equació $ac + bd = 0$ ens dóna $c = -\lambda b$ i $d = \lambda a$, on $\lambda \in \mathbb{R}$, i amb l'equació $c^2 + d^2 = 1$ obtenim $\lambda^2 = 1$. Fent $\lambda = 1$, $A = \rho(\alpha) \in O_2^+$, on

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

mentre que si fem $\lambda = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \rho(\alpha)J_2 \in O_2^-$$

Això determina l'estructura de O_2 . D'una banda $\rho(\alpha)\rho(\beta) = \rho(\alpha + \beta)$, on la suma $\alpha + \beta$ s'ha d'efectuar mòdul 2π (en particular tenim que O_2^+ és commutatiu). D'altra banda,

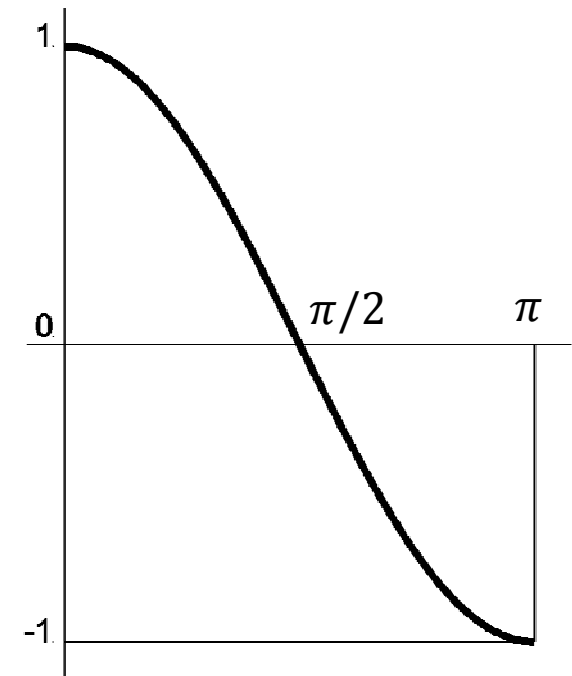
$$\begin{aligned}
 J_2 \rho(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & -\cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \rho(-\alpha) J_2 = \rho(\bar{\alpha}) J_2,
 \end{aligned}$$

on posem $\bar{\alpha} = 2\pi - \alpha$ si $\alpha > 0$ i $\bar{0} = 0$.

	$\rho(\beta)$	$\rho(\beta)J_2$
$\rho(\alpha)$	$\rho(\alpha + \beta)$	$\rho(\alpha + \beta)J_2$
$\rho(\alpha)J_2$	$\rho(\alpha - \beta)J_2$	$\rho(\alpha - \beta)$

Angles: definició i càlcul

La funció $\cos(x)$. La gràfica de $\cos(x)$ entre $x = 0$ i $x = \pi$ és estrictament decreixent, amb $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ i $\cos(\pi) = -1$. Així, doncs, per a tot valor $c \in [-1, 1]$ existeix un únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $c = \cos(\alpha)$. Posarem $\alpha = \arccos(c)$. En particular tenim $\arccos(0) = \pi/2$, $\arccos(1) = 0$, $\arccos(-1) = \pi$.



Angles. Les desigualtats $-1 \leq \frac{v \cdot w}{|v||w|} \leq 1$

ens mostren que si v i w són dos vectors no nuls, llavors existeix un únic nombre real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{|v||w|}.$$

Diem que α és l'**angle** (expressat en radians) determinat pels vectors v i w , i posarem $\alpha(v, w)$, o $\widehat{vw}$, per denotar-lo.

Exemple. Angle α entre els vectors $(a_1, \dots, a_n)$ i $(b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}}.$$

Remarca. L'expressió d'un angle en graus sexagesimals es farà amb la convenció habitual que $180^\circ = \pi$ rad.

Així, si α és l'angle entre els vectors $(1, 1, -2)$ i $(2, -1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, llavors $\cos \alpha = -1/6$ i $\alpha = 1,7382444 \text{ rad} = 99^\circ 35' 38,64''$.

