

Geometria / GA

3. Punts independents i dependents

© S. Xambó

- **Punts independents**
- **Punts dependents. Punts alineats**
- **Combinacions afins**
- **Baricentre**
- **Notes**

Punts independents

Donats punts $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{A}$, diem que són *independents* si els vectors

$$P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0 \in V$$

són linealment independents.

Per exemple, dos punts P_0 i P_1 són independents si i només si $P_1 \neq P_0$.

Proposició.¹ Fixem $O \in A$. Els punts $P_0, P_1, \dots, P_r$ són independents si i només si

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0(P_0 - O) + \dots + \lambda_r(P_r - O) = 0 \\ \lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_r = 0.$$

En particular veiem que la condició de ser independents no depèn de l'ordre en què donem els punts.

Prova. Suposem primer que $P_0, P_1, \dots, P_r$ són independents. Volem veure que les relacions

$$\lambda_0(P_0 - O) + \dots + \lambda_r(P_r - O) = 0 \quad [R]$$

$$\lambda_0 + \dots + \lambda_r = 0 \quad [R']$$

impliquen $\lambda_0 = \dots = \lambda_r = 0$. Com que

$$P_i - O = (P_i - P_0) + (P_0 - O),$$

l'expressió $\lambda_0(P_0 - O) + \cdots + \lambda_r(P_r - O)$ de $[R]$ és igual a

$$\lambda_1(P_1 - P_0) + \cdots + \lambda_r(P_r - P_0) + (\lambda_0 + \cdots + \lambda_r)(P_0 - O) = 0,$$

de manera que $[R]$ i $[R']$ impliquen

$$\lambda_1(P_1 - P_0) + \cdots + \lambda_r(P_r - P_0) = 0.$$

Essent $P_0, P_1, \dots, P_r$ independents, obtenim $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Finalment, això i $[R']$ donen $\lambda_0 = 0$.

El recíproc es demostra d'una manera similar: de

$$P_i - P_0 = (P_i - O) - (P_0 - O)$$

s'infereix que la relació

$$\lambda_1(P_1 - P_0) + \cdots + \lambda_r(P_r - P_0) = 0$$

implica la relació

$$\lambda_0(P_0 - O) + \cdots + \lambda_r(P_r - O) = 0,$$

amb $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)$. Així, doncs, si $[R]$ i $[R']$ impliquen $\lambda_0 = \cdots = \lambda_r = 0$, els vectors $P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0$ són linealment independents.

Teorema. Si $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}$ són independents, hi ha una única varietat lineal de dimensió r que els conté.

Recíprocament, si hi ha una única varietat de dimensió $r \leq n$ que conté els punts $P_0, \dots, P_r$, llavors $P_0, \dots, P_r$ són independents.

Prova. Si $P_0, \dots, P_r$ són independents,

$$L = P_0 + \langle P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0 \rangle$$

és una varietat lineal de dimensió r que els conté, i és immediat que qualsevol varietat lineal de dimensió r que conté $P_0, \dots, P_r$ és igual a L .

Per al recíproc, notem que si els vectors $P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0$ ($r \leq n$) són linealment dependents, llavors podem trobar dos subespais vectorials distints $W, W' \subseteq V$ de dimensió r que els contenen, amb la qual cosa $P_0 + W$ i $P_0 + W'$ són dues varietats lineals de dimensió r distintes que contenen els punts $P_0, \dots, P_r$.

De l'única varietat lineal de dimensió r que conté els punts independents $P_0, \dots, P_r$ en diem la **varietat determinada per $P_0, \dots, P_r$** i la denotem $P_0 P_1 \cdots P_r$.

Punts dependents. Punts alineats

Donats punts $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{A}$ diem que són *dependents* si no són independents, és a dir, si els vectors $P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0$ són linealment dependents.

Per exemple, dos punts P_0 i P_1 són dependents si i només si són coincidents ($P_0 = P_1$).

Per altra banda tenim:

Tres punts $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{A}^n$ ($n \geq 1$) són dependents si i només si estan sobre una recta.

En efecte, si P_0, P_1, P_2 són de la recta $P + \langle \mathbf{u} \rangle$, llavors P_0, P_1, P_2 són dependents ja que $P_1 - P_0, P_2 - P_0 \in \langle \mathbf{u} \rangle$. Recíprocament, si P_0, P_1, P_2 són dependents, per veure que hi ha una recta que els conté podem suposar que $P_1 \neq P_0$. Llavors existeix $\lambda \in K$ amb $P_2 - P_0 = \lambda(P_1 - P_0)$ i $P_2 = P_0 + \lambda(P_1 - P_0)$ pertany a la recta P_0P_1 .

