

Geometria / GA

1. Espai afí

© S. Xambó

Prerequisites

- $\cos K (\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_{p^r}, \dots)$.¹
- K -espai vectorial.²

- Definició d'espai afí
- Exemple: classe lateral d'un subespai vectorial
- Algunes propietats del vector $\overrightarrow{PQ}$
- Diferència de punts
- Translacions
- Complements
 - A. Definició alternativa d'espai afí*
 - B. Un altre exemple d'espai afí*
- Notes

Definició d'espai afí

Ingredients

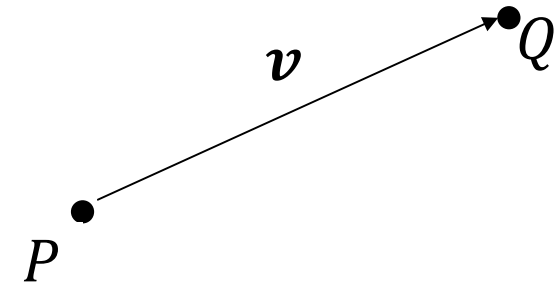
- K , un cos (dels seus elements en diem *escalars*)
- $\mathbb{A}$, un conjunt (dels seus elements en diem *punts*)
- V , un K -espai vectorial (dels seus elements en diem *vectors*)
- Una aplicació

$$\delta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V, (P, Q) \mapsto \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

(en diem *aplicació estructural*).

Axiomes

Axioma d'homogeneïtat. Per a tot punt P i tot vector v existeix un únic punt Q tal que $\overrightarrow{PQ} = v$. Aquest punt Q serà denotat $P + v$, o, per raons que veurem després (pàg. 8), $t_v(P)$.

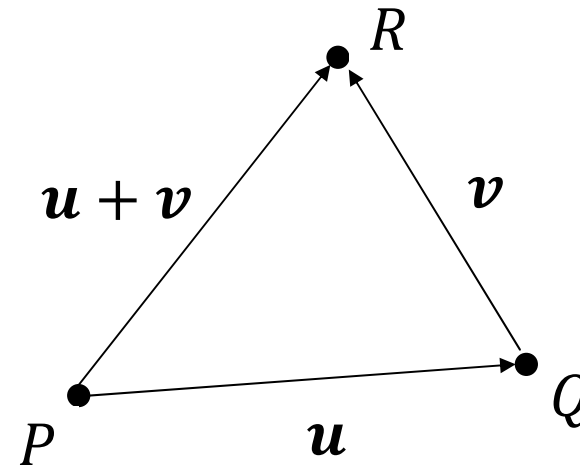


L'axioma d'homogeneïtat també es pot expressar dient que per a tot punt P , l'aplicació

$$\delta_P: \mathbb{A} \rightarrow V, \quad Q \mapsto \overrightarrow{PQ},$$

és bijectiva.

Llei d'addició. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.



Dimensió. La *dimensió* de l'espai afí $(\mathbb{A}, V, \delta)$ és, per definició, $\dim_K(V)$. Posarem $\dim(\mathbb{A})$ per denotar-la, és a dir,

$$\dim(\mathbb{A}) = \dim_K V.$$

- Un espai afí de dimensió 0 es redueix a un punt.
- Una *recta afí* és un espai afí de dimensió 1.
- Un *pla afí* és un espai afí de dimensió 2.

Exemple: *classe lateral d'un subespai vectorial*

Sigui V un subespai vectorial³ d'un K -espai vectorial E .

Sigui $\mathbf{a}$ un vector de E i posem

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + V = \{a + v \mid v \in V\}$$

(és la *classe lateral* de $\mathbf{a}$ mòdul V). Com que la diferència $Q - P$ de dos elements $P = \mathbf{a} + x$ i $Q = \mathbf{a} + y$ és

$$Q - P = (\mathbf{a} + y) - (\mathbf{a} + x) = y - x \in V,$$

podem considerar l'aplicació $\delta: \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow V, (P, Q) \mapsto Q - P$.

