

## Geometría y Física del espacio-tiempo de Minkowski

por

**Sebastià Xambó**

*A la memoria de Waldyr Alves Rodrigues Jr. (1946–2017),  
cuya obra pervivirá como un ejemplar referente en el  
ámbito de la física matemática.*

**RESUMEN.** El propósito de este artículo es urdir una presentación elemental del espacio-tiempo (en el sentido de Minkowski) que subraye los aspectos geométricos y físicos fundamentales que concurren en su estructura. El lenguaje utilizado es el álgebra lineal y su extensión en el álgebra geométrica. Es el método que nos parece más idóneo para formular y manejar las transformaciones de Lorentz, la electrodinámica relativista y la teoría del electrón de Dirac.

### 1. INTRODUCCIÓN

Este artículo está destinado primariamente a matemáticos interesados en acceder a presentaciones de temas de física matemática (relatividad especial en esta ocasión) usando las estructuras matemáticas que resultan más efectivas para formularlas.

Como punto de partida tomamos el *espacio vectorial lorentziano*  $E_{1,3}$ , esto es, un espacio vectorial real de dimensión 4 dotado de una métrica (forma bilineal simétrica) de signatura  $(1,3)$ , y el espacio afín  $\mathcal{M}$  (*espacio de Minkowski*) cuyo espacio vectorial asociado es  $E_{1,3}$ . Esta estructura, una de las premisas del artículo original de Minkowski [14], incorpora, como se irá viendo, avances debidos a nombres como Maxwell, Lorentz, Poincaré y Einstein, entre otros.

Tal enfoque no debiera sorprender a un lector con formación matemática, acostumbrado seguramente a tomar como punto de partida para el estudio de la geometría euclídea un *espacio vectorial euclidiano*  $E_n$ , esto es, un espacio vectorial real de dimensión  $n$  (tómese  $n = 3$  si se desea reforzar la analogía) dotado de una métrica definida positiva, junto con el correspondiente espacio afín (*espacio euclídeo*). En este caso el enunciado sintetiza la comprensión de la geometría euclídea conseguida a lo largo de milenarios, desde los griegos (Pitágoras, Euclides, Arquímedes, . . . ), pasando por la «revolución analítica» (R. Descartes, B. Pascal, I. Newton, L. Euler, . . . ), y cristalizada con el desarrollo de estructuras álgebro-geométricas «intrínsecas» a partir de aportaciones seminales como las de H. Grassmann y B. Riemann.

La métrica propuesta por Minkowski es, usando sus propios términos, la dada por la forma cuadrática

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2), \quad (1)$$

siendo  $x, y, z$  coordenadas cartesianas rectangulares respecto de una referencia inercial,  $t$  el tiempo relativo a la misma y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Es crucial señalar que  $c$  es una *constante universal*, en el sentido de que *no depende del sistema de referencia inercial en el cual se mida ni de la velocidad del foco emisor*. Este sorprendente hecho es una de las predicciones de la teoría de Maxwell. En efecto, Maxwell encontró que la velocidad  $c$  de las ondas electromagnéticas en el vacío predichas por su teoría debía ser, independientemente del modo de generarlas,  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ , siendo  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  constantes medibles en el laboratorio y cuyo valor es universal (admitiendo el *principio de relatividad* según el cual las leyes físicas tienen la misma forma en cualquier sistema inercial). La conclusión de que la luz es una onda electromagnética, incorporando así la óptica a su teoría, la alcanzó Maxwell al comprobar que el valor numérico de  $c$  coincidía con la velocidad de la luz en el vacío. Además de la predicción teórica, la universalidad de  $c$  se ha verificado, directa o indirectamente, con una variedad de experimentos que van desde el de Michelson-Morley [13] hasta los sofisticados sistemas de GPS actuales (cf. [16]). Digamos también que Einstein tomó el principio de relatividad y la universalidad de  $c$  como axiomas en su trabajo [4], pudiendo así obtener fácilmente las *transformaciones de Lorentz* que relacionan los valores  $x, y, z, t$  relativos a un sistema inercial  $S$  con los valores  $x', y', z', t'$  relativos a otro sistema inercial  $S'$ . Si el tiempo no es absoluto, estas transformaciones se pueden deducir sin suponer la constancia de  $c$ , como se hace por ejemplo en [17].

La relevancia de la métrica de Lorentz radica en que la transformación de Lorentz especial (*boost de Lorentz* según la terminología usual) es una isometría de la misma. Esta afirmación se comprueba con un simple cálculo a partir de la expresión de dicho boost. En unidades tales que  $c = 1$  (lo que equivale a medir las distancias en unidades de tiempo), las ecuaciones del boost de Lorentz son las siguientes (cf. [4]):

$$t = \beta(t' + ux'), \quad x = \beta(x' + ut'), \quad y = y', \quad z = z', \quad (2)$$

siendo  $u$ , que necesariamente ha de cumplir  $|u| < 1$ , la velocidad del sistema inercial  $S'$  respecto del sistema inercial  $S$  y  $\beta = (1 - u^2)^{-1/2}$ . De ello se sigue que las transformaciones de Lorentz, que son composición de rotaciones espaciales y boosts de Lorentz, son isometrías de  $t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ . De hecho son isometrías *propias* (su determinante es  $\beta^2(1 - u^2) = +1$ ) y *ortocronas* (las variaciones de  $t$  y  $t'$  tienen el mismo signo, pues  $\beta > 0$ ). Recíprocamente, una isometría propia y ortocrona es una transformación de Lorentz, pues se constata sin dificultad que compuesta con una rotación apropiada es una isometría (propia y ortocrona) que cumple  $y = y'$ ,  $z = z'$ ,  $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$ , y por consiguiente basta probar, como se detalla a continuación, que esta transformación es un boost de Lorentz.

**PROPOSICIÓN 1.1.** *Sean  $t = \delta t' + \delta' x'$ ,  $x = \xi t' + \xi' x'$  las ecuaciones de una isometría  $f$  propia y ortocrona. Entonces  $f$  es un boost de Lorentz.*

**DEMOSTRACIÓN.** Los coeficientes de la matriz de  $f$  cumplen  $D = \delta \xi' - \delta' \xi = 1$  (por ser propia) y  $\delta > 0$  (por ser ortocrona). Además, por la condición de isometría se tiene la relación  $t'^2 - x'^2 = (\delta t' + \delta' x')^2 - (\xi t' + \xi' x')^2$  idénticamente en  $t'$  y  $x'$ . Igualando

coeficientes, vemos que esta relación es equivalente a las ecuaciones  $\delta^2 - \xi^2 = 1$ ,  $\delta\delta' - \xi\xi' = 0$  y  $\delta'^2 - \xi'^2 = -1$ . La primera ecuación y la condición  $\delta > 0$  nos permiten afirmar que existe un único  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta = \cosh \rho$ ,  $\xi = \operatorname{senh} \rho$ . De la segunda ecuación se infiere que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta' = \lambda\xi = \lambda \operatorname{senh} \rho$  y  $\xi' = \lambda\delta = \lambda \cosh \rho$ . Sustituyendo estos valores en  $D$ , obtenemos  $\lambda = 1$ , con lo cual la tercera ecuación se satisface automáticamente. Así pues la matriz de  $f$  tiene la forma  $\beta \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & 1 \end{pmatrix}$ , con  $\beta = \cosh \rho$  y  $u = \tanh \rho$ . Puesto que  $|u| < 1$  y que  $\beta = (1 - u^2)^{-1/2}$ , está claro que  $f$  es un boost de Lorentz de velocidad  $u$ .  $\square$

En suma, la noción intrínseca que corresponde al grupo de las transformaciones de Lorentz (denotado  $G_c$  en [14]) es el grupo  $\text{SO}_{1,3}^+$  de las isometrías propias y ortocronas de  $E_{1,3}$ . Es un subgrupo normal del grupo  $O_{1,3}$  de las *isometrías* de  $E_{1,3}$  y del subgrupo  $\text{SO}_{1,3} \subset O_{1,3}$  de las isometrías propias. La esencia de la *relatividad especial* es el estudio de los conceptos y relaciones que son invariantes por la acción de  $\text{SO}_{1,3}^+$ . Se trata, pues, de un caso particular de geometría de Klein, pero su mismo origen explica su extraordinario potencial para expresar enunciados de contenido geométrico y físico. Es lo que tratamos de mostrar en las páginas que siguen.

## 2. VOCABULARIO BÁSICO

A los puntos de  $\mathcal{M}$  es costumbre llamarlos *sucesos* (*events* en inglés) y aquí serán denotados con letras mayúsculas. Los elementos de  $E_{1,3}$  son denominados *vectores*, y los denotamos por letras minúsculas (o mayúsculas con un punto cuando sean derivadas de puntos variables). Este reparto de papeles es necesario, lo mismo que en geometría euclídea, para garantizar que no existen sucesos (o puntos) privilegiados. La *separación vectorial* entre dos sucesos  $P$  y  $Q$ , denotada  $Q - P$ , es el único vector  $a$  tal que  $Q = P + a$ . Recordemos que en un espacio afín la suma de puntos no está definida, y que  $P+0 = P$  y  $(P+a)+b = P+(a+b)$  para todo punto  $P$  y cualesquiera vectores  $a$  y  $b$ . Si usamos  $\eta$  para denotar la métrica de  $E_{1,3}$ , la *separación escalar* (o, simplemente, *separación*) entre dos sucesos  $P$  y  $Q$ , denotada  $\sigma(P, Q)$ , se define como  $\eta(a) = \eta(a, a)$ , siendo  $a = Q - P$ . Como se puede anticipar por lo que se ha dicho, y como veremos después, la noción de separación juega un papel fundamental en la cronometría y geometría relativistas.