Definició. Si P, Q i R són punts, $Q, R \neq P$, posarem $\widehat{QPR}$ per denotar l'angle $\alpha(Q - P, R - P)$ determinat pels vectors $Q - P$ i $R - P$.

Propietats dels angles

- $\alpha(v, w) = \alpha(w, v)$ per la simetria del producte escalar.
- Si $\lambda > 0$, llavors $\alpha(\lambda v, w) = \alpha(v, w)$.
- Siguin u i v vectors linealment independents i suposem que $|u| = |v|$.
Llavors $\alpha(u, u + v) = \alpha(u + v, v)$ i $\alpha(u, u - v) = \alpha(v - u, v)$.
- Donats vectors v i w no nuls, $\alpha(-v, w) = \pi - \alpha(v, w)$ (direm que els angles $\alpha(-v, w)$ i $\alpha(v, w)$ són *suplementaris*).
- Donats vectors v i w no nuls, $\alpha(v, w) = 0$ (respectivament $\alpha(v, w) = \pi$) si i només si existeix un nombre real $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) tal que $w = \lambda v$.
- $\alpha(v, w) = \pi/2$ si i només si $v \cdot w = 0$ (és a dir, si i només si v i w són perpendiculars).

Proposició (Additivitat dels angles). *Siguin $x, y \in V$ vectors linealment independents, s i t nombres reals positius, i $z = sx + ty$. Siguin $\alpha = \alpha(x, z)$, $\beta = \alpha(z, y)$ i $\gamma = \alpha(x, y)$. Llavors $\gamma = \alpha + \beta$.*

Prova. Podem suposar que x i y són unitaris. Posant $\ell = |z|$, tenim

$$x \cdot y = \cos(\gamma) ,$$

$$\ell \cos(\alpha) = s + t \cos(\gamma), \ell \cos(\beta) = s \cos(\gamma) + t ,$$

$$\ell^2 = s^2 + t^2 + 2st \cos(\gamma)$$

D'aquestes igualtats i

$$\sin(u) = +\sqrt{1 - \cos^2(u)}$$

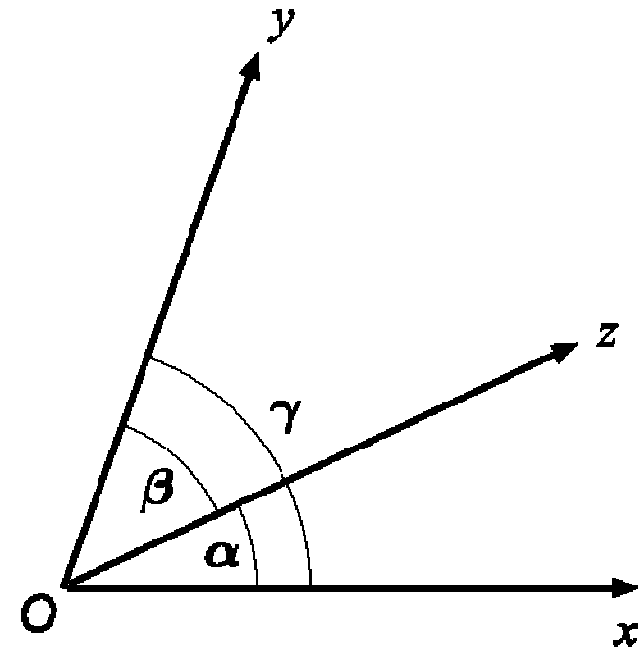
se n'extreu que

$$\ell \sin(\alpha) = t \sin(\gamma), \ell \sin(\beta) = s \sin(\gamma).$$

Ara amb la fórmula

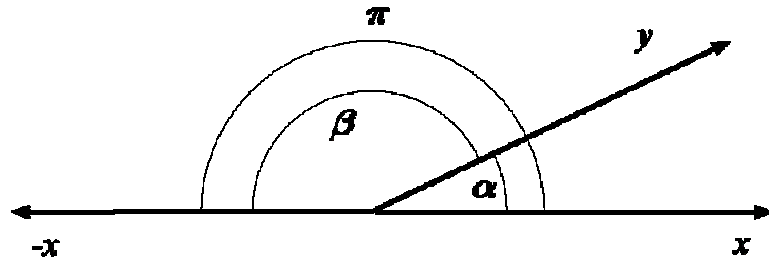
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