$(\mathbf{A}, V, \delta)$ és un espai afí.⁴

El cas $\mathbf{a} = 0$ i $V = E$ ens mostra, en particular, que *tot espai vectorial E es pot considerar com un espai afí*. En aquest cas els punts i els vectors són la mateixa cosa: $\mathbb{A} = E, V = E$ i si $P, Q \in E, \delta(P, Q) = Q - P$.

Algunes propietats del vector $\overrightarrow{PQ}$

Proposició

1. $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0} \Leftrightarrow Q = P$
2. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$
3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.

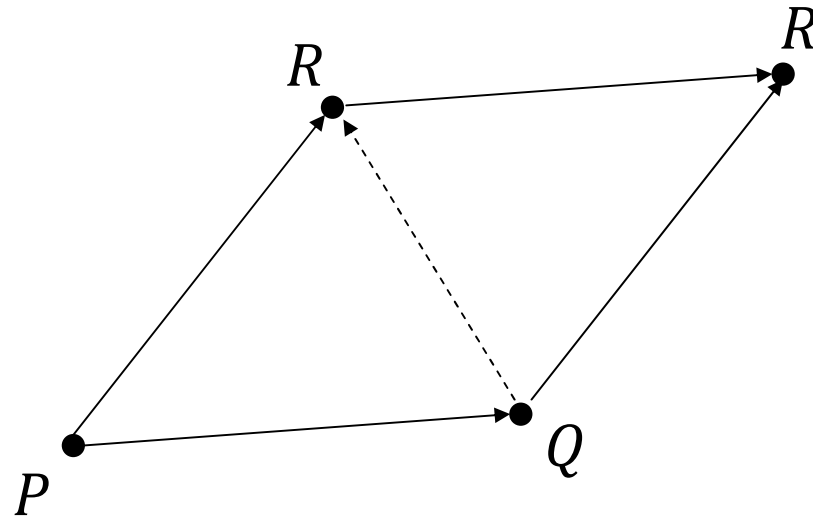
Prova

1. $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ (addició); per tant, $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$. I si $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$, llavors

$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0} = \overrightarrow{PP}$, d'on $P = Q$ per l'axioma d'homogeneïtat.

2. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$, d'on $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}$.



Diferència de punts

Escollim un punt O com a *origen*, i posem, per a tot punt P ,

$$\vec{P} = \overrightarrow{OP}.$$

Com que

$$\vec{P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} = \vec{Q},$$

tenim la relació $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$. Com que l'expressió $\overrightarrow{PQ}$ no depèn de O , això suggereix que una notació adient per al vector $\overrightarrow{PQ}$ és $Q - P$ (diferència de punts). D'ara endavant usarem les dues notacions indistintament.

$$(Q - P) + (R - Q) = R - P$$

$$R - Q = (R - P) - (Q - P)$$

$$1. Q - P = 0 \Leftrightarrow Q = P$$

$$2. Q - P = -(P - Q).$$

$$3. Q - P = R - S \Leftrightarrow R - P = Q - S$$

Translacions

La **translació** definida per un vector $\mathbf{v}$ és l'aplicació

$$t_{\mathbf{v}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \text{ tal que } t_{\mathbf{v}}(P) = Q \Leftrightarrow \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

(notació : $Q = t_{\mathbf{v}}(P)$ també es denota $Q = P + \mathbf{v}$).

Proposició. Són equivalents

1. $\mathbf{v} = 0$
2. $t_{\mathbf{v}} = Id$
3. $t_{\mathbf{v}}$ té punts fixos.

Prova. $1 \Rightarrow 2$. Si $\mathbf{v} = 0$, i $Q = t_0(P)$, llavors $0 = \overrightarrow{PQ}$ i $Q = P$. Per tant, $t_0(P) = P$ per a tot punt P .

$2 \Rightarrow 3$. Òbvia.

