

Geometria / GA

7. Afinitats

© S. Xambó

- Definició d'aplicació afí
- Aplicació lineal associada
- Composició d'aplicacions afins
- Transformacions afins
- Determinació geomètrica de les aplicacions afins
- Expressió en coordenades
- Afinitats. Translacions i homotècies
- Punts fixos d'una afinitat
 - Exemple: afinitats de $\mathbb{A}^1$
- Conservació de la raó simple
- Imatge directa i inversa de les varietats lineal
- Grup afí
- Notes

Definició d'aplicació afí

Siguin $(\mathbb{A}, V)$ i $(\mathbb{A}', V')$ espais afins. Donats punts $P \in \mathbb{A}$ i $P' \in \mathbb{A}'$, i una aplicació lineal $f: V \rightarrow V'$, definim $f_{P,P'}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ per la formula

$$f_{P,P'}(X) = P' + f(X - P).$$



El transformat del punt $X \in \mathbb{A}$ per l'aplicació $f_{P,P'}$ és el punt $X' \in \mathbb{A}'$ definit per $X' = P' + f(u)$, $u = X - P$.

D'una aplicació $\alpha: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ es diu que és una **aplicació afí** si existeixen $P \in \mathbb{A}$, $P' \in \mathbb{A}'$ i $f \in L(V, V')$ tals que $\alpha = f_{P,P'}$.

Remarca. Per a qualssevol $X, Y \in \mathbb{A}$,

$$\alpha(X) - \alpha(Y) = f(X - Y),$$

ja que

$$\alpha(X) - \alpha(Y) = (P' + f(X - P)) - (P' + f(Y - P)) = f(X - Y).$$

Lema. Si $Q \in \mathbb{A}$, $Q' \in \mathbb{A}'$ i $g \in L(V, V')$, llavors

$$g_{Q,Q'} = f_{P,P'} \text{ si i només si } g = f \text{ i } Q' = P' + f(Q - P)$$

Prova. Si $\mathbf{u} \in V$ i $O \in \mathbb{A}$, I suposem que $g_{Q,Q'} = f_{P,P'}$, llavors

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}) &= g((O + \mathbf{u}) - O) = g_{Q,Q'}(O + \mathbf{u}) - g_{Q,Q'}(O) \\ &= f_{P,P'}(O + \mathbf{u}) - f_{P,P'}(O) = f((O + \mathbf{u}) - O) = f(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

d'on $f = g$.

Per altra banda,

$$Q' - P' = g_{Q,Q'}(Q) - f_{P,P'}(P) = f_{Q,Q'}(Q) - f_{P,P'}(P) = f(Q - P),$$

d'on $Q' = P' + f(Q - P)$. Amb això hem vist que les condicions són necessàries.

Les condicions són també suficients. En efecte, si

$$g = f \text{ i } Q' = P' + f(Q - P),$$

llavors

$$\begin{aligned} g_{Q,Q'}(X) &= Q' + g(X - Q) = Q' + f(X - Q) \\ &= Q' + f((X - P) - (Q - P)) \\ &= Q' - f(Q - P) + f(X - P) \\ &= P' + f(X - P) = f_{P,P'}(X) \end{aligned}$$

d'on $g_{Q,Q'} = f_{P,P'}$.

□

Aplicació lineal associada

Com que l'aplicació afí α determina f unívocament, direm que f és l'*aplicació lineal associada de α* , i posarem $\tilde{\alpha}$ per denotar-la.

Remarca. Una aplicació afí α queda determinada per la imatge $P' = \alpha(P)$ d'un punt qualsevol i per l'aplicació lineal associada $\tilde{\alpha}$ segons la formula $\alpha(X) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(X - P)$.

Remarca. Notem que α és injectiva (exhaustiva) si i només si $\tilde{\alpha}$ és injectiva (exhaustiva).

