

Geometria / GA

6. Raó simple

© S. Xambó

- Definició de raó simple
- Càlcul de la raó simple
- Permutacions d'una raó simple
- Teorema de Tales
- Teorema de Ceva
 - Nota històrica
- Teorema de Menelau – i variacions

Definició de raó simple

Donats tres punts alineats P, Q, X amb $P \neq Q$, considerem la referència $\mathcal{R} = [P, Q]$ de la recta $L = PQ$. La coordenada de X respecte de $\mathcal{R}$ és l'escalar σ tal que

$$X = P + \sigma(Q - P).$$

Direm que σ és la *raó simple* de la terna P, Q, X i posarem $\sigma(P, Q, X)$ per designar-la, o simplement (PQX) .

Remarques

- $\sigma(P, Q, P) = 0$ i $\sigma(P, Q, Q) = 1$. Per tant $\sigma(P, Q, X) \neq 0, 1$ si els punts P, Q i X són diferents.
- Si $P = Q$, o si $P \neq Q$ i $X \notin PQ$, llavors $\sigma(P, Q, X)$ no està definida.

Càlcul de la raó simple

Siguin P i Q punts diferents i posem $L = PQ$.

Sigui $X \in L$.

Donada una referència afí $\mathcal{R} = [O; \mathbf{e}]$ de L ($\mathbf{e} \in V$), siguin p, q i x les $\mathcal{R}$ -coordenades de P, Q i X , és a dir,

$$P = O + p\mathbf{e}, Q = O + q\mathbf{e} \text{ i } X = O + x\mathbf{e}.$$

Llavors

$$Q - P = (q - p)\mathbf{e}, X - P = (x - p)\mathbf{e}, X - P = \frac{x - p}{q - p}(Q - P),$$

d'on

$$\sigma(P, Q, X) = \frac{x - p}{q - p}.$$

Permutacions d'una raó simple

Siguin P , Q i R tres punts alineats i diferents. Posem $\sigma = \sigma(P, Q, R)$.

Si $\mathcal{R}$ és una referència de la recta PQ , i p , q , r són les $\mathcal{R}$ -coordenades de P , Q , R , llavors $\sigma = (r - p)/(q - p)$. Ara tenim:

- $\sigma(Q, P, R) = \frac{r-q}{p-q} = \frac{(r-p)-(q-p)}{p-q} = 1 - \sigma.$
- $\sigma(Q, R, P) = \frac{p-q}{r-q} = \frac{1}{\sigma(Q,P,R)} = \frac{1}{1-\sigma}.$
- $\sigma(R, Q, P) = 1 - \sigma(Q, R, P) = 1 - \frac{1}{1-\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma-1}.$
- $\sigma(R, P, Q) = \frac{1}{\sigma(R,Q,P)} = \frac{\sigma-1}{\sigma}.$
- $\sigma(P, R, Q) = 1 - \sigma(R, P, Q) = \frac{1}{\sigma}.$

Remarca. La definició de raó simple no és més que una entre sis possibles. Com que no hi ha un criteri generalment acceptat, hem escollit la que ens resulta més còmoda.

Exemple. Si R és el punt mitjà dels punts P i Q , llavors $\sigma(P, Q, R) = \frac{1}{2}$. En aquest cas

$$\sigma = 1 - \sigma = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{1-\sigma} = 2,$$

$$\frac{\sigma}{\sigma-1} = \frac{\sigma-1}{\sigma} = -1,$$

de manera que les sis permutacions donen lloc només a tres valors: $1/2, 2, -1$.

Exemple. Si les arrels ξ i $\bar{\xi}$ de l'equació $\sigma^2 - \sigma + 1 = 0$ són del cos K , i $\sigma = \xi$, llavors

$$\sigma = \frac{1}{1-\sigma} = \frac{\sigma-1}{\sigma} = \bar{\xi},$$

$$1 - \sigma = \frac{\sigma}{\sigma-1} = \frac{1}{\sigma} = \xi,$$

de manera que en aquest cas les sis permutacions donen lloc a dos valors únicament.