Para estudiar las propiedades de la separación, procede pues estudiar las propiedades de  $\eta$ . Dado  $a \in E_{1,3}$ , sea  $\epsilon_a$  el signo de  $\eta(a)$ . La *magnitud* de  $a$ , denotada  $|a|$ , se define como el número no negativo  $|a| = +\sqrt{\epsilon_a \eta(a)}$ . Esta definición, que equivale a  $\eta(a) = \epsilon_a |a|^2$ , es válida para cualquier métrica de un espacio vectorial real y coincide con la *longitud* o *norma* de un vector en el caso de un espacio euclidiano  $E_n$ . De los vectores de magnitud 1 diremos que son *unitarios*.

Un vector  $a \in E_{1,3}$  se dice que es *positivo* cuando  $\eta(a) > 0$ ; *negativo* cuando  $\eta(a) < 0$ ; y *nulo* o *isótropo* cuando  $\eta(a) = 0$ . Si  $a$  es un vector no nulo,  $a/|a|$  es un vector unitario, y de este vector se dice que es la *normalización* de  $a$ . Nótese que un vector es nulo si y sólo si su magnitud es nula. Por razones históricas (aclaradas más adelante), de los vectores positivos, negativos y nulos se dice también que son *temporales, espaciales y lumínicos*, respectivamente.

Si  $a, b \in E_{1,3}$  y  $\eta(a, b) = 0$ , decimos que  $a$  y  $b$  son ortogonales. Si  $a$  es un vector no isótropo,  $a^\perp = \{x \in E_{1,3} : \eta(a, x) = 0\}$  tiene dimensión 3 y contiene vectores no isótropos  $a'$ . Prosiguiendo recursivamente, obtenemos una base  $a, a', a'', a'''$  de  $E_{1,3}$  cuyos vectores son dos a dos ortogonales (decimos que es una *base ortogonal*). Normalizando estos vectores, obtenemos una base de vectores unitarios dos a dos ortogonales (*base ortonormal*). Dado que la signatura de  $\eta$  es  $(1, 3)$ , en una base ortogonal uno de los vectores es positivo y los demás negativos. Cambiando el orden si hace falta, podemos suponer que el primero es positivo y los restantes negativos.

En lo que sigue supondremos que  $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  es una base ortonormal con  $\gamma_0$  positivo. De tales bases se dice que son *referencias inerciales*, o simplemente *referencias*. Con el uso de los símbolos  $\gamma_\mu$  seguimos la práctica de muchos autores que los escogen para subrayar su estrecha relación con las matrices  $\Gamma$  de Dirac (esta relación se detalla en una sección posterior). También seguiremos el *criterio de sumación de Einstein* (un índice repetido comporta una sumación respecto del mismo, a no ser que se indique lo contrario) y la convención de que los índices designados con letras griegas varían en el conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ , mientras que los indicados por letras latinas lo hacen en  $\{1, 2, 3\}$ . Por ejemplo, si las componentes de un vector  $a \in E_{1,3}$  se denotan  $a^\mu$ , entonces  $a = a^\mu \gamma_\mu$ , mientras que  $a^k \gamma_k = a - a^0 \gamma_0$ . En lugar de  $a^0$ , también se suele usar  $t$ , y  $x, y, z$  en lugar de  $a_1, a_2, a_3$ . Por ejemplo,  $\eta(a) = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$  tiene el mismo significado que

$$\eta(a) = \eta(a^\mu \gamma_\mu) = (a^0)^2 - ((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2).$$

Estas expresiones de  $\eta(a)$  nos permiten concluir que  $H = \{a \in E_{1,3} : \eta(a) = 1\}$  es un hiperboloide de dos hojas. Con referencia a la base  $\gamma$ , estas hojas se distinguen por el signo de  $t$ , pero *este signo no es intrínseco*, ya que si cambiamos  $\gamma_0$  por  $-\gamma_0$  entonces  $t$  cambia a  $-t$ . Esta indeterminación (entre dos posibles orientaciones temporales indistinguibles) compelle a escoger una de las dos (llamémosla  $H^+$ ) como orientación temporal positiva. Esto en la práctica significa que sólo se usarán bases  $\gamma$  que cumplan  $\gamma_0 \in H^+$ . También supondremos, para tener en cuenta las conclusiones al final de la Introducción, que dos cualesquiera de estas bases (digamos  $\gamma$  y  $\gamma'$ ) tienen la misma orientación global, pues las dos suposiciones juntas equivalen a que la isometría determinada por  $\gamma \mapsto \gamma'$  es propia y ortocrona. Como se verá,  $H^+$  juega un papel análogo al de la esfera  $S^2$  de  $E_3$  y es por ello que lo llamaremos *esfera de Lorentz*. También pondremos  $F^+ = \mathbb{R}^+ H^+ = \{\lambda u : u \in H^+, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$  (sus elementos son los vectores no nulos orientados al *futuro*) y  $F^- = -F^+$  (vectores orientados al *pasado*). El abierto  $F^+ \cup F^-$  es el interior del *cono de luz*  $\mathcal{C} = \{a \in E : \eta(a) = 0\}$ . El exterior de  $\mathcal{C}$  es el allende (v. Figura 1 (a)).

La proposición y corolarios que siguen son la contrapartida matemática en que se basa la explicación de fenómenos relativistas poco intuitivos en el marco de la experiencia ordinaria, como por ejemplo el retraso de los relojes en movimiento y, en particular, la llamada paradoja de los mellizos.

**PROPOSICIÓN 2.1** (Desigualdad de Schwarz hiperbólica). (1) *Si  $a, b \in F^+$ , entonces  $\eta(a, b) \geq |a||b|$ .*

(2) *La igualdad ocurre si y sólo si  $b = \lambda a$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .*

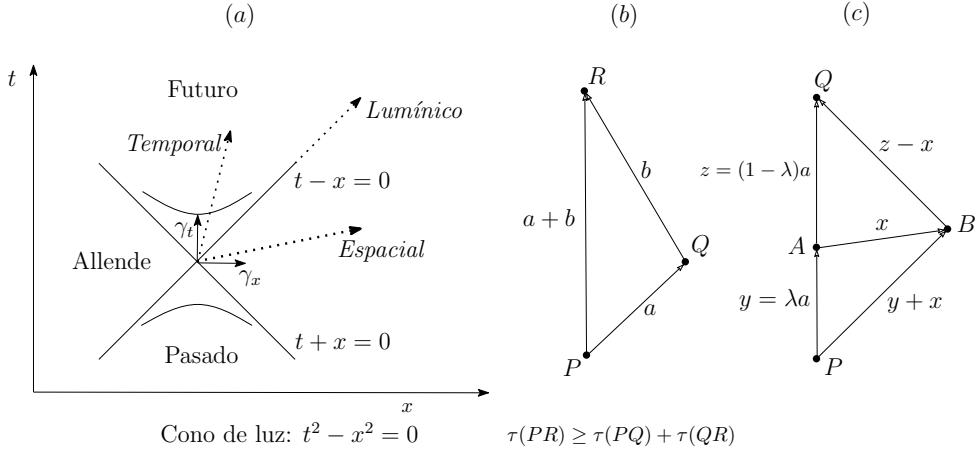


Figura 1: (a) Esfera de Lorentz y tipos de vectores. (b) Desigualdad triangular hiperbólica (Corolario 2.4 y Ejemplo 2.5). (c) Medida de la distancia espacial  $AB$  con fotones  $(PB$  y  $BQ)$  y relojes en el segmento temporal  $PQ$  (Ejemplo 2.7).

**DEMOSTRACIÓN.** (1) No se pierde generalidad suponiendo que  $a, b \in H^+$ , esto es,  $\eta(a) = \eta(b) = 1$  y  $a^0, b^0 > 0$  ( $\gamma_0$ -componentes). Pongamos  $\bar{a} = a - a^0\gamma_0$ ,  $\bar{b} = b - b^0\gamma_0$ ,  $\alpha = |\bar{a}|$  y  $\beta = |\bar{b}|$ , con lo cual  $-\eta(\bar{a}) = \alpha^2$ ,  $-\eta(\bar{b}) = \beta^2$  y  $-\eta(\bar{a}, \bar{b}) \leq \alpha\beta$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  (pues  $-\eta$  es positiva en  $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$  y por tanto podemos aplicarle la desigualdad de Schwarz ordinaria). Dado que  $1 = \eta(a) = (a^0)^2 + \eta(\bar{a}) = (a^0)^2 - \alpha^2$ , se tiene  $(a^0)^2 = 1 + \alpha^2$ , y análogamente  $(b^0)^2 = 1 + \beta^2$ . De ahí que  $\eta(a, b) = a^0b^0 + \eta(\bar{a}, \bar{b}) \geq a^0b^0 - \alpha\beta$ . Pero  $(a^0)^2(b^0)^2 = (1 + \alpha^2)(1 + \beta^2) = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 \geq 1 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 = (1 + \alpha\beta)^2$ , es decir,  $a^0b^0 \geq 1 + \alpha\beta$ . Por tanto,  $\eta(a, b) \geq 1$ .