Composició d'aplicacions afins

Siguin

$$\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}' \text{ i } \beta : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$$

aplicacions afins. Llavors la composició

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}''$$

és una aplicació afí i

$$\widetilde{\beta \circ \alpha} = \tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha}.$$

En efecte,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(X) &= \beta(\alpha(X)) = \beta(\alpha(P) + \tilde{\alpha}(X - P)) \\ &= \beta(\alpha(P)) + \tilde{\beta}(\tilde{\alpha}(X - P)) \\ &= (\beta \circ \alpha)(P) + (\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha})(X - P). \end{aligned}$$

Transformacions afins

De les aplicacions afins bijectives en direm *transformacions afins*.

Exemple. Podem mirar una equació paramètrica vectorial d'una varietat lineal L ,

$$X = P + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r ,$$

com una aplicació $K^r \rightarrow L$. Com que aquesta aplicació és afí i bijectiva, és una transformació afí.

Inversa d'una transformació afí. La inversa α^{-1} d'una transformació afí α és una transformació afí, i

$$\widetilde{\alpha^{-1}} = \tilde{\alpha}^{-1}.$$

En efecte, si $X, P \in \mathbb{A}$ i posem $X' = \alpha(X)$, $P' = \alpha(P)$, llavors

$$X' - P' = \tilde{\alpha}(X - P) \Leftrightarrow \alpha^{-1}(X') - \alpha^{-1}(P') = \tilde{\alpha}^{-1}(X' - P'),$$

i la conclusió és conseqüència del fet que X' i P' són punts arbitraris de $\mathbb{A}'$.

Determinació geomètrica de les aplicacions afins

Teorema

- Si $\mathcal{R} = [P_0, P_1, \dots, P_n]$ és una referència afí de l'espai afí $\mathbb{A}$ i $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ són punts arbitraris de l'espai $\mathbb{A}'$, *existeix una única aplicació afí $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ tal que $\alpha(P_i) = P'_i$ ($i = 0, \dots, n$).*
- *Aquesta aplicació és injectiva (exhaustiva) si i només si els punts $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ són independents (generen $\mathbb{A}'$).*
- *En particular, α és una transformació afí si i només si $[P'_0, P'_1, \dots, P'_n]$ és una referència de $\mathbb{A}'$.*

Prova. Si existeix α , i posem

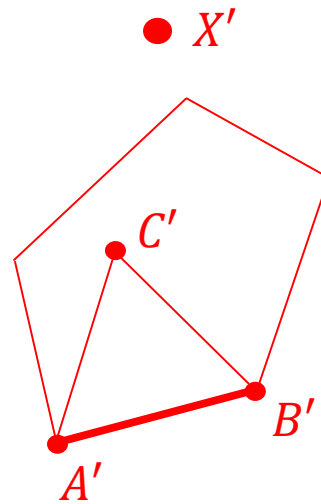
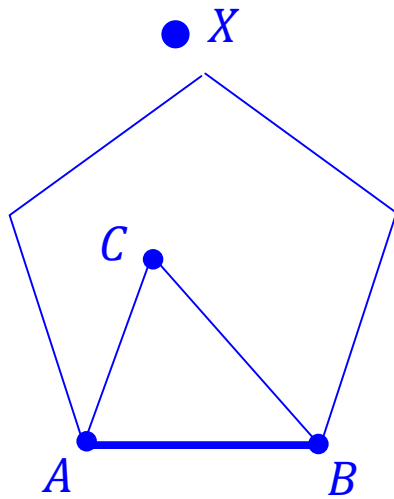
$$\mathbf{e}_i = P_i - P_0, \quad \mathbf{e}'_i = P'_i - P'_0 \quad (i = 1, \dots, n), \text{ llavors}$$

$$\mathbf{e}'_i = P'_i - P'_0 = \alpha(P_i) - \alpha(P_0) = \tilde{\alpha}(P_i - P_0) = \tilde{\alpha}(\mathbf{e}_i),$$

d'on $\alpha = f_{P_0, P'_0}$, amb f l'única aplicació lineal $V \rightarrow V'$ tal que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$.

Inversament, si definim α així, llavors és clar que $\alpha(P_i) = P'_i$, $i = 0, \dots, n$.

Les altres afirmacions resulten del fet que f és injectiva (exhaustiva) si i només si els $\mathbf{e}'_i$ són linealment independents (formen una base de V').