Proposició. Si $\sigma \notin \left\{\frac{1}{2}, 2, -1, \xi, \bar{\xi}\right\}$, les permutacions de la raó simple són sis valors diferents.

Prova. Una repetició només es pot produir si entre les expressions

$$\sigma, 1 - \sigma, \frac{1}{1-\sigma}, \frac{\sigma}{1-\sigma}, \frac{\sigma-1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}$$

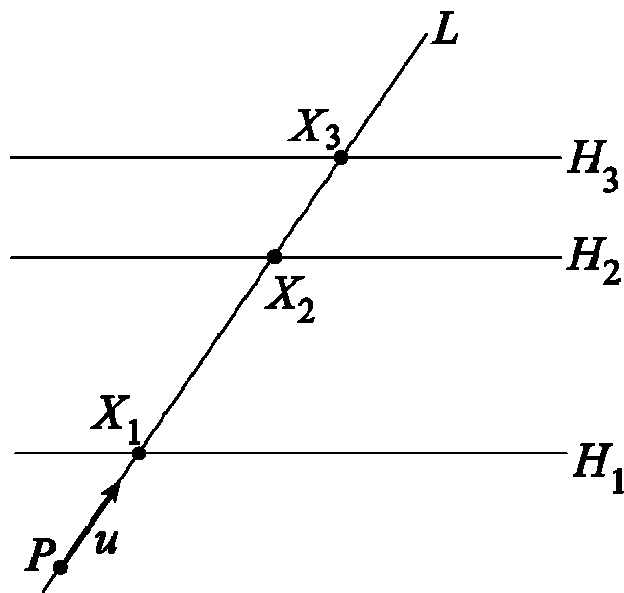
n'hi ha dues d'iguals. La conclusió es desprèn obtenint les solucions de les possibles equacions, i tenint en compte que $\sigma \neq 0, 1$:

$$\sigma = 1 - \sigma \Rightarrow \sigma = 1/2;$$

$$\sigma = 1/(1 - \sigma) \text{ o } \sigma = (\sigma - 1)/\sigma \Rightarrow \sigma \in \{\xi, \bar{\xi}\};$$

$$\sigma = \sigma/(\sigma - 1) \Rightarrow \sigma = 2;$$

$$\sigma = 1/\sigma \Rightarrow \sigma = -1.$$



Teorema (de Tales). *Siguin H_1, H_2 i H_3 hiperplans paral·lels, $H_1 \notin H_2$.*

Sigui L una recta no paral·lela als hiperplans.

Sigui $X_p = L \cap H_p$, $p = 1, 2, 3$.

Lavors $\sigma = \sigma(X_1, X_2, X_3)$ només depèn dels hiperplans H_1, H_2 i H_3 (σ és, per tant, independent de L).

Prova. Escollim una referència $[O; e_1, \dots, e_n]$ de manera que $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ sigui l'espai director dels hiperplans. En aquesta referència l'equació de W és $x_n = 0$ i la de H_p té la forma

$$x_n = k_p \quad (p = 1, 2, 3), \text{ i } k_1 \neq k_2 \text{ (altrament tindríem } H_1 = H_2).$$

La recta L vindrà donada per una equació paramètrica

$$x_j = p_j + \lambda u_j, \quad (j = 1, \dots, n), \text{ amb } u_n \neq 0$$

(altrament L seria paral·lela als tres hiperplans).

El paràmetre λ_p del punt X_p ($p = 1, 2, 3$) ha de complir que

$$p_n + \lambda_p u_n = k_p \Leftrightarrow \lambda_p = \frac{k_p - p_n}{u_n}.$$

Finalment, per la fórmula del càlcul de la raó simple, tenim

$$\sigma(X_1, X_2, X_3) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\frac{k_3 - p_n}{u_n} - \frac{k_1 - p_n}{u_n}}{\frac{k_2 - p_n}{u_n} - \frac{k_1 - p_n}{u_n}} = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1},$$

expressió que no depèn de L .

Exemple. Sigui ABC un triangle del pla afí, $X \notin \{A, B, C\}$ un punt, i suposem que AX , BX , CX tallen BC , CA , AB en els punts A' , B' , C' . Llavors

$$(A'AX) + (B'BX) + (C'CX) = 1.$$

Nota: En el gràfic, les coordenades són $[A, B, C]$ -coordenades.