$3 \Rightarrow 1$. Si $t_{\mathbf{v}}(P) = P$ per algun P , $\mathbf{v} = \overrightarrow{PP} = 0$.

El grup $T(\mathbb{A})$ de les translacions

El conjunt $\Pi(A)$ de les aplicacions bijectives de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A}$ *forma un grup*⁵ *amb la composició:*

$$(\tau \circ \sigma)(P) = \tau(\sigma(P)).$$

Proposició. L'aplicació

$$V \rightarrow \Pi(\mathbb{A}), \quad v \mapsto t_v,$$

és un monomorfisme de grups (homomorfisme⁶ injectiu).

La imatge $T(\mathbb{A})$ d'aquest homomorfisme és el

grup de les translacions de $\mathbb{A}$.

Prova

Si $t_v(P) = Q$ i $t_w(Q) = R$, llavors $v = \overrightarrow{PQ}$ i $w = \overrightarrow{QR}$,

$$v + w = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}, \text{ i}$$

$$(t_w \circ t_v)(P) = t_w(t_v(P)) = R = t_{v+w}(P).$$

Per tant, $t_w \circ t_v = t_{v+w}$ i l'aplicació és un homomorfisme. Com que $t_v = Id$ equival a $v = 0$, aquest homomorfisme és injectiu.

Complements

A. Definició alternativa d'espai afí

Un espai afí es pot també definir partint de les propietats bàsiques de l'operació $P + \boldsymbol{v}$ introduïda a la pàgina 3. Aquesta aplicació satisfà les propietats següents:

- $(P + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = P + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ per a qualssevol $P \in \mathbb{A}$ i $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$.
- Per a tot $P \in \mathbb{A}$, l'aplicació $V \rightarrow \mathbb{A}$ tal que $\boldsymbol{v} \mapsto P + \boldsymbol{v}$ és bijectiva.

Doncs bé, si en la definició d'espai afí canviem l'aplicació δ per una aplicació $\sigma: \mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$ tal que:

- 1) $\sigma(\sigma(P, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \sigma(P, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$, i
- 2) per a tot $P \in \mathbb{A}$, l'aplicació $\sigma_P: V \rightarrow \mathbb{A}$, $\boldsymbol{v} \mapsto \sigma(P, \boldsymbol{v})$, és bijectiva,

llavors l'estructura $(\mathbb{A}, V, \sigma)$ defineix un espai afí $(\mathbb{A}, V, \delta)$ posant

$$\delta(P, Q) = \sigma_P^{-1}(Q).$$

L'axioma 1) es correspon a l'axioma d'addició de δ i l'axioma 2) a la propietat d'homogeneïtat.

B. un altre exemple d'espai afí

Sigui E un espai vectorial de dimensió n i $F \subseteq E$ un subespai vectorial. Sigui $A = A(E, F)$ el conjunt de les aplicacions lineals⁷ $P: E \rightarrow F$ tals que $P(x) = x$ per a tot x de F . Sigui $V = V(E, F)$ el conjunt de les aplicacions lineals $v: E \rightarrow F$ tals que $v(x) = 0$ per a tot x de F . Notem que A i V són subconjunts de l'espai vectorial $L(E, F)$ de les aplicacions lineals de E en F i que V és subespai vectorial. Definim $\delta: A \times A \rightarrow V$ de manera que $\delta(P, Q) = Q - P$. Notem que $Q - P$ és efectivament de V . Llavors (A, V, δ) és un espai afí.

La dimensió d'aquest espai afí és $k(n - k)$, on posem k per denotar la dimensió de F . En efecte, hi ha un isomorfisme natural $L(E/F, F) \leftrightarrow V$ i $L(E/F, F)$ té dimensió $k(n - k)$.

L'isomorfisme $L(E/F, F) \leftrightarrow V$ ve donat per $\bar{v} \mapsto v = \bar{v} \circ \pi$, on $\pi: E \rightarrow E/F$ és la projecció natural (recordem que una aplicació lineal $v: E \rightarrow F$ té la forma $v = \bar{v} \circ \pi$, amb $\bar{v} \in L(E/F, F)$, si i només si $\ker(v) \supseteq F$, és a dir, si i només si $v \in V$).