II·lustració gràfica

Aquest gràfic correspon l'afinitat α tal que

$$\alpha(A) = A', \quad \alpha(B) = B' \quad \text{i} \quad \alpha(C) = C'.$$

Aquesta afinitat transforma el punt X en el punt X' i el pentàgon en blau en el pentàgon en vermell.

Adonem-nos que si $X = A + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$, on $\mathbf{u} = B - A$ i $\mathbf{v} = C - A$, llavors $X' = A' + \lambda \mathbf{u}' + \mu \mathbf{v}'$, on $\mathbf{u}' = B' - A'$ i $\mathbf{v}' = C' - A'$.

Expressió en coordenades

Siguin $\mathcal{R} = [O, e_1, \dots, e_n]$ i $\mathcal{R}' = [O', e'_1, \dots, e'_{n'}]$ referències de $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}'$, respectivament. Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ són les $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt X , llavors les $\mathcal{R}'$ -coordenades $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n'})$ de $\alpha(X)$ venen donades per la fórmula

$$\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T,$$

on $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n'})$ són les $\mathcal{R}'$ -coordenades de $\alpha(O)$ i $A = (a_{ij})$ és la matriu de $\tilde{\alpha}$ respecte de les bases $\mathbf{e} \equiv e_1, \dots, e_n$ i $\mathbf{e}' \equiv e'_1, \dots, e'_{n'}$, és a dir,

$$\alpha(O) = O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T \text{ i } \tilde{\alpha}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}'A.$$

En efecte, d'una banda $\alpha(X) = O' + \mathbf{e}'\mathbf{x}'^T$, i de l'altra

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= \alpha(O + \mathbf{e}\mathbf{x}^T) = \alpha(O) + \tilde{\alpha}(\mathbf{e}\mathbf{x}^T) \\ &= O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \tilde{\alpha}(\mathbf{e})\mathbf{x}^T = O' + \mathbf{e}'\mathbf{p}^T + \mathbf{e}'A\mathbf{x}^T \\ &= O' + \mathbf{e}'(\mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T). \end{aligned}$$

□

Explícitament,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n'1} & \cdots & a_{n'n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n'} & a_{n'1} & \cdots & a_{n'n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Afinitats. Translacions i homotècies

Les *afinitats* són les *transformacions afins d'un espai afí en sí mateix*.

Translacions. Les translacions són les afinitats α tals que $\tilde{\alpha} = Id$.

En efecte, si $\tilde{\alpha} = Id$, llavors

$$\alpha(X) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(X - P) = X + (\alpha(P) - P) = t_{\mathbf{u}}(X),$$

$$\mathbf{u} = \alpha(P) - P.$$

Recíprocament, la translació $t_{\mathbf{u}}$ compleix

$$t_{\mathbf{u}}(X) = X + \mathbf{u} = P + \mathbf{u} + (X - P) = t_{\mathbf{u}}(P) + Id(X - P),$$

i és per tant una afinitat amb $\tilde{t}_{\mathbf{u}} = Id$.

Homotècies. Si $\lambda \in K - \{0\} = K^*$, l'*homotècia de centre el punt O i raó λ* es defineix per la fórmula

$$h_{O,\lambda}(X) = O + \lambda(X - O).$$

Com que l'aplicació $h_\lambda : V \rightarrow V$, $v \mapsto \lambda v$, és un automorfisme lineal de V (anomenat *homotècia lineal de raó λ*), $h_{O,\lambda}$ és una afinitat i $\widetilde{h_{O,\lambda}} = h_\lambda$. Notem que $h_{O,\lambda}(O) = O$ (és a dir, O és un punt fix de $h_{O,\lambda}$).

Un cas particular és $s_O = h_{O,-1}$, que actua de la manera següent:

$$s_O(X) = O - (X - O), \text{ o bé } s_O(O + x) = O - x.$$

Dierem que s_O és la simetria central de centre O .

Punts fixos d'una afinitat

Si α és una afinitat de $\mathbb{A}$, $\downarrow f = \tilde{\alpha}$, sigui

$$F_{\alpha} = \{X \in \mathbb{A} \mid \alpha(X) = X\},$$

és a dir, el conjunt de *punts fixos* de α .