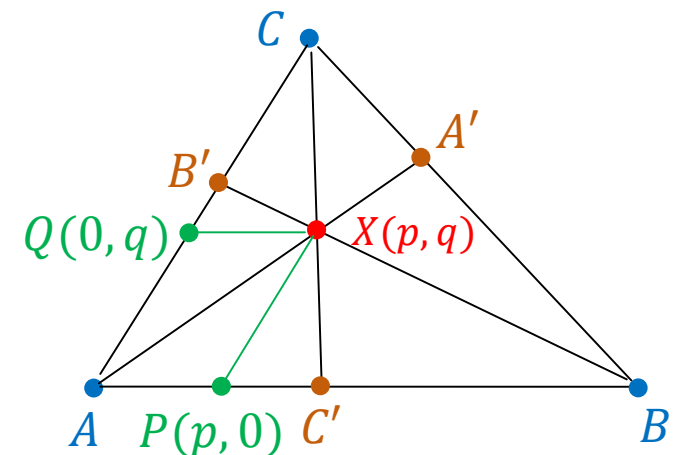
Prova. El teorema de Tales ens dona

$$(C'CX) = (ACQ) = q \text{ i } (B'BX) = (ABP) = p.$$

Per altra banda, si $A' = A + \lambda(X - A) \equiv (\lambda p, \lambda q)$, s'ha de complir

$$\lambda p + \lambda q = 1 \Rightarrow \lambda = 1/(p + q),$$

d'on $(AXA') = 1/(p + q)$ i $(A'AX) = 1 - 1/(AXA') = 1 - (p + q)$.

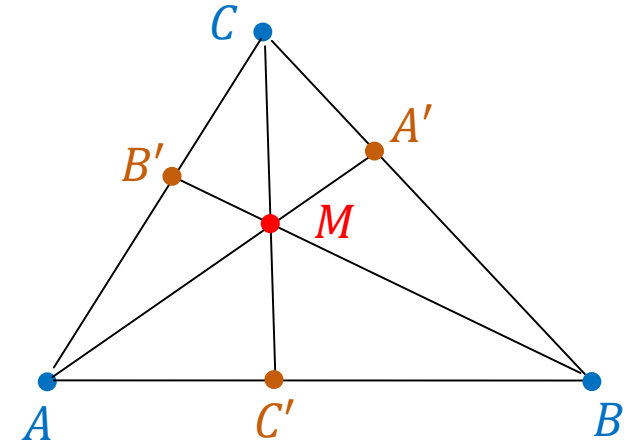


Teorema (Ceva). *Siguin A, B, C tres punts independents d'un pla afí. Siguin A', B', C' punts tals que*

$$A' \in BC, A' \neq B, C;$$

$$B' \in CA, B' \neq C, A;$$

$$C' \in AB, C' \neq A, B.$$



Llavors les rectes AA', BB', CC' són concurrents si i només si

$$\sigma(A', B, C) \cdot \sigma(B', C, A) \cdot \sigma(C', A, B) = -1.$$

Prova. En la referència afí $[A, B, C]$, $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Un punt $C' \in AB$ té la forma

$$C' = A + \gamma(B - A) \equiv (\gamma, 0), \quad \sigma(C', A, B) = (\gamma - 1)/\gamma.$$

Similarment,

$$B' = C + \beta(A - C) \equiv (0, 1 - \beta), \quad \sigma(B', C, A) = (\beta - 1)/\beta;$$

$$A' = B + \alpha(C - B) \equiv (1 - \alpha, \alpha), \quad \sigma(A', B, C) = (\alpha - 1)/\alpha.$$

■ Equació de AA' :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 - \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha x + (\alpha - 1)y = 0.$$

■ Equació de BB' :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y \\ -1 & 1-\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\beta)x + y + (\beta-1) = 0.$$

■ Equació de CC' :

$$\begin{vmatrix} x & y-1 \\ \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \gamma y - \gamma = 0.$$

■ Condió de concurrència:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-1 & 0 \\ 1-\beta & 1 & \beta-1 \\ 1 & \gamma & -\gamma \end{vmatrix} = 0$$