Remarca. Donada una aplicació lineal $P: E \rightarrow F$ tal que $P(x) = 1$ per a tot $x \in F$, posem $U = \ker P$. Llavors tenim

$$U \cap F = \{0\} \text{ i } \dim(U) = n - k \Leftrightarrow E = U \oplus F.$$

És clar, a més, que $P = \pi_U$, on $\pi_U: E \rightarrow F$ és la *projecció* de E en F corresponent a la descomposició $E = U \oplus F$.

Posant

$$A'(E, F) = \{U \subseteq E \mid U \cap F = \{0\}, \dim(U) = n - k\},$$

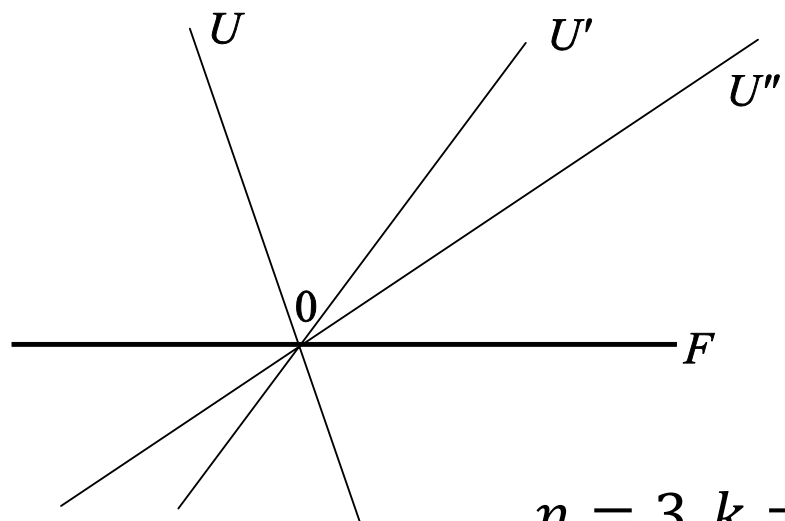
resulta que tenim una bijecció

$$A(E, F) \leftrightarrow A'(E, F), P \mapsto \ker P$$

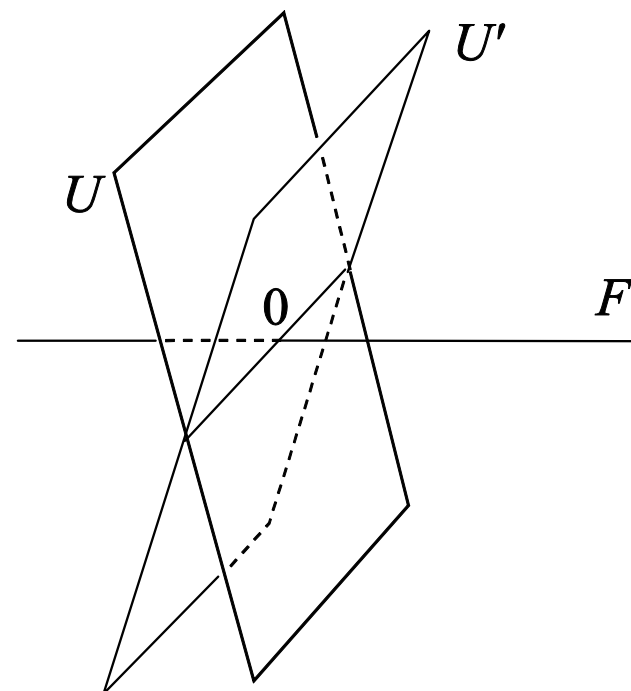
(en l'altre direcció, $\pi_U \leftarrow U$). Per tant, $A'(E, F)$ té estructura d'espai afí de dimensió $k(n - k)$.