(2) Suponiendo que  $a$  y  $b$  son unitarios, se trata de ver que la igualdad se cumple si y sólo si  $a = b$ . Para que se cumpla la igualdad, las dos desigualdades utilizadas en la demostración tienen que ser una igualdad. La segunda es una igualdad si y sólo si  $\alpha = \beta$ , y esto nos da  $a_0 = b_0$ , pues  $a_0^2 = 1 + \alpha^2 = 1 + \beta^2 = b_0^2$ . Por otra parte, la igualdad  $-\eta(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha\beta$  se cumple si y sólo si  $\bar{a} = 0$  o  $\bar{b} = 0$  o  $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ ,  $\lambda > 0$ , y es inmediato comprobar que en todos estos casos se tiene  $a = b$ : si  $\bar{a} = 0$ , entonces  $\bar{b} = 0$ , pues  $\beta = \alpha = 0$ , de donde  $a = a_0\gamma_0 = b_0\gamma_0 = b$ ; el caso  $\bar{b}$  es análogo; y en el tercer caso,  $\beta = |\bar{b}| = \lambda|\bar{a}| = \lambda\alpha$ , de donde  $\lambda = 1$  y  $a = a_0\gamma_0 + \bar{a} = b_0\gamma_0 + \bar{b} = b$ .  $\square$

**COROLARIO 2.2 (Ángulo hiperbólico).** Si  $a, b \in F^+$ , existe un único número real positivo  $\delta$  tal que  $\cosh(\delta) = \eta(a, b)/(|a||b|)$ . Diremos que  $\delta$  es el **ángulo hiperbólico** formado por  $a$  y  $b$ , y pondremos  $\delta(a, b)$  para denotarlo.

**COROLARIO 2.3 (Teorema del coseno hiperbólico).** Si  $a, b \in F^+$ , y ponemos  $\delta = \delta(a, b)$ , entonces  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b|\cosh(\delta)$ . En particular tenemos que  $a + b \in F^+$ .

**COROLARIO 2.4 (Desigualdad triangular hiperbólica).** Si  $a, b \in F^+$ , entonces  $|a + b| \geq |a| + |b|$ , valiendo la igualdad si y sólo si  $b = \lambda a$ ,  $\lambda > 0$ .

Necesitamos también unas nociones básicas de *cinemática y cronometría relativistas*. Sea  $X = X(s) \in \mathcal{M}$ ,  $s \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , con  $X(s)$  dos veces diferenciable con continuidad respecto de  $s$ . Dado que el espacio tangente  $T_X\mathcal{M}$  a  $\mathcal{M}$  en cualquier suceso  $X$  es canónicamente isomorfo a  $E_{1,3}$ , se tiene que  $dX/ds \in E_{1,3}$ . Diremos que  $X(s)$  es una *historia*, o *línea de universo*, si  $dX/ds \in F^+$ . Nótese que esta condición es invariante por reparametrizaciones  $s = s(\tau)$  estrictamente crecientes, pues en tal caso  $dX/d\tau = (dX/ds)(ds/d\tau)$  y  $ds/d\tau > 0$ . El *tiempo propio* de una historia  $X(s)$  es la función  $\tau : [a, b] \rightarrow [0, T]$  definida por

$$\tau(\xi) = \int_0^\xi |dX/ds| ds = \int_0^\xi \eta(dX/ds)^{1/2} ds, \quad T = \tau(b). \quad (3)$$

Siendo  $\tau(s)$  una función estrictamente creciente de  $s$ , podemos considerar su inversa,  $s = s(\tau)$ ,  $\tau \in [0, T]$ , y la parametrización  $X(\tau) = X(s(\tau))$ . Entonces  $dX/d\tau$ , que denotamos  $\dot{X}$ , cumple  $\dot{X} \in H^+$ , y en particular  $\eta(\dot{X}) = 1$ :

$$\dot{X} = dX/d\tau = (dX/ds)(ds/d\tau) = (dX/ds)/(d\tau/ds) = (dX/ds)/|dX/ds|.$$

Físicamente,  $\tau(s)$  se interpreta como el tiempo marcado por el cronómetro que viaja con la historia y puesto a 0 en  $X(a)$ . Como el tiempo propio  $\tau(b)$  sólo depende de la curva  $\mathcal{X}$  trazada por  $X(s)$ , podemos poner  $\tau(\mathcal{X})$  para indicarlo.

**EJEMPLO 2.5** (Teorema de los mellizos). Sean  $P, Q \in \mathcal{M}$  y supongamos que  $a = Q - P \in F^+$ . Entonces  $X(s) = P + sa$ ,  $s \in [0, 1]$  (geométricamente es la parametrización del segmento  $PQ$  que une  $P$  y  $Q$ ) es una historia y  $\tau(s) = s|a|$ , ya que  $dX/ds = a$  para todo  $s$  y  $\eta(dX/ds)^{1/2} = |a|$ . En particular,  $\tau(PQ) = |a|$ . De este tipo de historias diremos que son *uniformes* o *rectilíneas*. Si  $b \in F^+$ , y ponemos  $R = Q + b = P + (a+b)$ , entonces  $a + b \in F^+$  y se tiene  $\tau(PR) \geq \tau(PQ) + \tau(QR)$  con igualdad si y sólo si  $Q \in PR$  (v. Figura 1 (b)). En efecto,  $\tau(PQ) = |a|$ ,  $\tau(QR) = |b|$ ,  $\tau(PR) = |a + b|$ , y sabemos que  $|a + b| \geq |a| + |b|$ , con igualdad si y sólo si  $b = \lambda a$ ,  $\lambda > 0$ .

Con las mismas notaciones que para las historias, diremos que  $X(s)$  es un *trayecto* si  $dX/ds$  es negativo (o espacial). Esta condición es también invariante por reparametrizaciones  $s = s(\rho)$  estrictamente crecientes y el *recorrido propio* del trayecto  $X(s)$  es la función  $\rho : [a, b] \rightarrow [0, T]$  definida por

$$\rho(\xi) = \int_0^\xi |dX/ds| ds = \int_0^\xi (-\eta(dX/ds))^{1/2} ds, \quad T = \rho(b). \quad (4)$$

Como el recorrido propio  $\rho(b)$  sólo depende de la curva  $\mathcal{X}$  trazada por  $X(s)$ , podemos poner  $\rho(\mathcal{X})$  para indicarlo. En el caso de un recorrido uniforme ( $X(s) = P + sa$ ,  $\eta(a) < 0$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $Q = P + a$ ),  $\rho(PQ) = |a|$ .

**OBSERVACIÓN 2.6** (Significado del tiempo propio). El tiempo propio de un segmento infinitesimal  $X(s)X(s+ds)$  de una historia  $X(s)$  es

$$\tau(X(s)X(s+ds)) = |X(s+ds) - X(s)| = ds |dX/ds| = ds \eta(dX/ds)^{1/2},$$

que es el integrando de (3). Por tanto, el tiempo propio es la integral de tiempos propios uniformes infinitesimales.

Una historia  $X(s)$  es *lumínica* si el vector  $dX/ds \in \mathcal{C}$  (cono de luz). En este caso no existe ningún parámetro distinguido en general. Físicamente, son las historias de los fotones o de las partículas de masa 0, y las curvas que trazan son generatrices de  $\mathcal{C}$ .

EJEMPLO 2.7 (Medida de recorridos con relojes y fotones). Sean  $P, Q \in \mathcal{M}$  y supongamos que  $a = Q - P$  es positivo (temporal). Sea  $A = P + \lambda a$ ,  $0 < \lambda < 1$  y  $B \in \mathcal{M}$  un suceso tal que  $B - P$  y  $Q - B$  son lumínicos (v. Figura 1 (c)). Entonces  $x = B - A$  es espacial y  $\rho(AB)^2 = \tau(PA)\tau(AQ)$ . En efecto, de las hipótesis se desprende directamente que  $\tau(PA) = \lambda|a|$ ,  $\tau(AQ) = (1 - \lambda)|a|$ ,  $\eta(\lambda a + x) = 0$  y  $\eta((1 - \lambda)a - x) = 0$ . Las dos últimas ecuaciones nos dan las relaciones

$$\eta(x) + \lambda^2\eta(a) + 2\lambda\eta(a, x) = 0 \quad \text{y} \quad \eta(x) + (1 - \lambda)^2\eta(a) - 2(1 - \lambda)\eta(a, x) = 0.$$

Multiplicando la primera por  $1 - \lambda$ , la segunda por  $\lambda$  y sumando, se obtiene

$$\eta(x) + \lambda(1 - \lambda)\eta(a) = 0.$$

Por tanto  $\eta(x) = -\lambda(1 - \lambda)\eta(a) < 0$  (esto prueba que  $x$  es espacial) y

$$\rho(AB)^2 = \lambda(1 - \lambda)\eta(a) = \lambda(1 - \lambda)|a|^2 = \tau(PA)\tau(AQ).$$

### 3. ÁLGEBRA DE DIRAC

En su búsqueda de un tratamiento cuántico del espín del electrón, Pauli redescubrió el álgebra geométrica de  $E_3$ , pero disfrazada como una representación en el álgebra de matrices complejas  $2 \times 2$  (v. [15]). Desafortunadamente, este embozo matricial oculta la rica estructura del álgebra que representa y hace aparecer equívocamente la unidad imaginaria  $\sqrt{-1}$  como ingrediente necesario para la teoría cuántica del espín. Un acontecimiento parecido se repitió un año después, cuando Dirac redescubrió, en su búsqueda de una ecuación relativista del electrón, el álgebra geométrica de  $E_{1,3}$ , esta vez disfrazada como una representación en el álgebra de matrices complejas  $4 \times 4$  (v. [2]). Este trabajo fue un gran paso, ya que poco después Dirac lo usó para predecir la existencia del *positrón* (antipartícula del electrón detectada por C. D. Anderson en 1932), pero su máscara matricial y el equívoco sobre el papel de  $\sqrt{-1}$  no favorecieron el aprecio del álgebra geométrica como el medio más idóneo para formular dichas teorías, o para poder descubrir nuevas proposiciones, como por ejemplo la admirable relación que existe entre las dos álgebras.

El hilo conductor en lo que sigue de este artículo es describir la estructura y manejo efectivo del álgebra geométrica  $\mathcal{D}$  de  $E_{1,3}$  (*álgebra de Dirac*), así como indicar sus aplicaciones a las temáticas anunciadas en el resumen inicial. Aunque  $\mathcal{D}$  es un caso particular del álgebra geométrica en el sentido de [19], en la exposición que sigue se minimizan las referencias a este artículo aportando diversas construcciones y argumentos que resultan más simples en este caso particular. Para simplificar las notaciones, ponemos  $E = E_{1,3}$ .