s'obté



$$\ell^2 \cos(\alpha + \beta) = (s + t \cos(\gamma))(s \cos(\gamma) + t) - st \sin^2(\gamma) = \ell^2 \cos(\gamma),$$

d'on $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma)$.



Que $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma)$ s'obté per un càlcul similar, usant la fórmula

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

Proposició. Siguin A , B i C tres punts diferents i posem $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ i $\gamma = \widehat{BCA}$.

Lavors $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Prova. Si posem

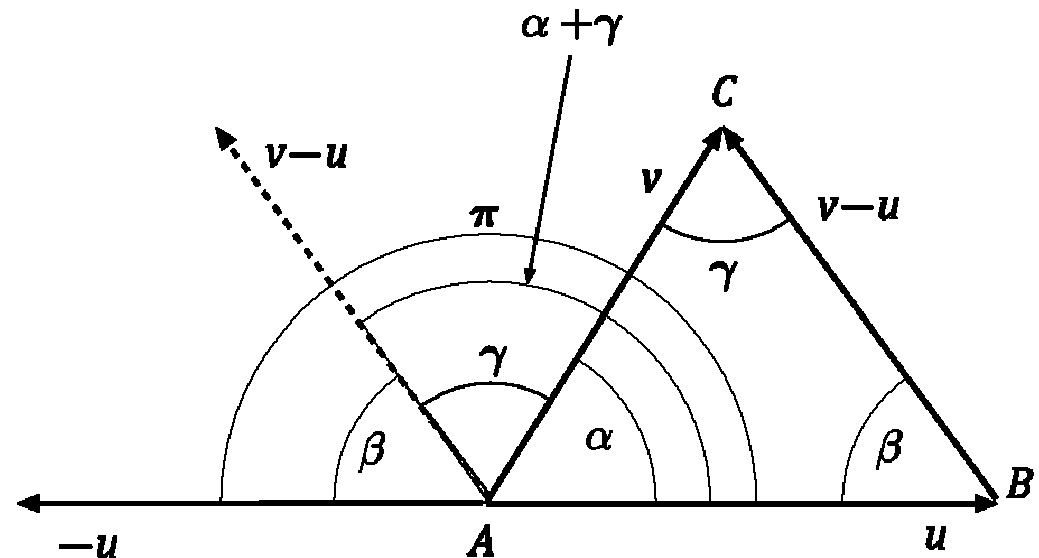
$$u = B - A \text{ i } v = C - A,$$

tenim

$$\alpha = \widehat{BAC} = \alpha(u, v),$$

$$\beta = \widehat{ABC} = \alpha(v - u, -u)$$

$$\gamma = \widehat{BCA} = \alpha(-v, u - v) = \alpha(v, v - u).$$



Com que

$$\alpha + \gamma = \alpha(u, v) + \alpha(v, v - u) = \alpha(u, v - u),$$

finalment tenim

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha(u, v - u) + \alpha(v - u, -u) = \alpha(u, -u) = \pi.$$

Triangles: recuperant la terminologia. Una terna $\{A, B, C\}$ no ordenada de punts diferents determina un *triangle*, que el denotarem $T = \Delta ABC$, o simplement ABC . Els *vèrtexs* de T són els punts A , B i C ; els *costats* de T són les rectes BC , CA i AB ,^{*} dels quals direm que són *oposats* als vèrtexs A , B i C , respectivament; els *angles* de T són els angles α , β i γ definits a la proposició anterior i sovint posarem $\hat{A}$, $\hat{B}$ i $\hat{C}$ per denotar-los; les *longituds* dels costats de T són els nombres $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$.

