

Geometria / GA

2. Varietats lineals

© S. Xambó

- Varietat lineal
 - Definició
 - Espai director
 - Dimensió
 - Punts, rectes, plans, hiperplans
- Equació paramètrica vectorial
- Varietats lineals paral·leles
- Intersecció de varietats lineals
- Suma (o unió) afí de varietats lineals
- Fórmula de les dimensions. Exemples
- Complements: *Espai afí quocient*
- Notes

Varietat lineal

Una *varietat lineal* d'un espai afí (A, V, δ) és un subconjunt L de A de la forma

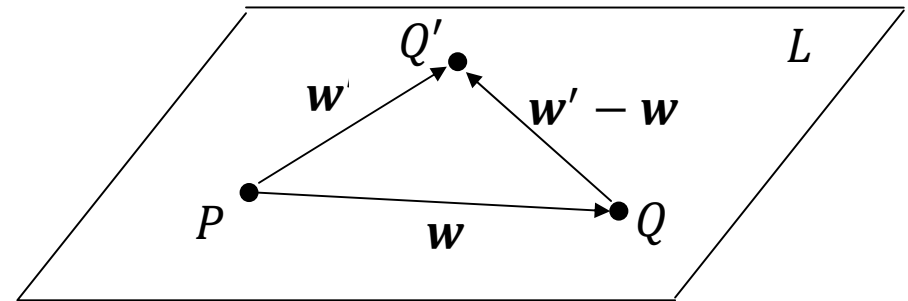
$$L = P + W,$$

on $W \subseteq V$ és un subespai vectorial i $P \in A$.

La *dimensió* de L , $\dim(L)$, és $\dim_K(W)$.

Lema

- Si $Q, Q' \in L$, llavors $\overrightarrow{QQ'} \in W$.
- Com que $W = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in L\}$, de fet tenim $W = \{\overrightarrow{QQ'} \mid Q, Q' \in L\}$.



Prova

Per definició de $P + W$, existeixen $w, w' \in W$ tals que

$$Q = P + w, \quad Q' = P + w'.$$

Llavors

$$\delta(Q, Q') = (P + w') - (P + w) = w' - w \in W.$$

El lema anterior mostra que el subespai W queda unívocament determinat per L . Direm que W és l'*espai director* de L (i posem $W(L)$ per indicar aquesta dependència). Si $w_1, \dots, w_r$ és una base d' W , diem que és un *sistema de vectors directors* de L .

Exemples

- Una varietat lineal de dimensió 0 té la forma $P + \{0\} = \{P\}$, on P és un punt. Amb la identificació $P \leftrightarrow \{P\}$, podem dir que *les varietats de dimensió 0 són els punts de $\mathbb{A}$* .
- Si l'espai afí té dimensió n (cosa que es sol denotar escrivint $\mathbb{A}^n$), l'única varietat lineal de dimensió n és tot $\mathbb{A}^n$.
- Les varietats lineals de dimensió 1 s'anomenen *rectes* i les de dimensió 2, *plans*. Un *vector director* d'una recta és un vector no nul del seu espai director (que és de dimensió 1).
- Les varietats lineals de dimensió $n - 1$ de $\mathbb{A}^n$ s'anomenen *hiperplans*. Notem que els hiperplans de $\mathbb{A}^2$ són rectes i que els de $\mathbb{A}^3$ són plans.

Proposició

- (L, W, δ) és un espai afí.
- Per a tot punt $Q \in L$, $L = Q + W$.

Prova

La primera part és conseqüència del lema i del fet que (A, V, δ) és un espai afí.

Per a la segona part, si $Q = P + w$ ($w \in W$) aleshores

$$Q + W = (P + w) + W = P + (w + W) = P + W = L,$$

atès que $w + W = W$ per ser W un subespai vectorial.

Remarca. La dimensió d'una varietat lineal $L = P + W$, $\dim(L)$, ha estat definida com $\dim_K(W)$. Com que $W = W(L)$ queda unívocament determinat per L , el mateix passa amb $\dim_K(W)$ i per tant $\dim(L)$ està ben definida.

Teorema. Si L i L' són varietats lineals i $L \subseteq L'$, llavors
 $\dim(L) \leq \dim(L')$, amb igualtat si i només si $L = L'$.

Prova. Posem $W = W(L)$, $W' = W(L')$.

La inclusió $L \subseteq L'$ implica $W \subseteq W'$ (pel lema, pàg. 2). Per tant,

$$\dim_K(W) \leq \dim_K(W').$$

Això prova que $\dim(L) \leq \dim(L')$.