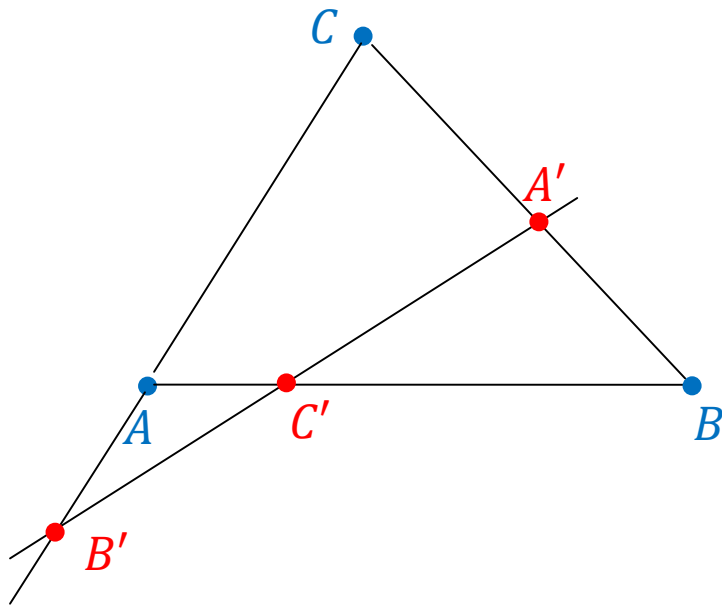
$$\Leftrightarrow \alpha(-\gamma\beta) + (1-\alpha)(-\gamma + \gamma\beta - \beta + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\gamma\beta\alpha + \gamma\beta + \gamma\alpha + \beta\alpha - (\gamma + \beta + \alpha) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma\beta\alpha - (\gamma\beta + \gamma\alpha + \beta\alpha) + (\gamma + \beta + \alpha) - 1 = -\gamma\beta\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\beta-1}{\beta} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} = -1.$$

Nota històrica. Giovanni Ceva va demostrar el teorema que avui porta el seu nom al llibre *De lineis rectis se invicem secantibus: statica constructio* (Milà, 1678). Però, quatre anys abans, **José Zaragozà**, matemàtic nascut a Castelló, l'havia demostrat a *Geometria Magna in Minimis* (Toledo, 1674). Ambdós autors empraren el «mètode baricèntric», però, mentre Ceva es fonamentà en la física, Zaragozà només feu servir la geometria d'Euclides ([Comunicació d'Eduard Recasens, 27.9.06](#)).



Teorema (de Menelau – i variacions)

Siguin A, B, C tres punts independents d'un pla afí. Siguin A', B', C' punts tals que

$$A' \in BC, A' \neq B, C;$$

$$B' \in CA, B' \neq C, A;$$

$$C' \in AB, C' \neq A, B.$$

Llavors els punts A', B', C' estan alineats si i només si

$$\sigma(A', B, C) \cdot \sigma(B', C, A) \cdot \sigma(C', A, B) = 1$$

Prova. Usant les mateixes notacions que en el teorema de Ceva, la condició per tal que

$$A'(1 - \alpha, \alpha), B'(0, 1 - \beta) \text{ i } C'(\gamma, 0)$$

estiguin alineats és que $A' - C'$ i $B' - C'$ siguin linealment dependents, és a dir,