**D.1. REGLA DE CONTRACCIÓN Y RELACIONES DE CLIFFORD.** La  $\mathbb{R}$ -álgebra  $\mathcal{D}$  es *asociativa* y *unitaria*, contiene a  $E$  como subespacio vectorial de modo que  $\mathbb{R} \cap E = \{0\}$ , y está generada, como  $\mathbb{R}$ -álgebra, por  $\mathbb{R}$  y  $E$ . El producto de  $\mathcal{D}$ , llamado *producto geométrico*, se denota por simple yuxtaposición de sus factores. Si  $a \in E$ ,  $a^2 = \eta(a)$  (*regla de contracción de Clifford*). Éstas son las propiedades básicas de  $\mathcal{D}$ , ya que, como se irá viendo en esta sección, las demás propiedades se deducen de ellas.

La regla de contracción implica las *relaciones de Clifford*:  $ab + ba = 2\eta(a, b)$ , cualesquiera que sean  $a, b \in E$ . El argumento es muy simple: basta igualar  $\eta(a+b) = \eta(a) + \eta(b) + 2\eta(a, b) = a^2 + b^2 + 2\eta(a, b)$ , que resulta de la bilinealidad de  $\eta$ , con  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$ , y simplificar los términos comunes. Nótese que la relación de Clifford para  $b = a$  equivale a la regla de contracción. La aplicación más importante de la regla de contracción es que si  $a$  es no isótropo ( $\eta(a) \neq 0$ ), entonces  $a$  es *invertible* y  $a^{-1} = a/\eta(a)$ . Análogamente, la consecuencia más útil de las relaciones de Clifford es que *dos vectores*  $a, b \in E$  *anticommutan* (es decir,  $ab = -ba$ ) *si y sólo si son ortogonales*. Para referirnos a este enunciado diremos que es la *regla de anticomutación*.

**D.2. FÓRMULA DE ARTIN.** Sea  $\gamma_I = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_l}$  para cualquier secuencia  $i_1, \dots, i_l \in N = \{0, 1, 2, 3\}$ , conviniendo que  $\gamma_\emptyset = 1$ . En particular tenemos  $2^4 = 16$  productos con  $i_1 < \cdots < i_l$ ,  $l = 0, \dots, 4$  (de tales secuencias  $I$  se dice que son *multiíndices* y ponemos  $\mathcal{I}$  para denotar el conjunto que forman). También ponemos  $\eta_I = \eta(\gamma_{i_1}) \cdots \eta(\gamma_{i_l}) = (-1)^{s(I)}$ , siendo  $s(I)$  el número de los índices  $i$  de  $I$  tales que  $\eta(\gamma_i) = -1$ .

**PROPOSICIÓN 3.1.** (1) Si  $I, J \in \mathcal{I}$ ,

$$\gamma_I \gamma_J = (-1)^{t(I, J)} \eta_{I \cap J} \gamma_{I \Delta J},$$

siendo  $I \Delta J$  la diferencia simétrica (ordenada) de  $I$  y  $J$ , y  $t(I, J)$  el número de inversiones en la secuencia  $I, J$  que resulta de concatenar  $I$  y  $J$ .

(2) En particular,  $\gamma_I^2 = (-1)^{l//2} \eta_I = (-1)^{s(I)+l//2}$ , siendo  $l//2 = \lfloor l/2 \rfloor$  el cociente entero de  $l = |I|$  por 2.

**DEMOSTRACIÓN.** (1) El signo  $(-1)^{t(I, J)}$  resulta de aplicar la regla de anticomutación repetidamente hasta conseguir ordenar  $I, J$  en orden no decreciente, el signo  $\eta_{I \cap J}$  resulta de aplicar la regla de contracción a los vectores repetidos, y lo que queda es claramente  $\gamma_{I \Delta J}$ .

(2) Se tiene  $t(I, I) = \binom{l}{2}$ , con  $l = |I|$ , y  $\eta_I = (-1)^{s(I)}$ , de modo que  $\gamma_I^2 = (-1)^{s(I)+\binom{l}{2}}$ , y ahora basta observar que  $\binom{l}{2}$  tiene la misma paridad que  $l//2$ .  $\square$

Es un buen momento para introducir  $\mathbf{i} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_{0123}$ , al que llamamos *seudoscalar*. Sus dos propiedades fundamentales son que *anticommuta con los vectores* (basta comprobar que anticommuta con los vectores  $\gamma_\mu$  de la base) y que  $\mathbf{i}^2 = -1$  (pues  $s(0123) = 3$  y  $4//2 = 2$ ). Otro ejemplo es que si  $\gamma_{ijk}^2 = 1$ , necesariamente ha de ser  $ijk = 123$ , pues  $(3//2 = 1$  y por tanto  $s(ijk)$  ha de ser impar).

**D.3. BASE DE CLIFFORD.** Necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

**LEMA 3.2.** (1) *Para todo  $I \neq \emptyset$ ,  $\gamma_I \neq \pm 1$ .* (2) *Si  $I \neq J$ , entonces  $\gamma_I \neq \pm \gamma_J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** (1) Si  $\gamma_I = \pm 1$ ,  $\gamma_I^2 = 1$ . Esto descarta los  $I$  tales que  $\gamma_I^2 = -1$ . Es además inmediato que  $\gamma_I = \pm 1$  sólo puede ocurrir si  $|I| > 2$ : es claro que  $\gamma_0 \neq \pm 1$ ; y si fuese  $\gamma_j \gamma_k = \pm 1$  ( $j \neq k$ ), entonces tendríamos la contradicción  $\gamma_j = \pm \gamma_k$ . El único caso que queda por discutir, por los ejemplos ya vistos, es  $\gamma_{123}$ . Pero éste también se descarta fácilmente: si fuese  $\gamma_{123} = \pm 1$ , multiplicando por  $\gamma_0$  a la izquierda tendríamos  $\mathbf{i} = \pm \gamma_0$ , que no puede ocurrir, ya que  $\mathbf{i}^2 = -1$  y  $(\pm \gamma_0)^2 = \gamma_0^2 = 1$ .

(2) La igualdad  $\gamma_I = \pm \gamma_J$  implica que  $\pm 1 = \gamma_I^2 = \pm \gamma_I \gamma_J = \pm \gamma_I \Delta J$ , y por (1) esto sólo es posible si  $I \Delta J = \emptyset$ , es decir, si  $I = J$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.3.** *El conjunto  $B = \{\gamma_I : I \in \mathcal{I}\}$  es linealmente independiente.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que se verifica una relación lineal  $\sum_I \lambda_I \gamma_I = 0$ . Queremos mostrar que entonces  $\lambda_I = 0$  para cualquier  $I$ . A tal fin, bastará ver que  $\lambda_\emptyset = 0$ , pues el lema anterior asegura que si multiplicamos la relación inicial por un  $\gamma_I$  cualquiera, entonces se obtiene una relación similar cuyo término  $\gamma_\emptyset$  tiene coeficiente  $\pm \lambda_I$ .

Para cada índice  $k$ , la relación original implica  $\sum_I \lambda_I \gamma_k \gamma_I \gamma_k^{-1} = 0$ . Dado que  $\gamma_k$  commuta o anticommuta con  $\gamma_I$ , es inmediato inferir la relación  $\sum_I \lambda_I \gamma_I = 0$  en la que la suma se extiende a los  $\gamma_I$  que commutan con todos los  $\gamma_k$ . Ahora notemos que  $\gamma_I$  anticommuta con cualquiera de sus factores cuando  $|I|$  es par y positivo, y que anticommuta con cualquier  $\gamma_k$  tal que  $k \notin I$  cuando cuando  $|I|$  es impar. Puesto que tales  $k$  existen (cualquier  $k \in N - I \neq \emptyset$ , pues  $|N| = 4$ ), sólo queda la relación  $\lambda_\emptyset = 0$ , como se quería ver.  $\square$

**COROLARIO 3.4.** *B es una base de  $\mathcal{D}$  y por tanto  $\dim \mathcal{D} = 16$ .* Nos referiremos a  $B$  como la base de Clifford de  $\mathcal{D}$  asociada a  $\gamma$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Dado que  $\mathcal{D}$  está generada por  $\mathbb{R}$  y  $E$ , todo elemento de  $\mathcal{D}$  es una combinación lineal de productos de vectores, y por tanto de productos de la forma  $\gamma_J = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_l}$ ,  $j_1, \dots, j_l \in N$ . Este producto se puede reordenar en orden no decreciente de los índices, salvo un signo, aplicando la regla de anticommutación. A continuación se pueden simplificar los vectores repetidos por la regla de contracción, lo cual conlleva a lo más un cambio de signo, así que  $\gamma_J$  es igual a  $\pm \gamma_I$ , con  $\gamma_I \in B$ . Esto prueba que  $B$  es un sistema de generadores de  $\mathcal{D}$  como espacio vectorial. Pero, por la proposición anterior, los elementos de  $B$  son linealmente independientes.  $\square$

**D.4. PRODUCTO EXTERIOR.** Consideraremos la aplicación  $A : E^l \rightarrow \mathcal{D}$  tal que

$$A(e_1, \dots, e_l) = \frac{1}{l!} \sum_p (-1)^{t(p)} e_{p_1} \cdots e_{p_l},$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones  $p$  de  $\{1, \dots, l\}$  y siendo  $t(p)$  el número de inversiones en  $p$ . Esta aplicación es multilinear alternada y por tanto induce una única aplicación lineal  $\text{gr} : \Lambda^l E \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $\text{gr}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_l) = A(e_1, \dots, e_l)$ .