En cas de donar-se la igualtat $\dim(L) = \dim(L')$, tindrem

$$\dim_K(W) = \dim_K(W'), \text{ d'on } W = W'.$$

Sigui $P \in L$. Llavors $P \in L'$ i

$$L = P + W = P + W' = L'$$

(la darrera igualtat per la proposició, pàg. 4).

Equació paramètric vectorial

Donat un punt P i un sistema de vectors directors $w_1, \dots, w_r$ d'una varietat lineal L , tot punt X de L es pot escriure de manera única en la forma

$$X = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K.$$

Adonem-nos que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ són les components del vector $X - P \in W$ en la base $w_1, \dots, w_r$.

D'aquesta relació en diem que és una *equació paramètrica vectorial* de L .

Exemple. Donats dos punts diferents, hi ha una única recta que els conté. Si els punts són P i Q , la recta és

$$P + \langle Q - P \rangle,$$

o bé,

$$X = P + \lambda(Q - P), \lambda \in K.$$

Varietats lineals paral·leles

Es diu que dues varietats lineals L i L' són *paral·leles*, i escrivim $L \parallel L'$ per denotar-ho, si l'espai director d'una està contingut en l'espai director de l'altra. Amb símbols

$$L \parallel L' \Leftrightarrow W(L) \subseteq W(L') \vee W(L') \subseteq W(L).$$

Si tenen la mateixa dimensió,

$$L \parallel L' \Leftrightarrow W(L) = W(L').$$

- En el cas de dues rectes L i L' , amb vectors directors u i u' ,

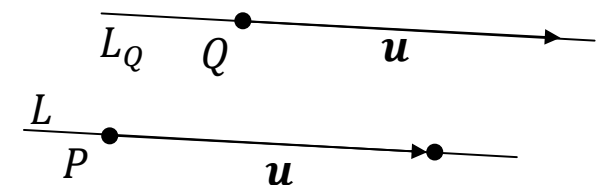
$$L \parallel L' \Leftrightarrow \langle u \rangle = \langle u' \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \text{ tal que } u' = \lambda u,$$

és a dir, L i L' són paral·leles si i només si els corresponents vectors directors són proporcionals.

Definició. Si L és una varietat lineal de dimensió r , i Q un punt,

$$L_Q = Q + W(L)$$

és l'única varietat lineal de dimensió r paral·lela a L que passa per Q . Diem que L_Q és la *varietat lineal paral·lela a L per Q* . La figura il·lustra el cas $r = 1$.



Remarca

El conjunt de les varietats lineals amb un espai director W donat té estructura d'espai afí, amb espai estructural V/W (v. l'entrada **Espai afí quocient** a **Complements**).

Intersecció

Teorema. *Si la intersecció de dues o més varietats lineals és no buida, llavors aquesta intersecció és una varietat lineal, i el seu espai director és la intersecció dels corresponents espais directors.*

Prova. Farem el cas de la intersecció de dues varietats lineals L i L' . El cas general es demostra d'una manera similar.

Posem $W = W(L)$ i $W' = W(L')$. Sigui $P \in L \cap L'$ (existeix, ja que per hipòtesi $L \cap L' \neq \emptyset$). Llavors $L = P + W$ i $L' = P + W'$, amb la qual cosa és clar que

$$L \cap L' = (P + W) \cap (P + W') = P + (W \cap W').$$

Corol·lari. *Si L i L' són paral·leles i $L \cap L' \neq \emptyset$, llavors o bé $L \subseteq L'$ o bé $L' \subseteq L$.*

Suma afí

Siguin $L = P + W$ i $L' = P' + W'$ varietats lineals. Si M és qualsevol varietat lineal que conté L i L' , llavors $P' - P \in W(M)$ i $W, W' \subseteq W(M)$, de manera que

$$\langle P' - P \rangle + W + W' \subseteq W(M),$$

és a dir,

$$P + \langle P' - P \rangle + W + W' \subseteq P + W(M) = M.$$

Ara bé, és clar que la varietat

$$P + \langle P' - P \rangle + W + W' \quad [*]$$

conté $P + W = L$ i $P + (P' - P) + W' = P' + W' = L'$, amb la qual cosa

[] és la varietat lineal més petita que conté L i L' .*

En particular, no depèn dels punts $P \in L$ i $P' \in L'$ usats per descriure L i L' . A més, ha de coincidir amb $P' + \langle P - P' \rangle + W + W'$, ja que aquesta és la varietat lineal més petita que conté L' i L .

Posarem $L \vee L'$ per denotar $[*]$ i diem que és la *suma afí* de L i L' .

Proposició. Les condicions següents són equivalents:

1. $L \cap L' \neq \emptyset$.
2. Existeixen $P \in L$, $P' \in L'$ tals que $P' - P \in W + W'$.
3. Per a qualsevol $P \in L$ i $P' \in L'$, $P' - P \in W + W'$.