Combinacions afins

Si $A_1, \dots, A_r$ són punts i $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, llavors l'expressió

$$O + \lambda_1(A_1 - O) + \dots + \lambda_r(A_r - O)$$

no depèn de l'origen O si (i només si) $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$.

En efecte, si O' és un altre punt, diguem $O' = O + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in V$, llavors

$$\begin{aligned} & O' + \lambda_1(A_1 - O') + \dots + \lambda_r(A_r - O') \\ &= O + \mathbf{u} + \lambda_1((A_1 - O) - \mathbf{u}) + \dots + \lambda_r((A_r - O) - \mathbf{u}) \\ &= O + \lambda_1(A_1 - O) + \dots + \lambda_r(A_r - O) + (1 - \sum_i \lambda_i)\mathbf{u} \\ &= O + \lambda_1(A_1 - O) + \dots + \lambda_r(A_r - O). \end{aligned}$$

Així doncs

$$O + \lambda_1(A_1 - O) + \dots + \lambda_r(A_r - O) \quad [*]$$

només depèn de $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{A}$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$.

Direm que $[*]$ és la **combinació afí** dels punts $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{A}$ amb coeficients $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, i posarem $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$ per denotar-la.²

Remarca. La definició de combinació afí $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r$ ha estat definida només quan es compleix la condició $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$. Si aquesta condició no es compleix, però $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r \neq 0$, la combinació afí $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r$ es defineix com $\lambda'_1 A_1 + \cdots + \lambda'_r A_r$, on $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_r}$.

En tot cas, la noció de combinació afí és una generalització de la noció de centre de masses.³

Exemple. Podem considerar la combinació afí

$$G = \frac{1}{r} A_1 + \cdots + \frac{1}{r} A_r,$$

la qual s'anomena **baricentre de $A_1, \dots, A_r$** (*punt mitjà* per $r = 2$). Per definició, doncs,

$$G = O + \frac{1}{r} (A_1 - O) + \cdots + \frac{1}{r} (A_r - O) \quad [*]$$

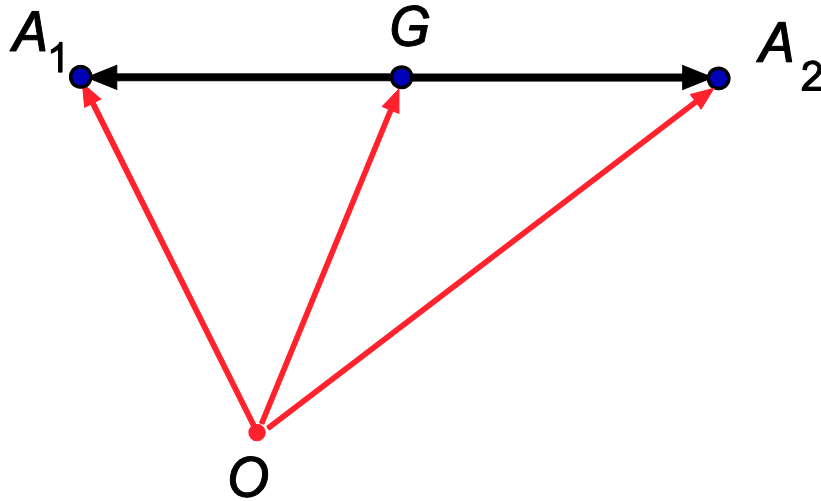
per a qualsevol origen O . Prenent $O = G$, obtenim que

$$(A_1 - G) + \cdots + (A_r - G) = 0. \quad [**]$$

Recíprocament, si tenim aquesta relació, llavors G és el baricentre, ja que $[**]$ implica $[*]$ per $O = G$ i per tant per a tot origen O .⁴