Puesto que el producto geométrico de vectores dos a dos ortogonales es alternado, resulta en particular que para todo multiíndice  $I$  de longitud  $l$  se tiene  $\text{gr}(\gamma_I) = \gamma_I$ , siendo  $\gamma_I = \gamma_{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{i_l}$ . Dado que los  $l$ -vectores  $\gamma_I$ ,  $|I| = l$ , forman una base de  $\Lambda^l E$ , si ponemos  $\mathcal{D}^l = \langle \gamma_I : |I| = l \rangle$  tenemos que  $\text{gr}$  establece un isomorfismo lineal canónico  $\Lambda^l E \simeq \mathcal{D}^l$ . En particular resulta que  $\mathcal{D}^l$  no depende de la base ortonormal  $\gamma$ , de modo que la descomposición lineal  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 + \mathcal{D}^1 + \mathcal{D}^2 + \mathcal{D}^3 + \mathcal{D}^4$  es canónica. El isomorfismo lineal graduado canónico resultante  $\Lambda E \simeq \mathcal{D}$  permite injertar el producto exterior de  $\Lambda E$  en  $\mathcal{D}$ . De este modo  $\mathcal{D}$  se enriquece con otra estructura de álgebra asociativa y unitaria, a cuyo producto seguiremos llamando *producto exterior*, y denotándolo  $\wedge$ . En el cálculo de un producto exterior, interviene, en última instancia, la regla  $\gamma_I = \gamma_I$ , que por definición es válida para la base de Clifford. Recordemos también que el producto exterior es *graduado* y *anticonmutativo*: si  $x \in \mathcal{D}^l$  e  $y \in \mathcal{D}^m$ , entonces  $x \wedge y \in \mathcal{D}^{l+m} E$  y  $x \wedge y = (-1)^{rs} y \wedge x$ .

**D.5. MULTIVECTORES.** La copia del producto exterior de  $\Lambda E$  en  $\mathcal{D}$  nos faculta para usar la terminología habitual del álgebra exterior en  $\mathcal{D}$ . Por ejemplo, de los elementos de  $\mathcal{D}$  se dice que son *multivectores* y de los de  $\mathcal{D}^l$ , que son  $l$ -vectores. También se dice que  $l$  es el *grado* de los elementos de  $\mathcal{D}^l$ . Los  $l$ -vectores no nulos de la forma  $e_1 \wedge \cdots \wedge e_l$  se denominan *l-aspas* (o bien  $l$ -vectores *descomponibles*). Los 0-vectores son los *escalares*, pues  $\mathcal{D}^0 = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$ . Los 1-vectores son los elementos de  $E$ , pues  $\mathcal{D}^1 = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle = E$ , y se les llama simplemente *vectores*. En lugar de 2-vectores y 3-vectores es usual decir *bivectores* y *trivectores*. Los 4-vectores forman un espacio de dimensión 1 y sus elementos son los *seudoescalares*:  $\mathcal{D}^4 = \langle \mathbf{i} \rangle$ .

La métrica  $\eta$  se extiende de manera natural a una métrica de  $\Lambda E$ , y por tanto de  $\mathcal{D}$ , que seguimos denotando  $\eta$ . Tal extensión queda caracterizada por dos condiciones: que los espacios  $\mathcal{D}^l$  y  $\mathcal{D}^m$  sean ortogonales para  $l \neq m$  y que el producto escalar de dos aspas del mismo grado venga dado por la llamada *fórmula de Gram*, que aquí será suficiente escribir para grado 2:

$$\eta(e_1 \wedge e_2, e'_1 \wedge e'_2) = \begin{vmatrix} \eta(e_1, e'_1) & \eta(e_1, e'_2) \\ \eta(e_2, e'_1) & \eta(e_2, e'_2) \end{vmatrix}, \quad \eta(e_1 \wedge e_2) = \begin{vmatrix} \eta(e_1) & \eta(e_1, e_2) \\ \eta(e_2, e_1) & \eta(e_2) \end{vmatrix}.$$

En particular, resulta que  $\eta(\gamma_I, \gamma_J) = 0$  si  $I \neq J$  y  $\eta(\gamma_I) = (-1)^{s(I)}$ . Por ejemplo,  $\eta(\gamma_0 \wedge \gamma_1) = \eta(\gamma_0)\eta(\gamma_1) - \eta(\gamma_0, \gamma_1)^2 = -1$  y  $\eta(\gamma_0 \wedge \gamma_1, \gamma_0 \wedge \gamma_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ . Vemos pues que la base de Clifford es ortonormal. Por otra parte, comparando la fórmula para  $\gamma_I^2$  y la de  $\eta(\gamma_I)$ , vemos que se tiene la relación

$$\gamma_I^2 = (-1)^{l/2} \eta(\gamma_I), \quad l = |I|. \tag{5}$$

**D.6. PRODUCTO INTERIOR.** El álgebra  $\mathcal{D}$  está dotada de otro producto bilineal,  $x \cdot y$ , denominado *producto interior*. No es ni asociativo ni unitario, pero es, como veremos, un ingrediente fundamental. Debido a la bilinealidad, basta que lo definamos para dos elementos de la base de Clifford.

Pongamos  $l = |I|$  y  $m = |J|$ . Las reglas para el cálculo de  $x = \gamma_I \cdot \gamma_J$  son las siguientes: Si  $l = 0$  o  $m = 0$ ,  $x = 0$ ; esto es,  $1 \cdot \gamma_J = \gamma_I \cdot 1 = 0$  (esta regla puede parecer

un poco extraña, pero es la que conviene para garantizar la validez sin excepciones de fórmulas que se verán luego). Si  $l, m \geq 1$ , entonces  $x = \gamma_I \gamma_J$  si  $I \subseteq J$  o  $J \subseteq I$ , y  $x = 0$  en cualquier otro caso. La explicación de esta regla es que si fijamos  $l$  y  $m$ , entonces el grado de  $\gamma_I \gamma_J$  es  $l + m - 2\nu$ , siendo  $\nu = |I \cap J|$ , de modo que el mínimo grado posible es cuando  $\nu$  es máximo, lo cual ocurre precisamente cuando  $I \subseteq J$  (y entonces el grado es  $m - l$ ) o  $J \subseteq I$  (y entonces el grado es  $l - m$ ). En definitiva,

$$\gamma_I \cdot \gamma_J = \begin{cases} 0, & \text{si } l = 0 \text{ o } m = 0, \\ (\gamma_I \gamma_J)_{|l-m|}, & \text{si } l, m \geq 1. \end{cases}$$

En particular se tiene, si  $l \geq 1$ ,  $\gamma_I \cdot \gamma_I = \gamma_I^2$ . Nótese que el máximo grado posible de  $\gamma_I \gamma_J$  es  $l + m$ , y que éste se alcanza si y sólo si  $\nu = 0$ , es decir, si y sólo si  $I \cap J = \emptyset$ . Además, en tal caso  $\gamma_I \gamma_J = \gamma_I \wedge \gamma_J$ . Todas estas consideraciones se pueden resumir como sigue:

**PROPOSICIÓN 3.5** (Grados de un producto). *Sean  $x \in \mathcal{D}^l$ ,  $y \in \mathcal{D}^m$ . Si  $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  y  $(xy)_j \neq 0$ , entonces  $j = |m-l|+2\nu$  con  $\nu \geq 0$  y  $j \leq r+s$ . Además,  $(xy)_{|l-m|} = x \cdot y$  si  $l, m > 0$  y  $(xy)_{l+m} = x \wedge y$ .*

**OBSERVACIÓN 3.6.** Hemos usado sistemáticamente la métrica  $\eta$  para evitar la confusión con el producto interior. La diferencia más importante es que si  $x \in \mathcal{D}^l$  e  $y \in \mathcal{D}^m$ , entonces  $\eta(x, y) = 0$  cuando  $l \neq m$ , pero en general  $x \cdot y$  puede ser  $\neq 0$ . Por ejemplo,  $\gamma_1 \cdot \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 = \gamma_0 \gamma_2$ . En tal caso,  $y \cdot x = \pm x \cdot y$  (después daremos una expresión para el signo). En el caso  $l = m$ , veremos que  $x \cdot y = y \cdot x = \pm \eta(x, y)$ , siendo el signo  $(-1)^{l//2}$ .

**PROPOSICIÓN 3.7** (Fórmula clave). *Si  $a$  es un vector y  $x$  un multivector, entonces*

$$ax = a \cdot x + a \wedge x \quad y \quad xa = x \cdot a + x \wedge a.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Por bilinealidad podemos suponer que  $a = \gamma_\mu$  y  $x = \gamma_K$ . Si  $K = \emptyset$ , los productos interiores son nulos y tanto el producto geométrico como el exterior son iguales a  $\gamma_\mu$ . Si  $K \neq \emptyset$ , distinguimos los casos  $\mu \in K$  y  $\mu \notin K$ . En el primer caso,  $\gamma_\mu \cdot \gamma_K = \gamma_\mu \gamma_K$  y  $\gamma_K \cdot \gamma_\mu = \gamma_K \gamma_\mu$ , mientras que  $\gamma_\mu \wedge \gamma_K = \gamma_K \wedge \gamma_\mu = 0$ . En el segundo caso,  $\gamma_\mu \cdot \gamma_K = \gamma_K \cdot \gamma_\mu = 0$ , mientras que  $\gamma_\mu \gamma_K = \gamma_\mu \wedge \gamma_K$  y  $\gamma_K \gamma_\mu = \gamma_K \wedge \gamma_\mu$ .  $\square$

**D.7. INVOLUCIONES.** La involución lineal  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $x \mapsto \hat{x}$ , donde  $\hat{x} = (-1)^l x$  si  $x \in \mathcal{D}^l$ , resulta ser un *automorfismo* de  $\mathcal{D}$  (*involución de paridad*), en el sentido que

$$\widehat{xy} = \widehat{x}\widehat{y}, \quad \widehat{x \wedge y} = \widehat{x} \wedge \widehat{y}, \quad \widehat{x \cdot y} = \widehat{x} \cdot \widehat{y}.$$

