

# Geometria / GA

## 4. Referència afí.

### Equacions paramètriques de les varietats lineals

© S. Xambó

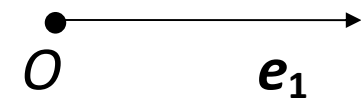
- Definició de referència afí; origen i eixos.
- Descripció alternativa d'una referència
- Coordenades d'un punt
- Canvi de referència
- Canvi de coordenades
- Equacions paramètriques d'una varietat lineal
- Intersecció de varietats lineals donades per equacions paramètriques

## Definició de referència afí; origen i eixos

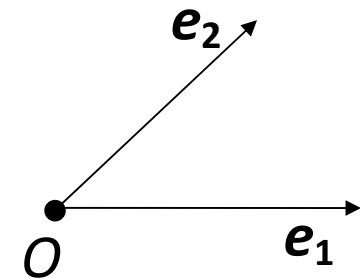
Sigui  $\mathbb{A}$  un espai afí i  $V$  el seu espai vectorial associat. Una **referència afí** de  $\mathbb{A}$ , o simplement una **referència** de  $\mathbb{A}$ , és una parella  $\mathcal{R} = [O; \mathbf{e}]$  formada per un punt  $O \in A$  i una base  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $V$ .

Direm que el punt  $O$  és l'**origen** i que els vectors  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  són els **eixos** de la referència  $\mathcal{R}$ .

**Referència afí de  $\mathbb{A}^1$ :** l'origen  $O$  és qualsevol punt i  $\mathbf{e}_1$  és qualsevol vector no nul.



**Referència de  $\mathbb{A}^2$ :** l'origen  $O$  és qualsevol punt i  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  són qualssevol parella de vectors linealment independents.



**Remarca.** Les rectes  $O + \langle \mathbf{e}_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ , també s'anomenen eixos de la referència. El context sempre deixa clar a quin dels dos significats ens referim.

## Descripció alternativa d'una referència

Si  $\mathcal{R} = [O; \mathbf{e}]$  és una referència, i posem

$$P_0 = O \text{ i } P_k = O + \mathbf{e}_k \text{ (} 1 \leq k \leq n \text{),}$$

llavors  $P_0, \dots, P_n$  són punts independents de  $\mathbb{A}$ .

Recíprocament, si  $P_0, \dots, P_n$  són punts independents, i posem

$$O = P_0 \text{ i } \mathbf{e}_k = P_k - P_0 \text{ (} 1 \leq k \leq n \text{),}$$

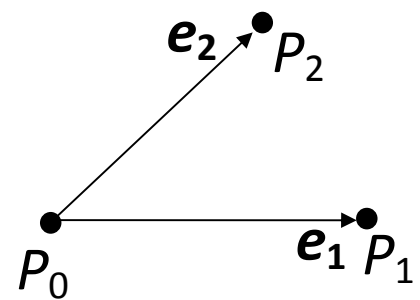
llavors  $[O; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$  és una referència de  $\mathbb{A}$ .

D'aquesta manera tenim una correspondència bijectiva entre les referències de  $\mathbb{A}$  i les successions  $P_0, \dots, P_n$  de  $n + 1$  punts independents. Per designar la referència  $[P_0; P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0]$  corresponent a  $P_0, \dots, P_n$ , també posarem  $[P_0, P_1, \dots, P_n]$ . Així, la referència  $[O; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$  també es pot denotar  $[O, O + \mathbf{e}_1, \dots, O + \mathbf{e}_n]$ .

**Il·lustració: descripció alternativa d'una referència de  $\mathbb{A}^2$ .** Si  $P_0, P_1, P_2$  són linealment independents, la referència  $[P_0, P_1, P_2]$  és la referència  $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ , on

$$O = P_0, \mathbf{e}_1 = P_1 - P_0, \mathbf{e}_2 = P_2 - P_0.$$

Notem que una referència qualsevol  $[O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$  es pot també denotar  $[O, O + \mathbf{e}_1, O + \mathbf{e}_2]$ .



## Coordenades d'un punt

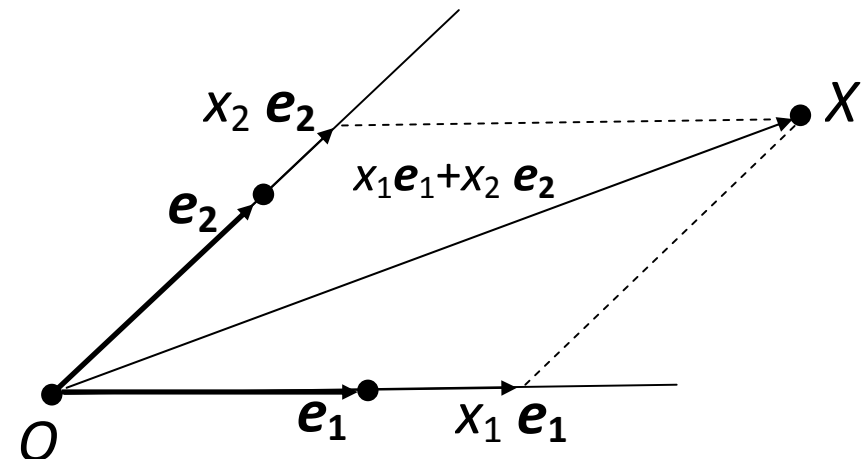
Donat un punt  $X$  i una referència  $\mathcal{R} = [O; \mathbf{e}]$ , les **coordenades de  $X$  respecte de  $\mathcal{R}$** , o  **$\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$** , són les components  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  del vector  $X - O$  respecte de la base  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , és a dir, els

$x_1, \dots, x_n \in K$  tals que

$$X - O = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \mathbf{e} \mathbf{x}^T$$

