

Geometria / GA

5. Equacions cartesianes de les varietats lineals

© S. Xambó

- Equacions cartesianes d'una varietat lineal
- Exemple: equacions cartesianes de les rectes
- Exemple: hiperplans
- Exemple: rectes del pla
- Exemples en dimensió 3
- Exemple: equacions cartesianes d'un pla de $\mathbb{A}^4$

Teorema. Donat un sistema d'equacions lineals *compatible* de rang r

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m = 0 \end{array} \right\} \quad [*]$$

els punts les coordenades dels quals (en una referència $\mathcal{R}$) són solució del sistema formen una varietat lineal L de dimensió $n - r$. A més, l'espai director d'aquesta varietat està format pels vectors les components dels quals són solució del corresponent sistema homogeni

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} \quad [**]$$

Remarca. Diem que L és la *varietat lineal determinada pel sistema* $[*]$.

Prova. Les solucions del sistema $[**]$ formen un subespai vectorial W de K^n de dimensió $k = n - r$, i les solucions $\mathbf{x}$ de $[*]$ tenen la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{w}_k ,$$

on $\mathbf{p}$ és una solució particular de $[*]$ i $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ una base de W (Teorema de Rouché–Frobenius). Els punts que corresponen a aquestes solucions tenen la forma

$$X = O + \mathbf{e}x^T = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T + \lambda_1 \mathbf{e}\mathbf{w}_1^T + \dots + \lambda_k \mathbf{e}\mathbf{w}_k^T,$$

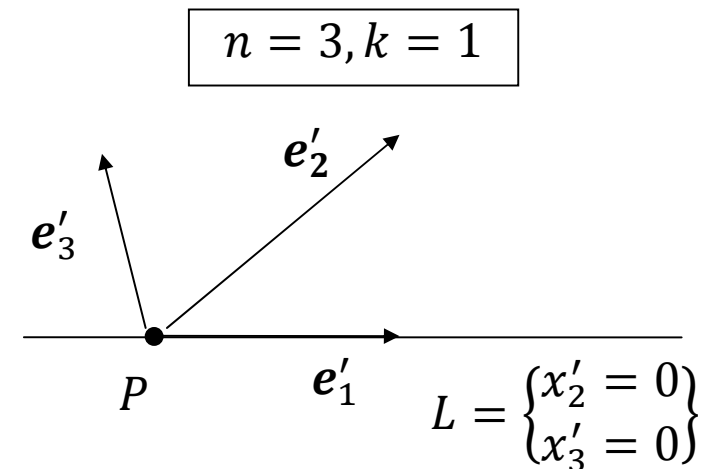
i això prova que formen la varietat lineal $P + W$, amb $P = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T$ i

$$W = \langle \mathbf{e}\mathbf{w}_1^T, \dots, \mathbf{e}\mathbf{w}_k^T \rangle.$$

Remarca. Tota varietat lineal L de dimensió k ve determinada per un sistema de rang $r = n - k$: en una referència $\mathcal{R}' = \{P; \mathbf{e}'\}$ amb origen un punt P de L i de manera que els seus primers k eixos $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_k$ formen un sistema de vectors directors de L , és clar que les r equacions

$$x'_{k+1} = \dots = x'_n = 0$$

determinen L , ja que els punts de L tenen la forma $P + \lambda_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{e}'_k$, amb $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ arbitraris. Ara l'afirmació és conseqüència de les fórmules que donen el canvi de $\mathcal{R}'$ -coordenades a $\mathcal{R}$ -coordenades. En el cas de la figura obtindríem $\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \beta_j = 0, j = 2, 3$.



Exemple: equacions cartesianes d'una recta

Les relacions

$$x_i = a_i + \lambda(b_i - a_i), \lambda \in K,$$

són equacions paramètriques de la recta que passa pels punts de coordenades $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Eliminant λ , s'obté el sistema d'equacions cartesianes

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n},$$

del qual se'n sol dir que són *equacions cartesianes de la recta en forma contínua*, o, per abús de llenguatge, una *equació contínua de la recta*.

Remarca. Convé observar que si $a_i = b_i$ per algun i , llavors $x_i = a_i$ per a tot punt de la recta, de manera que si un dels denominadors de l'equació contínua és 0, això s'ha d'interpretar com l'anul·lació del corresponent numerador (i no com una divisió per 0).