Prova. Si $L \cap L' \neq \emptyset$, podem escollir un punt $Q \in L \cap L'$ i aleshores

$$P' - P = (P' - Q) + (Q - P) \in W' + W.$$

I si $P' - P = w + w'$ ($w \in W$, $w' \in W'$), llavors

$$P + w = P' + (-w') \in L \cap L'.$$

Corol·lari. La condició $W + W' = V$ és **suficient** per tal que $L \cap L' \neq \emptyset$.

Exemple. Si L és una varietat lineal no paral·lela a un hiperplà H , llavors $L \cap H \neq \emptyset$, ja que $W(H)$ té dimensió $n - 1$ i $W(L) \not\subseteq W(H)$.

Teorema (fórmula de les dimensions)

$$\dim(L \vee L') = \begin{cases} \dim(L) + \dim(L') - \dim(L \cap L') & \text{si } L \cap L' \neq \emptyset \\ 1 + \dim(L) + \dim(L') - \dim(W \cap W') & \text{si } L \cap L' = \emptyset \end{cases}$$

Prova

$$\begin{aligned} \dim(L \vee L') &= \dim(\langle P - P' \rangle + W + W') \\ &= \begin{cases} \dim(W + W') & \text{si } P' - P \in W + W' \\ 1 + \dim(W + W') & \text{si } P' - P \notin W + W' \end{cases} \end{aligned}$$

Ara

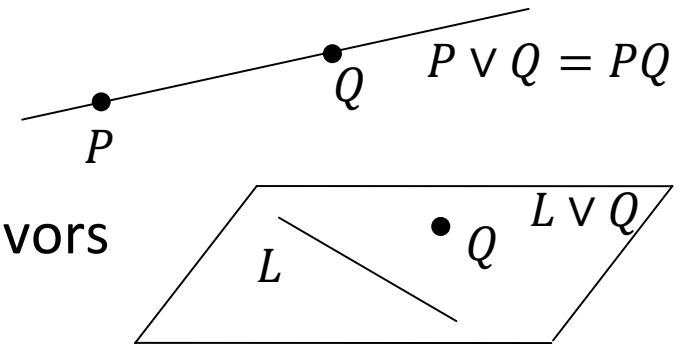
$$\begin{aligned} \dim(W + W') &= \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') \\ &= \dim(L) + \dim(L') - \dim(W \cap W'), \end{aligned}$$

per la fórmula de les dimensions d'àlgebra lineal, i això estableix la fórmula, per la proposició anterior i el fet que en el cas $L \cap L' \neq \emptyset$ tenim $\dim(W \cap W') = \dim(L \cap L')$.

Exemple. Si Q és un punt exterior a una varietat lineal L , llavors

$$\dim(L \vee Q) = \dim(L) + 1.$$

Casos particulars: Si P i Q són dos punts diferents, llavors $P \vee Q = PQ$ (la recta que uneix P i Q). Si Q és un punt exterior a una recta L , llavors $L \vee Q$ és un pla.



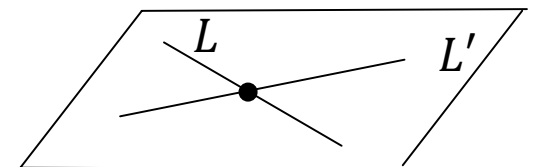
Exemple. Si H és un hiperplà i L una varietat lineal no paral·lela a H , llavors

$$\dim(H \cap L) = \dim(L) - 1.$$

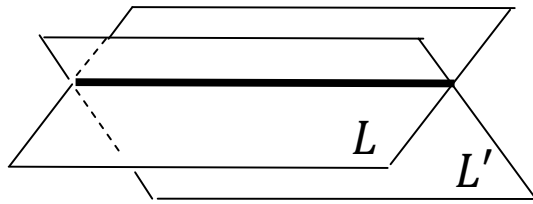
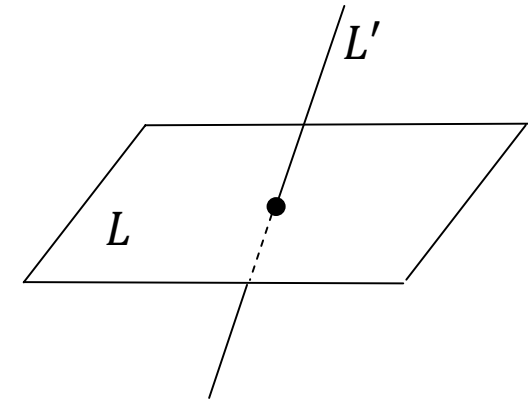
En efecte, H i L es tallen, ja que $W(H) + W(L) = V$ (v. l'Exemple de la pàg. 10). Així doncs val el primer cas de la fórmula de les dimensions i

$$\begin{aligned} \dim(H \cap L) &= \dim(H) + \dim(L) - \dim(H \vee L) \\ &= n - 1 + \dim(L) - n = \dim(L) - 1. \end{aligned}$$

Casos particulars: Dues rectes no paral·leles del pla es tallen en un punt.