Fixat un origen O , i posant $x = X - O$, $u = \alpha(O) - O$, la condició necessària i suficient per tal que X sigui fix per α és que

$$(Id - f)(x) = u,$$

ja que de

$$X = O + x \text{ i } \alpha(X) = \alpha(O + x) = \alpha(O) + f(x) = O + u + f(x)$$

inferim que X és fix si i només si $x = u + f(x)$.

En coordenades,

$$(I_n - A)\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T,$$

que per altra banda resulta directament de l'expressió de l'afinitat en coordenades, $\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}^T$.

En particular veiem que si $\det(I_n - A) \neq 0$, llavors existeix un únic punt fix.

Proposició. El conjunt F_α és no buit si i només si

$$\text{rang}(I_n - A) = \text{rang}(I_n - A|\mathbf{p}^T),$$

i si és no buit, aleshores és una varietat lineal amb

$$W(F_\alpha) = \ker(Id - \tilde{\alpha}).$$

En particular, la seva dimensió és $n - r$, on r és el rang de $Id - \tilde{\alpha}$ (o el rang de $I_n - A$).

Corol·lari. Si $\tilde{\alpha}$ no té el valor propi +1, llavors α té un únic punt fix.

Prova. Si q és el polinomi característica de A , llavors

$$\det(I_n - A) = q(1),$$

que és no nul si 1 no és valor propi de A .

Exemple (afinitats de $\mathbb{A}^1$). Una afinitat de $\mathbb{A}^1$ diferent de la identitat és una translació si no té punts fixos i una homotècia (de raó $\neq 1$) si té un punt fix.

En efecte, si α és una afinitat de $\mathbb{A}^1$, llavors

$$\tilde{\alpha} = h_{\lambda},$$

per algun scalar $\lambda \neq 0$. Si $\lambda \neq 1$, α té un únic punt fix i és per tant una homotècia. Altrament és una translació (sense punts fixos si no és la identitat).

Conservació de la raó simple

Les aplicacions afins α conserven la raó simple, en el sentit que es precisa a continuació.

Si $P, Q \in \mathbb{A}$ i $\alpha(P) \neq \alpha(Q)$, llavors

$$\sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(X)) = \sigma(P, Q, X)$$

per a tot punt $X \in PQ$.

En efecte, si $X \in PQ$, llavors

$$X = P + \sigma(Q - P), \quad \sigma = \sigma(P, Q, X)$$

d'on, aplicant α ,

$$\alpha(X) = \alpha(P) + \sigma(\alpha(Q) - \alpha(P))$$

i això demostra que

$$\sigma(\alpha(P), \alpha(Q), \alpha(X)) = \sigma.$$

Remarca. Si posem $M_\sigma(P, Q) = P + \sigma(Q - P)$, la proposició anterior mostra que

$$\alpha(M_\sigma(P, Q)) = M_\sigma(\alpha(P), \alpha(Q)).^1$$

Imatge directa i inversa de les varietats lineal

Imatge d'una varietat lineal. Si L és una varietat lineal, diguem $L = P + W$, i α és una aplicació afí, llavors

$$\alpha(L) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(W).$$

És a dir, $\alpha(L)$ és la varietat lineal que passa per $\alpha(P)$ amb espai director $\tilde{\alpha}(W)$. És immediat, doncs, que *les aplicacions afins α transformen varietats lineals paral·leles en varietats lineals paral·leles.*

Les afinitats α transformen varietats lineals en varietats lineals de la mateixa dimensió i es compleixen les relacions

$$\alpha(L \cap L') = \alpha(L) \cap \alpha(L'),$$

$$\alpha(L \vee L') = \alpha(L) \vee \alpha(L').$$

Imatge inversa d'una varietat lineal. Si L' és una varietat lineal de $\mathbb{A}'$ i $L = \alpha^{-1}(L')$ és un conjunt no buit, llavors L és una varietat lineal i el seu espai director és $\tilde{\alpha}^{-1}(W')$, on W' és l'espai director de L' .