Remarca. Una equació contínua

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{v_n}$$

d'una recta L realment equival a les $\binom{n}{2}$ equacions

$$\frac{x_i - a_i}{v_i} = \frac{x_j - a_j}{v_j}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Una recta, però, ve donada per $n - 1$ equacions independents, de manera que sobren equacions si $n > 2$. Afortunadament és fàcil seleccionar $n - 1$ equacions independents: si $v_k \neq 0$ (cosa que és certa per algun k), llavors podem usar les equacions

$$\frac{x_i - a_i}{v_i} = \frac{x_k - a_k}{v_k}, \quad i \neq k.$$

Com que aquestes $n - 1$ equacions són independents, i els punts de L les satisfan, efectivament determinen L .

Hiperplans

L'equació

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad [*]$$

representa un hiperplà H si $a_k \neq 0$ per algun k . En aquest cas és fàcil obtenir un sistema de vectors directors. Per exemple, si $a_1 \neq 0$, llavors els vectors

$$(-a_2, a_1, 0, \dots, 0), \dots, (-a_n, 0, \dots, 0, a_1)$$

són de l'espai director de H i linealment independents, de manera que formen un sistema de vectors directors de H .

Exemple. L'hiperplà que té per equació

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

($a_1, \dots, a_n$ escalars **no nuls**) coincideix amb el que passa pels punts

$$(a_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, a_n).$$

Condició de paral·lelisme per hiperplans

L'hiperplà $[*]$ i l'hiperplà

$$a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b'$$

són paral·lels si i només si

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ a'_1 & \dots & a'_n \end{pmatrix} = 1,$$

que equival a

$$\frac{a_1}{a'_1} = \dots = \frac{a_n}{a'_n}$$

sempre que interpretem que $a_k = 0$ quan $a'_k = 0$. Per altra banda, és immediat comprovar que els dos hiperplans coincideixen si i només si

$$\frac{a_1}{a'_1} = \dots = \frac{a_n}{a'_n} = \frac{b}{b'}.$$

Exemple: rectes del pla

En el cas del pla,

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

és l'equació d'una recta L (suposant $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$) i $(-a_2, a_1)$ és un vector director de L . També és fàcil obtenir un punt (p_1, p_2) . Per exemple $(b/a_1, 0)$ si $a_1 \neq 0$, o $(0, b/a_2)$ si $a_2 \neq 0$. Llavors

$$(x_1, x_2) = (p_1, p_2) + \lambda(-a_2, a_1)$$

són equacions paramètriques de L .

Per altra banda ja hem dit que si $(x_1, x_2) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2)$ són equacions paramètriques d'una recta L , llavors

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} \Leftrightarrow v_2x_1 - v_1x_2 = v_2p_1 - v_1p_2$$

és una equació cartesiana de L .

Recta que passa pels punts (p_1, p_2) i (q_1, q_2) : $\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0$.

Exemple (quan tres rectes del pla són concurrents)

La condició

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [*]$$

és necessària i suficient per tal que les tres rectes del pla d'equacions

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, (a_i, b_i) \neq (0, 0) (i = 1, 2, 3), \quad [**]$$

siguin *concurrents* (és a dir, tenen un punt en comú) *o paral·leles*.

En efecte, si (x_0, y_0) satisfà $[**]$, o si les rectes són paral·leles, llavors les columnes del determinant $[*]$ són linealment dependents.

Recíprocament, si $[*]$ és nul, existeixen $\lambda, \mu, \rho \in K$, no tots nuls, tals que

$$a_i \lambda + b_i \mu + c_i \rho = 0 (i = 1, 2, 3).$$

Si $\rho = 0$, llavors les dues primeres columnes de $[*]$ són linealment dependents i això dóna que les tres rectes són paral·leles. I si $\rho \neq 0$, llavors les tres rectes passen pel punt $(\lambda/\rho, \mu/\rho)$.

Exemples en dimensió 3

- Equació contínua de la recta que passa per (p_1, p_2, p_3) amb vector director (v_1, v_2, v_3) :

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3} = 0.$$

Si (p_1, p_2, p_3) i (q_1, q_2, q_3) són dos punts diferents de la recta, podem prendre $(v_1, v_2, v_3) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$.

- Vector director de la recta intersecció dels plans

$$ax + by + cz = k \text{ i } a'x + b'y + c'z = k' :$$

$$\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

- Pla que passa pels punts de coordenades

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \text{ i } (c_1, c_2, c_3):$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple: equacions cartesianes d'un pla de $\mathbb{A}^4$

Sigui L un pla de $\mathbb{A}^4$, (p_1, p_2, p_3, p_4) un punt de L , i $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ un sistema de vectors directors. Llavors els punts

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in L$$

són els que compleixen

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & x_3 - p_3 & x_4 - p_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = 2.$$

Això permet obtenir fàcilment equacions cartesianes de L . Per exemple, si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$, llavors les equacions

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & x_3 - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & x_4 - p_4 \\ u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \end{vmatrix} = 0$$

són equacions cartesianes de L .