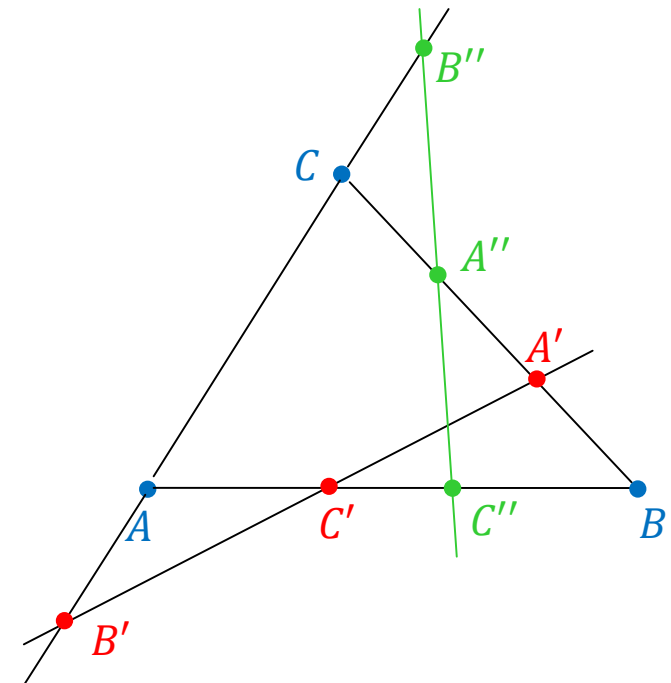
$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha - \gamma & \alpha \\ -\gamma & 1 - \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0.$$

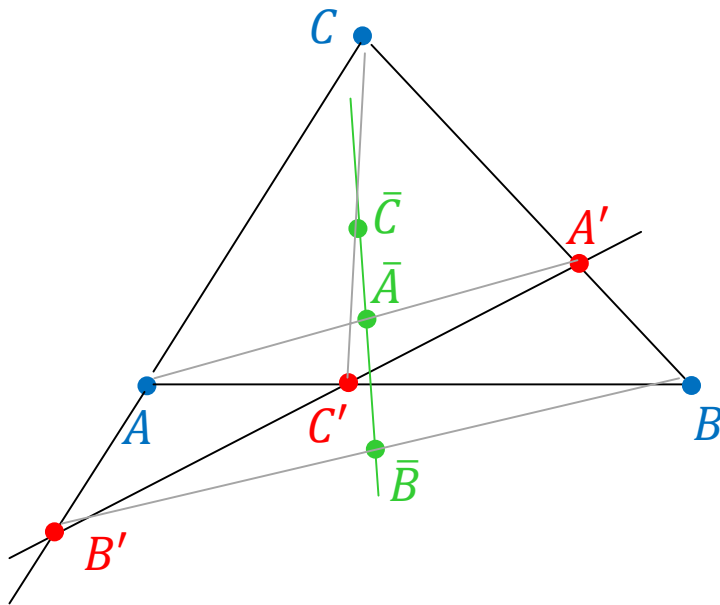
Però la darrera relació equival a $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = \alpha\beta\gamma$, i això estableix l'enunciat.

Remarca. La condició

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = \alpha\beta\gamma$$

es transforma en ella mateixa fent la substitució $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$, $\beta \rightarrow 1 - \beta$, $\gamma \rightarrow 1 - \gamma$. Com que els punts $A'' \in BC$, $B'' \in CA$, $C'' \in AB$ corresponents a $1 - \alpha$, $1 - \beta$, $1 - \gamma$ són els simètrics de A' , B' , C' respecte dels punts mitjans de BC , CA , AB , respectivament, en resulta que si A' , B' , C' estan alineats, aleshores A'' , B'' , C'' també ho estan.





Els punts mitjans $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ de AA' , BB' , CC' també estan alineats si A' , B' , C' ho estan.

La darrera afirmació resulta del càlcul següent:

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{2}(1 - \alpha, \alpha); \bar{B} \equiv \frac{1}{2}(1, 1 - \beta); \bar{C} \equiv \frac{1}{2}(\gamma, 1);$$

$$\bar{B} - \bar{A} \equiv \frac{1}{2}(\alpha, 1 - \alpha - \beta);$$

$$\bar{C} - \bar{A} \equiv \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - 1, 1 - \alpha);$$

$$\det(\bar{B} - \bar{A}, \bar{C} - \bar{A}) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) + 1 = 0.$$

Finalment notem que pel teorema de Menelau la darrera condició es compleix si (i només si) A' , B' , C' estan alineats.

Exercici. Amb les notacions de la darrera remarca, mostreu que

$\bar{A}$ està alineat amb els punts mitjans de AB' i AC' ;

$\bar{B}$ està alineat amb els punts mitjans de AB' i $B'C'$;

$\bar{C}$ està alineat amb els punts mitjans de $B'C'$ i AC' .