De modo similar, la involución lineal  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $x \mapsto \tilde{x}$ , donde  $\tilde{x} = (-1)^{l//2} x$  si  $x \in \mathcal{D}^l$ , resulta ser un *antiautomorfismo* de  $\mathcal{D}$  (*involución de reversión*), en el sentido que

$$\widetilde{xy} = \widetilde{y}\widetilde{x}, \quad \widetilde{x \wedge y} = \widetilde{y} \wedge \widetilde{x}, \quad \widetilde{x \cdot y} = \widetilde{y} \cdot \widetilde{x}.$$

Para las dos afirmaciones, es suficiente comprobar las identidades para dos elementos de la base de Clifford, digamos  $x = \gamma_I \in \mathcal{D}^l$ ,  $y = \gamma_J \in \mathcal{D}^m$ . Para la involución de

paridad, nótese que los grados de  $\gamma_I \gamma_J$ ,  $\gamma_I \wedge \gamma_J$  y  $\gamma_I \cdot \gamma_J$  son  $l+m-2\nu$  ( $\nu = |I \cap J|$ ),  $l+m$  y  $|l-m|$ , respectivamente, y que los tres son congruentes con  $l+m$  módulo 2. En el caso de la inversión de reversión, el argumento es similar si tenemos en cuenta que  $\tilde{\gamma}_I = \gamma_{\tilde{I}}$ , donde  $\tilde{I}$  es el reverso de  $I$ , pues la reordenación  $\tilde{I}$  comporta  $\binom{l}{2}$  cambios de signo.

**PROPOSICIÓN 3.8** (Forma alternativa de la métrica). *Sean  $x, y \in \mathcal{D}$ . Entonces  $\eta(x, y) = (x\tilde{y})_0 = (\tilde{x}y)_0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Dado que las tres expresiones son bilineales, basta ver que coinciden para  $x = \gamma_I$  e  $y = \gamma_J$ . Esto se reduce a comprobar que  $(\gamma_I \tilde{\gamma}_J)_0$  y  $(\tilde{\gamma}_I \gamma_J)_0$  son 0 si  $J \neq I$  e iguales a  $\eta(\gamma_I)$  si  $J = I$ . La primera relación es consecuencia de que los grados de  $\gamma_I \tilde{\gamma}_J$  y  $\tilde{\gamma}_I \gamma_J$  son no nulos si  $J \neq I$ . Por lo que se refiere a la segunda, es claro que  $\gamma_I \tilde{\gamma}_I = \tilde{\gamma}_I \gamma_I = (-1)^{s(I)}$  y sabemos que este valor coincide con  $\eta(\gamma_I)$ .  $\square$

**D.8. DUALIDAD DE HODGE.** La fórmula de Artin muestra que si  $\gamma_I$  tiene grado  $l$ , entonces  $\gamma_I \mathbf{i}$  tiene grado  $4-l$ . Tenemos pues una aplicación lineal

$$\mathcal{D}^l \rightarrow \mathcal{D}^{4-l}, \quad x \mapsto x^* = x\mathbf{i}.$$

Esta aplicación, llamada *dualidad de Hodge*, es un isomorfismo lineal, ya que su inversa es la aplicación  $y \mapsto -y\mathbf{i}$ . De hecho:

**PROPOSICIÓN 3.9.** *La dualidad de Hodge es una antiisometría.*

**DEMOSTRACIÓN.**  $\eta(x^*) = \eta(x\mathbf{i}) = (x\mathbf{i}\tilde{x}\mathbf{i})_0 = -(x\tilde{x})_0 = -\eta(x)$ .  $\square$

En la Figura 2 se muestra la base de Clifford de  $\mathcal{D}$  según los distintos grados. Para grado 2,  $\sigma_k = \gamma_k \gamma_0$  da tres bivectores de la base y sus duales  $\sigma_k^*$ , los otros tres. La significación del orden  $\gamma_k \gamma_0$  se verá en la sección siguiente.

Grado	Nombre	Base
0	Escalares	1
1	Vectores	$\gamma_0, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$
2	Bivectores	$\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$
3	Seudovectores	$\bar{\gamma}_0^*, \bar{\gamma}_1^*, \bar{\gamma}_2^*, \bar{\gamma}_3^*$
4	Seudoescalares	$1^*$

Figura 2: Base de Clifford de  $\mathcal{D}$  (salvo algunos cambios de signo). Para un elemento  $x$  de la base, ponemos  $\bar{x}$  para denotar que  $\eta(x) = -1$ .

#### 4. ESPACIO RELATIVO Y ÁLGEBRA DE PAULI

Definamos  $\mathcal{D}^+ = D^0 + D^2 + D^4$ . Dado que  $\mathcal{D}^+ = \{x \in \mathcal{D} : \hat{x} = x\}$ , y que  $x \mapsto \hat{x}$  es un automorfismo de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}^+$  es una subálgebra de  $\mathcal{D}$ , la llamada *subálgebra par*. Por lo que hemos visto al final de la sección anterior, tenemos que  $\mathcal{D}^2 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\mathbf{i}, \sigma_2\mathbf{i}, \sigma_3\mathbf{i} \rangle = \mathcal{E} + \mathcal{E}\mathbf{i}$ , donde  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\gamma_0}$  es el espacio  $\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$ . Dado que  $\sigma_k^2 = -\eta(\sigma_k) = 1$ , resulta que  $\mathcal{E}$  es un espacio euclidiano de dimensión 3 con la métrica  $g = -\eta|_{\mathcal{E}}$  y que  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  es una base  $g$ -ortonormal. Diremos que  $\mathcal{E}$  es el *espacio relativo* de  $\gamma_0$ . Como se irá viendo, es el espacio en que la referencia inercial  $\gamma$  representa las relaciones físico-geométricas del universo inmutable  $\mathcal{M}$ , con un diccionario preciso de ida y vuelta.

**PROPOSICIÓN 4.1.**  *$\mathcal{D}^+$  es el álgebra geométrica de  $(\mathcal{E}, g)$  y su seudoescalar es  $\mathbf{i}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Está claro que  $\mathcal{D}^+$  es una  $\mathbb{R}$ -álgebra asociativa y unitaria, que contiene a  $\mathcal{E}$  como subespacio, y que  $\mathbb{R} \cap \mathcal{E} = \{0\}$ . También es inmediato que  $\mathcal{D}^+$  está generada por  $\mathbb{R}$  y  $\mathcal{E}$  como  $\mathbb{R}$ -álgebra, pues  $\sigma_j\mathbf{i} = \sigma_k\sigma_l$  (si  $jkl$  es una permutación cíclica de 123) e  $\mathbf{i} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ , como se comprueba inmediatamente. Finalmente, el hecho de que  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sea una base  $g$ -ortonormal de  $\mathcal{E}$ , y que  $\sigma_k^2 = 1 = g(\sigma_k)$ , implican que  $\mathcal{D}^+$  verifica la regla de contracción respecto de  $g$ :  $\mathbf{a}^2 = g(\mathbf{a})$  para todo  $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$ . La relación  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathbf{i}$  muestra que el seudoescalar de  $\mathcal{E}$  coincide con  $\mathbf{i}$ .  $\square$

**P.1. ÁLGEBRA DE PAULI.** Pondremos  $\mathcal{P} = \mathcal{D}^+$  y diremos que es el *álgebra de Pauli*. La graduación de esta álgebra viene dada por  $\mathcal{P}^0 = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P}^1 = \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{E}\mathbf{i}$ ,  $\mathcal{P}^3 = \langle \mathbf{i} \rangle = \mathcal{D}^4$ .

**PROPOSICIÓN 4.2.** *El álgebra par del álgebra de Pauli,  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^2$ , es isomorfa al cuerpo  $\mathbb{H}$  de los cuaterniones.*

**DEMOSTRACIÓN.** Pongamos  $i_k = \sigma_k\mathbf{i}$ , de modo que  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^2 = \langle 1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 \rangle$ . Entonces  $i_k^2 = \sigma_k\mathbf{i}\sigma_k\mathbf{i} = \sigma_k^2\mathbf{i}^2 = -1$  e  $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\mathbf{i} = \mathbf{i}_3$  (y permutaciones cíclicas). Esto es,  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  cumplen las relaciones de los símbolos  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  introducidos por Hamilton el día del bautismo de  $\mathbb{H}$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 4.3.** El producto geométrico de  $\mathcal{P}$  es la restricción del producto geométrico de  $\mathcal{D}$ . Además,  $\mathcal{P}$  es claramente cerrada por el producto exterior y el producto interior de  $\mathcal{D}$  (cf. D.7). Pero las restricciones de los dos últimos productos a  $\mathcal{P}$  no coinciden con los productos exterior e interior de  $\mathcal{P}$ . Para distinguir entre los dos productos exteriores e interiores, la convención que seguiremos es escribir  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  para denotar que los vectores relativos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  se consideran bivectores de  $\mathcal{D}$ . De este modo, en una expresión como  $\sigma_1 \wedge \sigma_2$  el producto exterior es el de  $\mathcal{P}$ , y el resultado es el bivector  $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\mathbf{i} \in \mathcal{P}^2$  (ponemos  $\mathbf{i}$  para denotar el seudoescalar de  $\mathcal{D}$  cuando lo consideramos como el seudoescalar de  $\mathcal{P}$ ). Notemos, sin embargo, que  $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \gamma_1 \wedge \gamma_0 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_0 = 0$  en  $\mathcal{D}$ . Análogamente,  $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_1\sigma_2$ , mientras que  $\sigma_1 \cdot \sigma_1\sigma_2 = -\gamma_1\gamma_0 \cdot \gamma_1\gamma_2 = 0$ .