Els dibuixos de la pàgina següent ho il·lustren per diversos casos.

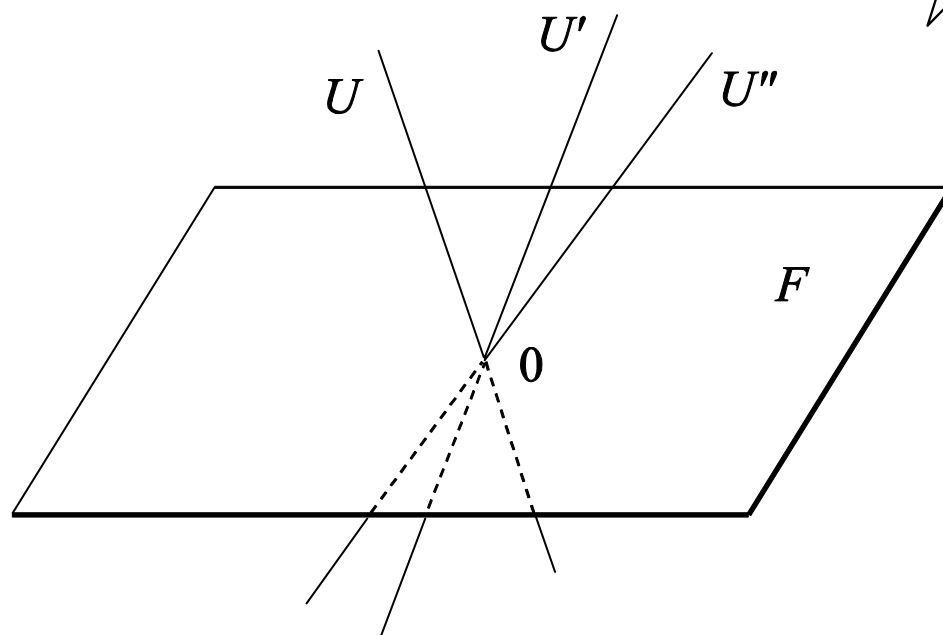
$$n = 2, k = 1$$



$$n = 3, k = 1$$



$$n = 3, k = 2$$



Notes

1. $\mathbb{Q}$ denota el cos dels nombres **racionals**, $\mathbb{R}$ el cos dels nombres **reals** i $\mathbb{C}$ el cos dels nombres **complexos**.

El cos dels **residus** de nombres enters **mòdul** un nombre primer p , $\mathbb{Z}_p$, és un cos de p elements, que usualment denotem $0, 1, \dots, p-1$, però en el benentès que la suma i el producte es fan mòdul p . Per exemple, $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, amb $1 + 1 = 0$; $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$, amb $1 + 2 = 0$, $2 + 2 = 1$ i $2 \cdot 2 = 1$.

Un nombre enter positiu q és el cardinal d'un cos si i només si té la forma $q = p^r$, on p és un nombre primer i r un nombre enter positiu. A més, aquest cos és únic llevat isomorfisme, i es denota $\mathbb{F}_{p^r}$ (es diu que és, en honor al seu descobridor, el *cos de Galois* de p^r elements, i per això també es denota $GF(p^r)$, de les inicials angleses de *Galois Field*).

2. Recordem que un *espai vectorial sobre K* , o un *K -espai vectorial*, és un conjunt E dotat d'una suma $x + y \in E$ definida per a qualssevol $x, y \in E$ i

un producte $\lambda x \in E$ definit per a tot $x \in E$ i tot $\lambda \in K$, amb les propietats següents:

- E és un grup abelià respecte de la suma, és a dir, es compleixen les propietats
 - *associativa*: $(x + y) + z = x + (y + z)$
 - *commutativa*: $x + y = y + x$
 - *element neutre*: Existeix $0 \in E$ tal que $x + 0 = x$ (aquest element 0 és únic)
 - *existència d'oposat*: per a tot $x \in E$, existeix $-x \in E$ amb $x + (-x) = 0$ (no és difícil provar que, per a cada x , l'element $-x$ és únic).
- *distributiva*: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ i $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
(és fàcil veure que $(-1)x = -x$ per a tot $x \in E$).
- *identitat*: $1x = x$.