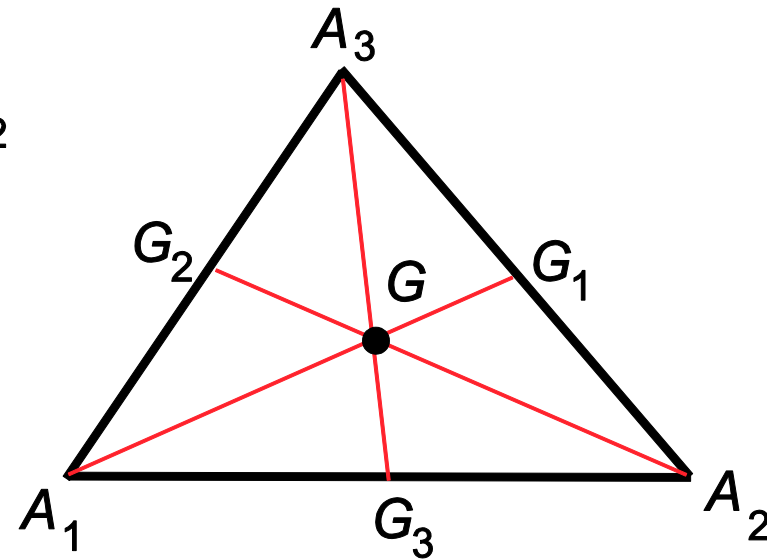
Exemple. Sigui G el baricentre dels punts $A_1, \dots, A_r$ i posem G_i per denotar el baricentre dels punts $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_r$. Llavors es compleix:

$$G = A_i + \frac{r-1}{r}(G_i - A_i) = G_i + \frac{1}{r}(A_i - G_i).$$



$$r = 2: G_1 = A_2, G_2 = A_1,$$

$$G = A_1 + \frac{1}{2}(A_2 - A_1)$$



$$r = 3: \text{ per } i = 1, 2, 3,$$

$$G = A_i + \frac{2}{3}(G_i - A_i) = G_i + \frac{1}{3}(A_i - G_i)$$

En efecte,

$$\begin{aligned} r(G - O) &= (A_1 - O) + \cdots + (A_r - O) \\ &= (A_i - O) + (r - 1)(G_i - O) \end{aligned}$$

per a qualsevol punt O . Fent $O = A_i$, obtenim

$$r(G - A_i) = (r - 1)(G_i - A_i),$$

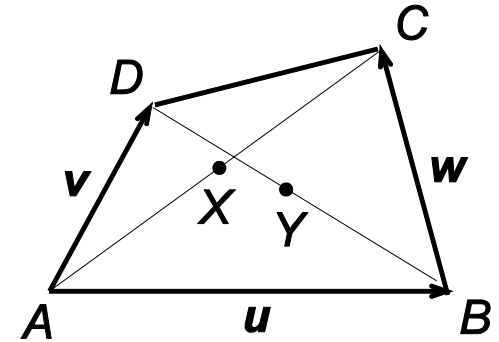
que estableix la relació $G = A_i + \frac{r-1}{r}(G_i - A_i)$.

Ara com que $A_i = G_i + (A_i - G_i)$,

$$\begin{aligned} G &= A_i + \frac{r-1}{r}(G_i - A_i) = G_i + \left(1 - \frac{r-1}{r}\right)(A_i - G_i) \\ &= G_i + \frac{1}{r}(A_i - G_i), \end{aligned}$$

que és la segona fórmula.

Exemple. Un quadrilàter $ABCD$ és un paral·lelogram (és a dir, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$) si i només si les seves diagonals es bissequen mútuament.



En efecte, els punts mitjans X i Y de les diagonals AC i BD es poden expressar com segueix (notacions de la figura):

$$X = A + \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{w}), \quad Y = A + \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

La seva igualtat $X = Y$ equival a $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, que es compleix si $ABCD$ és un paral·lelogram. Inversament, si $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, llavors $\overrightarrow{AD} = \mathbf{v} = \mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$ i

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$$

i la figura és un paral·lelogram.

Notes

1. Cf. exercici 26, HP07 (Hurtado-Prats, problemes de Geometria, 2007).
2. Adonem-nos que no estem definint per separat les expressions $\lambda_i A_i$, sinó l'expressió completa $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$.
3. Si tenim masses $m_1, \dots, m_r$ situades en els punts amb vectors de posició $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$, aleshores el vector de posició $\mathbf{x}_G$ del *centre de masses* G de $m_1, \dots, m_r$ ve donat per l'expressió

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{x}_1 + \dots + m_r \mathbf{x}_r), \quad m = m_1 + \dots + m_r.$$

4. Amb les notacions alternatives, notem que podem dir que hi ha un únic punt G tal que $\sum_i \overrightarrow{GA_i} = 0$, i que aquest punt ve donat per la fórmula

$$G = O + \frac{1}{r} \sum_i \overrightarrow{OA_i}$$

per a qualsevol origen O .