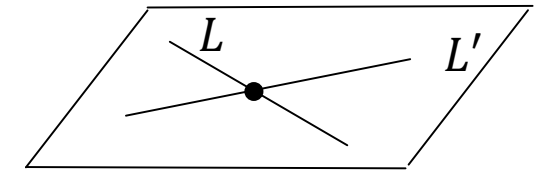
Un pla de l'espai talla una recta no paral·lela en un punt.



Dos plans no paral·lels de l'espai es tallen en una recta.

Exemple. La suma afí de dues rectes no paral·leles és:

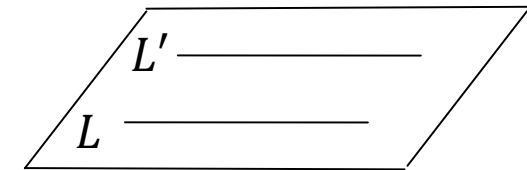
- un pla si les rectes es tallen
- una varietat de dimensió 3 si no es tallen (en aquest cas es diu que les rectes *es creuen*).



Exemple. Si L i L' són varietats lineals paral·leles de la mateixa dimensió r , llavors

$$L \vee L' = L = L' \text{ si } L \cap L' \neq \emptyset,$$

$$\dim(L \vee L') = r + 1 \text{ si } L \cap L' = \emptyset$$



(la figura il·lustra el cas de dues rectes paral·leles distintes).

Complements: *Espai afí quocient*

Sigui $(\mathbb{A}, V)$ un espai afí de dimensió n i W un subespai vectorial de V .

Sigui $\mathbb{A}'$ el conjunt de varietats lineals de $\mathbb{A}$ que tenen espai director W i posem $V' = V/W$.¹

Finalment, considerem l'aplicació

$$\delta : \mathbb{A}' \times \mathbb{A}' \rightarrow V', (L, L') \mapsto [P' - P],$$

on P i P' són punts arbitraris de L i L' , respectivament.

Vegem primer que δ està ben definida, és a dir, que $[P' - P]$ no depèn de l'elecció de $P \in L$ i $P' \in L'$. En efecte, si $Q \in L$ i $Q' \in L'$, llavors $Q - P \in W(L) = W$ i $Q' - P' \in W(L') = W$. Per tant,

$$(Q' - Q) - (P' - P) = (Q' - P') - (Q - P) \in W,$$

d'on $[Q' - Q] = [P' - P]$.

Proposició. $(\mathbb{A}', V', \delta)$ és un espai afí.

Prova:

Llei d'addició. Si L'' és una tercera varietat lineal amb $W(L'') = W$ i $P'' \in L''$, llavors

$$\delta(L, L') + \delta(L', L'') = [P' - P] + [P'' - P'] = [P'' - P] = \delta(L, L'').$$

Axioma d'homogeneïtat. Fixem $L \in \mathbb{A}'$ i considerem l'aplicació

$$\delta_L: \mathbb{A}' \rightarrow V', M \mapsto \delta(L, M) = [Q - P] \text{ (} P \in L, Q \in M \text{)}.$$

L'aplicació δ_L és exhaustiva: si $[x] \in V'$, posem $Q = P + x$ i $M = Q + W$; llavors $M \in \mathbb{A}'$ i $\delta_L(M) = [Q - P] = [x]$.

L'aplicació δ_L és injectiva: si $M, M' \in \mathbb{A}'$ són tals que $\delta_L(M) = \delta_L(M')$, i prenem $Q \in M$, $Q' \in M'$, llavors $[Q' - P] = [Q - P] \in V'$, que equival a $Q' - Q \in W$, d'on $Q' \in Q + W = M$. Per tant $M' = M$.

Notes

1. Recordem que V/W és l'espai quocient de V per W , i que hi ha una aplicació lineal exhaustiva $\pi : V \rightarrow V/W$, $x \mapsto [x]$, tal que $[x] = [x']$ si i només si $x' - x \in W$. Amb aquesta representació, la suma queda definida per $[x] + [x'] = [x + x']$ i el producte per escalars per $\lambda[x] = [\lambda x]$. L'element neutre de la suma és $[0]$.