En efecte, en ser L no buit, podem escollir un punt $P \in \mathbb{A}$ tal que $P' = \alpha(P) \in L'$. Llavors tenim $L' = P' + W'$ i si $X = P + x \in \mathbb{A}$ ($x \in V$), llavors

$$\alpha(X) = \alpha(P) + \tilde{\alpha}(x) = P' + \tilde{\alpha}(x),$$

de manera que

$$\alpha(X) \in L' \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(x) \in W' \Leftrightarrow x \in \tilde{\alpha}^{-1}(W'),$$

cosa que mostra que

$$\alpha^{-1}(L') = P + \tilde{\alpha}^{-1}(W').$$

Grup afí

El conjunt $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ de les afinitats de $\mathbb{A}$, amb l'operació de composició, és un grup. Direm que és el **grup afí** (o grup de les afinitats) de $\mathbb{A}$.

Les translacions $\mathcal{T}(A) = \{t_v | v \in V\}$ formen un subgrup de $\mathcal{G}(\mathbb{A})$, ja que $t_w \circ t_v = t_{w+v}$. A més, és un subgrup normal, ja que $\alpha \circ t_v \circ \alpha^{-1} = t_{\tilde{\alpha}(v)}$:

$$\alpha(t_v(X)) = \alpha(X + v) = \alpha(X) + \tilde{\alpha}(v) = t_{\tilde{\alpha}(v)}(\alpha(X)),$$

d'on $\alpha \circ t_v = t_{\tilde{\alpha}(v)} \circ \alpha$.

El conjunt $\mathcal{H}_O(\mathbb{A})$ de les homotècies de centre O és una subgrup de $\mathcal{G}(\mathbb{A})$.

Anàlogament, el conjunt $\mathcal{G}_O(\mathbb{A})$ de les afinitats que deixen O fix formen un subgrup de $\mathcal{G}(\mathbb{A})$. Atès que

$$\alpha \mathcal{G}_O(\mathbb{A}) \alpha^{-1} = \mathcal{G}_{\alpha(O)}(\mathbb{A}),$$

$\mathcal{G}_O(\mathbb{A})$ no és un subgrup normal.²

Notes

1. Una aplicació afí $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ transforma combinacions afins en combinacions afins. Més concretament, si $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{A}$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ amb $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, llavors

$$\alpha(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r) = \lambda_1 \alpha(A_1) + \dots + \lambda_r \alpha(A_r).$$

En efecte, com que

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r = O + \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - O)$$

per a qualsevol punt $O \in \mathbb{A}$, tenim:

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r) &= \alpha(O + \sum_{i=1}^r \lambda_i (A_i - O)) \\ &= \alpha(O) + \sum_{i=1}^r \lambda_i \tilde{\alpha}(A_i - O) = \alpha(O) + \sum_{i=1}^r \lambda_i (\alpha(A_i) - \alpha(O)) \\ &= \lambda_1 \alpha(A_1) + \dots + \lambda_r \alpha(A_r). \end{aligned}$$

Aquesta propietat generalitza la relació $\alpha(M_\sigma(P, Q)) = M_\sigma(\alpha(P), \alpha(Q))$, ja que $M_\sigma(P, Q) = P + \sigma(Q - P) = (1 - \sigma)P + \sigma Q$ i $M_\sigma(\alpha(P), \alpha(Q)) = \alpha(P) + \sigma(\alpha(Q) - \alpha(P)) = (1 - \sigma)\alpha(P) + \sigma\alpha(Q)$.

2. Representació de $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ com a $V \times GL(V)$. Si posem, donat $f \in GL(V)$, $f_O = f_{O,O}$ de manera que

$$f_O(X) = O + f(X - O),$$

llavors $f_O \in G_O(A)$ i l'aplicació $f \mapsto f_O$ és un isomorfisme $GL(V) \simeq G_O(A)$. Finalment l'aplicació

$$V \times GL(V) \rightarrow G(A) \text{ tal que } (v, f) \mapsto t_v \circ f_O$$

és una bijecció, essent l'aplicació inversa l'aplicació donada per

$$\alpha \mapsto (\alpha(O) - O, \tilde{\alpha}).$$

En termes de (v, f) , la composició d'afinitats compleix

$$(v', f') \circ (v, f) = (v' + f'(v), f' \circ f)$$