(notació matricial), o, equivalentment,

$$\begin{aligned} X &= O + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \\ &= O + \mathbf{e} \mathbf{x}^T. \end{aligned}$$



## Canvi de referència

Siguin  $\mathcal{R} = [O; \mathbf{e}]$  i  $\mathcal{R}' = [O'; \mathbf{e}']$  referències de  $\mathbb{A}$ . Per descriure la referència  $\mathcal{R}'$  en termes de  $\mathcal{R}$ , ens cal:

- $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , les coordenades de  $O'$  respecte de  $\mathcal{R}$ :

$$O' = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T.$$

- $A = (a_{ij})$ , la matriu de la base  $\mathbf{e}'$  respecte de la base  $\mathbf{e}$ . Recordem que les columnes de  $A$  són les components dels vectors  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  respecte de  $\mathbf{e}$ , o, equivalentment,

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}A.$$

## Canvi de coordenades

Sigui  $X$  un punt. Siguin  $\mathcal{R} = [O; \mathbf{e}]$  i  $\mathcal{R}' = [O'; \mathbf{e}']$  referències. Siguin

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades de  $X$ ,

$$X - O = \mathbf{e}\mathbf{x}^T,$$

$\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$  les  $\mathcal{R}'$ -coordenades de  $X$ ,

$$X - O' = \mathbf{e}'\mathbf{x}'^T.$$

Llavors

$$X - O' = \begin{cases} \mathbf{e}'A\mathbf{x}'^T \\ (X - O) - (O' - O) = \mathbf{e}\mathbf{x}^T - \mathbf{e}\mathbf{p}^T \end{cases}$$

d'on

$$\mathbf{e}'A\mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T - \mathbf{p}^T \Leftrightarrow \mathbf{x}^T = A\mathbf{x}'^T + \mathbf{p}^T.$$

■ Explícitament,

$$x_k = p_k + a_{k1}x'_1 + \dots + a_{kn}x'_n \quad (1 \leq k \leq n)$$

■ Notació per files:  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{x}'A^T$ .

## Remarques

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + A\mathbf{x}'^T$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

## Equacions paramètriques d'una varietat lineal

- $L = P + W$  varietat lineal,  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r \in W$  un sistema de vectors directors.
- $\mathcal{R} = [O; \mathbf{e}]$  referència afí.
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  les  $\mathcal{R}$ -coordenades d'un punt  $X$  ( $X = O + \mathbf{e}\mathbf{x}^T$ ). En particular  $P = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T$ .
- $B = (b_{ij})$  la matriu de  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$  respecte de  $\mathbf{e}$ :

$$w_j = b_{1j}e_1 + \dots + b_{nj}e_n, \text{ o bé } \mathbf{w} = \mathbf{e}B.$$

Reescrivint ara l'equació paramètrica vectorial de  $L$ ,

$$X = P + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{w}_r = P + \mathbf{w}\boldsymbol{\lambda}^T \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K),$$

amb les relacions anteriors obtenim

$$O + \mathbf{e}\mathbf{x}^T = O + \mathbf{e}\mathbf{p}^T + \mathbf{e}B\boldsymbol{\lambda}^T = O + \mathbf{e}(\mathbf{p}^T + B\boldsymbol{\lambda}^T),$$

és a dir,

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\boldsymbol{\lambda}^T,$$

que són les equacions paramètriques de  $L$  en la referència  $\mathcal{R}$ .

Notem que  $\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\boldsymbol{\lambda}^T \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\lambda}B^T$ .

Explícitament, les equacions paramètriques tenen la forma

$$x_i = p_i + b_{i1}\lambda_1 + \cdots + b_{ir}\lambda_r \quad (i = 1, \dots, n).$$

Per a cada valor particular donat als *paràmetres*  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , aquestes fórmules subministren un punt de  $L$  (per exemple, el punt  $P$  si  $\lambda_i = 0$ ), i viceversa, tot punt de  $L$  ve donat per una única especificació dels valors de les  $\lambda_i$ .

**Exemple.** En el cas d'una recta,  $X = P + \lambda \mathbf{w}$  :

$$\begin{aligned} x_i &= p_i + \lambda b_i \quad (\lambda \in K, i = 1, \dots, n) \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= \mathbf{p} + \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + \lambda \mathbf{b}^T, \end{aligned}$$

on  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  són les components de  $\mathbf{w}$  en la base  $\mathbf{e}$ .

## Intersecció de varietats lineals donades per equacions paramètriques

■  $L: \mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\mathbf{t}^T \quad (\mathbf{t} \in K^r)$   
 $L': \mathbf{x}'^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{t}'^T \quad (\mathbf{t}' \in K^{r'})$

Càlcul de la intersecció  $L \cap L'$ : resolvent el sistema d'equacions lineals

$$\mathbf{p}^T + B\mathbf{t}^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{t}'^T$$

en les incògnites  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_r)$  i  $\mathbf{t}' = (t'_1, \dots, t'_{r'})$ , i substituint les solucions  $\mathbf{t}$  obtingudes en l'equació  $\mathbf{x}^T = \mathbf{p}^T + B\mathbf{t}^T$  de  $L$ .

Si el sistema és compatible, el resultat és un sistema d'equacions paramètriques de  $L \cap L'$ .

- Si substituïssim les solucions  $\mathbf{t}'$  a l'equació  $\mathbf{x}'^T = \mathbf{p}'^T + B'\mathbf{t}'^T$ , obtindríem un altre sistema d'equacions paramètriques de la mateixa varietat  $L \cap L'$ .
- Pel primer camí, les equacions paramètriques descriuen  $L \cap L'$  com a subconjunt de  $L$ , i pel segon, com a subconjunt de  $L'$ .