Un triangle ABC es diu que és *rectangle* si té un angle igual a $\pi/2$ (*angle recte*). Si suposem que l'angle recte és $\hat{A}$, llavors $\hat{B} + \hat{C} = \pi/2$ (direm que $\hat{B}$ i $\hat{C}$ són *complementaris*), la qual cosa en particular ens diu que els an-

^{*} Segons el context, també es diu que els costats són els segments $[BC]$, $[AC]$ i $[BA]$.

gles $\hat{B}$ i $\hat{C}$ són **aguts** (és a dir, inferiors a $\pi/2$). Direm que $a = d(B, C)$ és la **hipotenusa** del triangle rectangle i que $b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$ són els **catets**. Notem que el teorema de Pitàgores (per a vectors) ens diu que $a^2 = b^2 + c^2$, que és una forma més familiar.

Una demostració de la desigualtat de Schwarz (v. pàg. 7)

Si $w = 0$, la desigualtat que volem establir és una igualtat (els dos membres valen 0) i és clar que v i w són linealment dependents. Podem, doncs, suposar que w és no nul.

Atès que g és definida positiva, per a tot $t \in \mathbb{R}$ tenim la desigualtat

$$g(v + tw, v + tw) \geq 0.$$

Tenint en compte que g és bilineal i simètrica, aquesta desigualtat és equivalent a la desigualtat

$$|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2 t^2 \geq 0.$$

Com que $t \in \mathbb{R}$ és arbitrari, resulta que $(v \cdot w)^2 - |v|^2 |w|^2 \leq 0$, [*]

car si l'expressió de l'esquerra fos positiva, llavors el polinomi real

$$|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2t^2$$

tindria *dues* arrels reals distintes (recordem que $|w| \neq 0$), i per tant prendria valors positius i valors negatius. Això prova la desigualtat $|v \cdot w| \leq |v||w|$, ja que aquesta i $[*]$ són clarament equivalents.

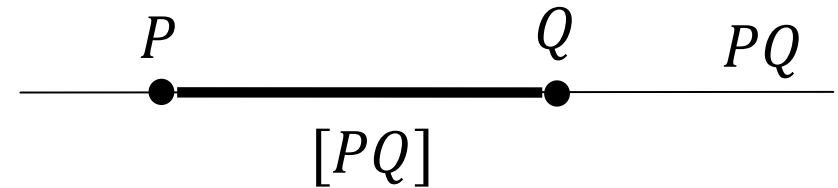
Ara, si es compleix la igualtat $|v \cdot w| = |v||w|$, llavors existeix un $t \in \mathbb{R}$ tal que $|v|^2 + 2(v \cdot w)t + |w|^2t^2 = 0$, és a dir, tal que $g(v + tw, v + tw) = 0$ i, per tant, tal que $v + tw = 0$, amb la qual cosa v i w són linealment dependents.

Recíprocament, si v i w són linealment dependents, llavors existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda w$ (recordem que $w \neq 0$) i és immediat verificar que $|v \cdot w| = |v||w|$.

Notes

1. Els espais afins reals gaudeixen de propietats especials derivades de les característiques particulars del cos $\mathbb{R}$.

Per exemple, donats dos punts $P, Q \in \mathbb{A}$,



es defineix el **segment** d'extrems els

punts P i Q , i es denota $[P, Q]$, o $[PQ]$, com el conjunt dels punts

$$P + \lambda(Q - P) = (1 - \lambda)P + \lambda Q \text{ tals que } \lambda \in [0, 1].$$

Més endavant veurem altres propietats i construccions, com per exemple la noció de poliedre o la d'orientació.

2. En coordenades cartesianes usuals, la distància s d'un punt (x, y) a l'origen ve donada per $s^2 = x^2 + y^2$. En coordenades afins (u, v) qualsevol té la forma $s^2 = au^2 + 2buv + cv^2$, que és una expressió bilineal en (u, v) , positiva si $(u, v) \neq (0, 0)$.