$\mathcal{P}.$ 2. REPRESENTACIÓN DE PAULI. El álgebra  $\mathcal{P}$  fue descubierta como un álgebra de matrices. En términos de álgebra geométrica, dichas matrices proporcionan una representación matricial de  $\mathcal{P}$ . En detalle, la representación es  $1, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3 \mapsto \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , siendo aquí  $\sigma_k$  las *matrices de Pauli*:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \sigma_x = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \sigma_2 = \sigma_y = \begin{bmatrix} & -i \\ i & \end{bmatrix}, \sigma_3 = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}.$$

Esto muestra que  $\mathcal{P} \simeq \mathbb{C}(2)$  (álgebra de matrices  $2 \times 2$  complejas). Nótese que  $i = \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_3 \mapsto \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_0$ .

OBSERVACIÓN 4.4. Los valores propios de  $\sigma_j$  son  $\pm 1$  y los correspondientes vectores propios en  $\mathbb{C}^2$  (espacio de *espinores de Pauli*) son  $[1, \pm 1]$ ,  $[1, \pm i]$ , y  $\{[1, 0], [0, 1]\}$ , respectivamente. Estos vectores propios (normalizados) representan los estados cuánticos del espín  $1/2$  (cf. [18]) que tienen como imagen los puntos unidad de los ejes  $x, y, z$  por la *aplicación espinorial*  $S^3 \rightarrow S^2$  (llamada *fibración de Hopf* en topología). Esta aplicación se define de la siguiente manera: si  $\psi = [\xi_0, \xi_1] \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$  (es decir,  $\xi_0 \bar{\xi}_0 + \xi_1 \bar{\xi}_1 = 1$ ), entonces

$$x = \xi_0 \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_0 \xi_1, \quad y = i(\xi_0 \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_0 \xi_1), \quad z = \xi_1 \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_0 \xi_0. \quad (6)$$

OBSERVACIÓN 4.5 (Representación de Dirac). En 1928, Dirac introdujo sus famosas matrices  $\Gamma_\mu \in \mathbb{C}(4)$ ,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \\ & -\sigma_0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} & -\sigma_k \\ \sigma_k & \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Las matrices  $\Gamma_\mu$  satisfacen las relaciones de Clifford para la signatura  $\eta = (+, -, -, -)$ ,

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}, \quad (8)$$

y por tanto tenemos una representación  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}(4)$  tal que  $\gamma_\mu \mapsto \Gamma_\mu$ . Dirac llegó a las relaciones de Clifford tras introducir el operador  $\Gamma_\mu \partial_\mu$  e imponer que su cuadrado fuese el dalembertiano  $\square = \partial_0^2 - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)$ . Una buena parte del mérito de su trabajo está en la forma explícita que descubrió para sus matrices. Volveremos a estas cuestiones en la última sección.

$\mathcal{P}.$ 3. EL PUNTO DE VISTA RELATIVO. La aplicación  $E_{1,3} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $x \mapsto \mathbf{x} = x \wedge \gamma_0$ , es suprayectiva, y su núcleo es  $\langle \gamma_0 \rangle$ . Si  $x = x^\mu \gamma_\mu$ , está claro que  $\mathbf{x} = x^k \boldsymbol{\sigma}_k$ . Poniendo  $t = x \cdot \gamma_0$ , se tiene  $x \gamma_0 = x \cdot \gamma_0 + x \wedge \gamma_0 = t + \mathbf{x}$ , que es la representación relativa a  $\boldsymbol{\gamma}$  (también llamada *del laboratorio*) de  $x$ . Tomando un suceso  $O$  como origen, la representación relativa de un suceso cualquiera  $P$  es la de  $x = P - O$ . Por ejemplo, la de  $P = O + \tau \gamma_0$  es  $t = \tau$  y  $\mathbf{x} = 0$ , que se interpreta como el tiempo marcado por un reloj inmóvil respecto de  $\boldsymbol{\gamma}$  (en el sentido de que su posición en el espacio relativo es constante). Otro ejemplo: la representación relativa de la forma cuadrática de Lorentz concuerda con la usada por Minkowski,

$$\eta(x) = x^2 = x \gamma_0 \gamma_0 x = (t + \mathbf{x})(t - \mathbf{x}) = t^2 - \mathbf{x}^2.$$

La expresión relativa de la *velocidad relativista*  $\dot{x} = dx/d\tau$  es

$$\dot{x}\gamma_0 = d(x\gamma_0)/d\tau = d(t + \mathbf{x})/d\tau.$$

Por tanto

$$\frac{dt}{d\tau} = \dot{x} \cdot \gamma_0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \dot{\mathbf{x}} \wedge \gamma_0.$$

Si  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  (*velocidad relativa*),

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{x}} \wedge \gamma_0}{\dot{x} \cdot \gamma_0}.$$

Dado que  $\mathbf{v}^2 = -\eta(\mathbf{v}) = -\eta(\dot{x} \wedge \gamma_0)/(\dot{x} \cdot \gamma_0)^2 = 1 - (\dot{x} \cdot \gamma_0)^{-2}$ , se tiene  $\mathbf{v}^2 < 1$  y

$$\dot{x} \cdot \gamma_0 = 1/\sqrt{(1 - \mathbf{v}^2)}, \tag{9}$$

que es el *factor de Lorentz* de  $\mathbf{v}$  (usualmente se denota  $\gamma = \gamma(\mathbf{v})$ , pero aquí será denotado  $\beta$  para evitar confusiones con los símbolos  $\gamma_\mu$ ). En particular,  $dt = \beta(\mathbf{v}) d\tau$ , o bien  $d\tau = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ , lo cual da la relación precisa entre el ritmo del tiempo propio y el ritmo del tiempo en el laboratorio. Puesto que  $\beta > 1$  si  $\mathbf{v} \neq 0$ , el tiempo medido en el laboratorio es menor que el tiempo propio.

El *momento relativista* de una partícula se define por la fórmula  $p = m_0\dot{x}$ , siendo  $m_0$  su *masa en reposo*. Dado que  $\dot{x}\gamma_0 = d(t + \mathbf{x})/d\tau = \beta + \beta\mathbf{v}$ , donde  $\beta$  es el factor de Lorentz de  $\mathbf{v}$  (fórmula (9)) y  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$  la velocidad relativa al laboratorio, se tiene  $p\gamma_0 = m_0\beta + m_0\beta\mathbf{v} = m + m\mathbf{v} = m + \mathbf{p}$ , siendo  $m = m_0\beta$  la llamada *masa relativista* de la partícula y  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  su momento (relativo al laboratorio). De ello resulta inmediatamente que

$$\dot{p}\gamma_0 = \beta dm/dt + \beta d\mathbf{p}/dt. \tag{10}$$

**P.4. ESTRUCTURA COMPLEJA DE  $\mathcal{D}$ .**  $\mathbf{C} = \langle 1, \mathbf{i} \rangle = \mathcal{D}^0 + \mathcal{D}^4 = \mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^3$  es una subálgebra de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  (recordemos que  $\mathbf{i} = \mathbf{i}$ ) isomorfa al cuerpo complejo  $\mathbb{C}$ . Sus elementos tienen la forma  $\alpha + \beta\mathbf{i}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) y los llamamos *escalares complejos*. El espacio  $\mathcal{D}^1 + \mathcal{D}^3 = \mathcal{D}^1 + \mathcal{D}^1\mathbf{i}$  es cerrado por la multiplicación por  $\mathbf{i}$  y diremos que es el espacio de *vectores complejos*. Sus elementos tienen la forma  $a + b\mathbf{i}$ ,  $a, b \in \mathcal{D}^1$ . Los elementos del espacio  $\mathcal{D}^2 = \mathcal{E} + \mathcal{E}\mathbf{i}$ , que también es cerrado por la multiplicación por escalares complejos (ya que lo es por la multiplicación por  $\mathbf{i}$ ), tienen la forma  $\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ . En suma, todo multivector de  $\mathcal{D}$  se puede representar de manera única en la forma  $(\alpha + \beta\mathbf{i}) + (a + b\mathbf{i}) + (\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{i})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathcal{D}^1$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ .

**P.5. ROTORES.** Un elemento  $R \in \mathcal{D}^+$  se dice que es un rotor si  $R\tilde{R} = 1$ . Este concepto es importante debido a que permite construir isometrías que se pueden manejar ventajosamente tanto en consideraciones teóricas como computacionales (Teorema 4.7). Aunque no es difícil construir todos los rotores (véase, por ejemplo, [19], §4), aquí vamos a seguir un procedimiento alternativo que es suficiente para nuestros propósitos.

Dado un bivector  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{i}$ , se tiene  $\mathbf{z}^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{i} \in \mathbf{C}$  (pues  $\mathbf{i}$  commuta con los bivectores,  $\mathbf{xy} + \mathbf{yx} = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ ), donde el producto interior es el relativo a  $\mathcal{E}$ , y  $\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ ). Vemos que  $\mathbf{z}^2$  es real si y sólo si  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ , y en tal caso diremos que  $\mathbf{z}$  es un *bivector de Lorentz*. Atendiendo al signo  $\epsilon_{\mathbf{z}}$  de  $\mathbf{z}^2$ , se dice que los bivectores de Lorentz son *positivos* (o *temporales*), *negativos* (o *espaciales*), o *nulos* (o *isótropos*) según que  $\epsilon_{\mathbf{z}} = 1, 0, -1$ . La *magnitud*  $|\mathbf{z}|$  de un bivector de Lorentz se define como en el caso de un vector:  $|\mathbf{z}| = +\sqrt{\epsilon_{\mathbf{z}} \mathbf{z}^2}$ . De un bivector de Lorentz se dice que es unitario si  $\mathbf{z}^2 = \pm 1 = \epsilon_{\mathbf{z}}$ . Nótese que si  $\mathbf{z}$  es un bivector de Lorentz no nulo, entonces  $\mathbf{z}/|\mathbf{z}|$  es unitario, con el mismo signo que  $\mathbf{z}$ . Por ejemplo, si  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$  es unitario, entonces  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{vi}$  son vectores de Lorentz unitarios, positivo el primero y negativo el segundo.