3. Si $F \subseteq E$, diem que F és un subespai vectorial si $0 \in F$, $x + y \in F$ quan $x, y \in F$ i $\lambda x \in F$ quan $x \in F$ i $\lambda \in K$.

Per exemple, si $e_1, \dots, e_n \in E$, llavors el conjunt

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle_K = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\},$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $e_1, \dots, e_n$, és un subespai vectorial de E .

4. Siguin $P, Q, R \in A$. Llavors, en aquest cas, $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, $\overrightarrow{QR} = R - Q$ i $\overrightarrow{PR} = R - P$, de manera que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (Q - P) + (R - Q) = (R - P) = \overrightarrow{PR}$. Això prova que δ compleix la llei de l'addició.

Fixem ara $P = \mathbf{a} + v \in A$ ($v \in V$). Per un $Q = \mathbf{a} + x \in A$ variable ($\Leftrightarrow x \in V$ variable), $\overrightarrow{PQ} = x - v \in V$, de manera que $\delta_P: A \rightarrow V$ és l'aplicació

$$\mathbf{a} + x \mapsto x - v,$$

que és bijectiva (l'aplicació inversa és $w \mapsto \mathbf{a} + v + w$).

5. Un conjunt G dotat d'una operació interna $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x * y$ és diu que és un **grup** si l'operació $*$ és

- *associativa*: $(x * y) * z = x * (y * z)$, qualssevol que siguin $x, y, z \in G$.
- té *element neutre* e : $e * x = x * e = x$ per a tot $x \in G$.
- tot element $x \in G$ té un simètric x' : $x * x' = x' * x = e$.

L'element neutre és únic. Cada element $x \in G$ té un únic simètric, el qual usualment es denota x^{-1} .

Un subconjunt H de G és un **subgrup** si $e \in H$, $x * y \in H$ quan $x, y \in H$ i $x^{-1} \in H$ quan $x \in H$.

6. Si $(G, *)$ i $(G', \diamond)$ són dos grups, es diu que una aplicació $h: G \rightarrow G'$ és un homomorfisme si i només si $h(x * y) = h(x) \diamond h(y)$ per a qualssevol $x, y \in G$. El *nucli* de h és $\ker(h) = \{x \in G \mid h(x) = e'\}$, on e' és el neutre de G' . És immediat comprovar que $\ker(h)$ és un subgrup de G .

7. Si E i E' són K -espais vectorials i $f: E \rightarrow E'$ una aplicació, diem que f és lineal si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ i $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ qualssevol que siguin $x, y \in E$ i $\lambda \in K$. Adonem-nos que la primera condició és que sigui

un homomorfisme de grups additius. El **nucli** de f , $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$, és un subespai vectorial de E i la **imatge** de f , $\operatorname{im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$, és un subespai de E' .

El conjunt $L(E, E')$ de les aplicacions lineals de E en E' té estructura d'espai vectorial amb les operacions $f + g$ i λf definides per les regles

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ i } (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \text{ per a tot } x \in E \\ (f, g \in L(E, E'), \lambda \in K).$$

Si $e_1, \dots, e_n$ és una base de E i $x'_1, \dots, x'_n$ són vectors arbitraris de E' , existeix una única aplicació lineal $f: E \rightarrow E'$ tal que $f(e_i) = x'_i$.

De fet, si existeix f ha de complir

$$f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 x'_1 + \dots + \lambda_n x'_n,$$

i aquesta relació ens dóna la unicitat i l'existència ja que, en variar $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, la combinació lineal $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ ens dóna tots els vectors de E i, per un x donat, els coeficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ són únics.

Proposició. $\dim L(E, E') = \dim(E) \cdot \dim(E')$.