**LEMA 4.6.** *Si  $\mathbf{z}$  es un bivector de Lorentz unitario y  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $R_{\mathbf{z},\alpha} = e^{\alpha \mathbf{z}/2}$  es un rotor* (el denominador 2 en el exponente se pone para que el parámetro significativo sea  $\alpha$ , y no  $2\alpha$ ). *Además,  $R_{\mathbf{z},\alpha} = \cos_{\epsilon}(\alpha/2) + \mathbf{z} \operatorname{sen}_{\epsilon}(\alpha/2)$ , donde  $\cos_{\epsilon}$  y  $\operatorname{sen}_{\epsilon}$  denotan  $\cosh$  y  $\operatorname{senh}$  si  $\epsilon_{\mathbf{z}} = 1$  y  $\cos$  y  $\operatorname{sen}$  si  $\epsilon_{\mathbf{z}} = -1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $R = R_{\mathbf{z},\alpha}$ . Dado que  $\tilde{\mathbf{z}} = -\mathbf{z}$ ,  $\tilde{R} = e^{-\alpha \mathbf{z}/2}$  y es claro que  $R\tilde{R} = 1$ . Ahora, en el desarrollo de la exponencial  $e^{\alpha \mathbf{z}/2}$  todos los términos tienen signo positivo si  $\mathbf{z}^2 = 1$ , los de exponente par tienen la forma  $\frac{1}{(2k)!}(\alpha/2)^{2k}$ , y los de exponente impar  $\mathbf{z} \frac{1}{(2k+1)!}(\alpha/2)^{2k+1}$ , obteniéndose  $R = \cosh(\alpha/2) + \mathbf{z} \operatorname{senh}(\alpha/2)$ . El caso  $\mathbf{z}^2 = -1$  se razona de un modo similar.  $\square$

**TEOREMA 4.7** (Isometría asociada a  $R_{\mathbf{z},\alpha}$ ). *Con las mismas notaciones que el lema anterior, sea  $R = R_{\mathbf{z},\alpha}$  y definamos  $\underline{R} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  por  $\underline{R}(x) = RxR^{-1} = Rx\tilde{R}$ . Entonces:*

- (1)  *$\underline{R}$  es un automorfismo de  $\mathcal{D}$  y  $\underline{R}\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}^1$ .*
- (2) *La aplicación  $\underline{R} : \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}^1$  es una isometría propia y ortocrona ( $\underline{R} \in \operatorname{SO}_{1,3}^+$ ).*

**DEMOSTRACIÓN.** (1) La primera parte es inmediata, pues  $\underline{R}$  es lineal y  $\underline{R}(xy) = RxyR^{-1} = RxR^{-1}RyR^{-1} = \underline{R}(x)\underline{R}(y)$ . Para ver que  $\underline{R}(a) \in \mathcal{D}^1$  si  $a \in \mathcal{D}^1$ , notemos que  $\widehat{\underline{R}a} = \widehat{\underline{R}a}\widehat{\tilde{R}} = -Ra\tilde{R} = -\underline{R}a$ , por lo que  $\underline{R}a$  sólo puede tener componentes de grado impar (1 o 3), mientras que  $\widetilde{\underline{R}a} = \widetilde{\underline{R}a}\widetilde{\tilde{R}} = Ra\widetilde{\tilde{R}} = Ra = \underline{R}a$ , lo cual muestra que la componente de grado 3 es nula. Esto prueba que  $\underline{R}a \in \mathcal{D}^1$ .

(2) El cálculo  $(\underline{R}a)^2 = RaR^{-1}RaR^{-1} = Ra^2R^{-1} = a^2$  prueba que  $\underline{R}$  es una isometría y  $\det(\underline{R})\mathbf{i} = \underline{R}\mathbf{i} = R\mathbf{i}R^{-1} = \mathbf{i}$ , que es propia. Por último,  $s \mapsto \underline{R}_{\mathbf{z},s\alpha}\gamma_0$ ,  $s \in [0, 1]$ , es un camino continuo sobre el hiperboloide de dos hojas  $\eta(x) = 1$  que conecta  $\gamma_0 \in H^+$  con  $\underline{R}\gamma_0$ . Se desprende que  $\underline{R}\gamma_0 \in H^+$  y así  $\underline{R}$  es ortocrona.  $\square$

**EJEMPLO 4.8** (Boosts de Lorentz). Sea  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$  unitario y pongamos  $v = \mathbf{v}\gamma_0 \in \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ . Nótese que  $\mathbf{v}$  es el vector relativo de  $v$ , pues  $v \wedge \gamma_0 = v\gamma_0 = \mathbf{v}$ . Veremos que  $\underline{R}_{\mathbf{v},\alpha}$  es el boost de Lorentz en la dirección  $v$  de velocidad  $u = \tanh \alpha$

(cf. Proposición 1.1). En efecto, usando que  $\gamma_0$  anticommuta con  $\mathbf{v}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\underline{R}\gamma_0 &= R_{\mathbf{v}, \alpha}^2 \gamma_0 = e^{\alpha \mathbf{v}} \gamma_0 = \cosh(\alpha) \gamma_0 + \operatorname{senh}(\alpha) v, \\ \underline{R}\mathbf{v} &= e^{\alpha \mathbf{v}/2} \mathbf{v} e^{-\alpha \mathbf{v}/2} = e^{\alpha \mathbf{v}/2} \mathbf{v} e^{\alpha \mathbf{v}/2} \gamma_0 = e^{\alpha \mathbf{v}} \mathbf{v} = \operatorname{senh}(\alpha) \gamma_0 + \cosh(\alpha) v.\end{aligned}$$

Finalmente, los vectores  $a \in \langle \gamma_0, v \rangle^\perp$  son fijos por  $\underline{R}$ , pues commutan con  $\mathbf{v}$ .

La llamada *fórmula de composición de velocidades relativistas* es una consecuencia inmediata de esta representación. En efecto, si  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $R_i = e^{\alpha_i \mathbf{v}/2}$  y  $u_i = \tanh(\alpha_i)$  ( $i = 1, 2$ ), entonces  $R_2 R_1 = e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{v}/2}$  y por tanto  $\underline{R}_2 \underline{R}_1$  es el boost de velocidad  $\tanh(\alpha_1 + \alpha_2) = (u_1 + u_2)/(1 + u_1 u_2)$  en la misma dirección  $v$ .

**EJEMPLO 4.9** (Rotaciones). Sea  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}$  unitario y pongamos  $\mathbf{z} = \mathbf{v}\mathbf{i}$ . Como  $\mathbf{z}^2 = -\mathbf{v}^2 = -1$ ,  $\mathbf{z}$  es un bivector de Lorentz con  $\epsilon = -1$ . Sea  $R = R_{\mathbf{z}, \alpha}$ . En este caso  $\gamma_0$  commuta con  $\mathbf{z}$  y, por tanto,

$$\underline{R}\gamma_0 = e^{\alpha \mathbf{z}/2} \gamma_0 e^{-\alpha \mathbf{z}/2} = e^{\alpha \mathbf{z}/2} e^{-\alpha \mathbf{z}/2} \gamma_0 = \gamma_0.$$

Como consecuencia,  $\underline{R}$  induce una rotación de  $\gamma_0^\perp = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ . El eje de esta rotación es  $v = \mathbf{v}\gamma_0$ , pues  $v$  también commuta con  $\mathbf{z}$ . Finalmente, la amplitud de la rotación es  $\alpha$ , ya que si  $x \in \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$  es ortogonal a  $v$ , entonces  $x$  anticommuta con  $\mathbf{z}$  y  $\underline{R}x = e^{\alpha \mathbf{z}} x = \cos(\alpha)x + \mathbf{z}x \operatorname{sen}(\alpha)$ . Nótese que  $\mathbf{z}x = \mathbf{v}\mathbf{i}x \in \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ , pues es combinación lineal  $x$  y  $\underline{R}x$ , y que es ortogonal a  $v$  y a  $x$ , pues anticommuta con ambos.

## 5. ELECTRODINÁMICA

La *referencia dual* (o *recíproca*) de  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  es la referencia  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  tal que  $\gamma^0 = \gamma_0$  y  $\gamma^j = -\gamma_j$ . En general queda caracterizada por las relaciones  $\gamma^\mu \cdot \gamma_\nu = \delta_\nu^\mu$ . Las componentes de un vector  $a$  respecto de la referencia dual se denotan  $a_\mu$ , es decir,  $a = a_\mu \gamma^\mu$ . Está claro, pues, que  $a_0 = a^0$  y  $a_k = -a^k$ .

**OPERADOR DE DIRAC.** Si  $f$  es un función diferenciable definida en un abierto  $U$  de  $\mathcal{M}$ ,  $df = (\partial_\mu f) dx^\mu$ , siendo  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ . Es una 1-forma definida en  $U$ , de modo que, para cada punto  $x \in U$ ,  $df$  nos da una forma lineal  $d_x f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . El valor de esta forma para un vector  $a$  es  $(d_x f)(a) = df(x + at)/dt|_{t=0}$ , dado que por definición de diferencial se tiene que  $f(x + at) - f(x) = t(d_x f)(a) + o(t)$ . Podemos pues representar el operador  $d$  (*diferencial*) en la forma  $dx^\mu \partial_\mu$ . En esta expresión,  $dx^\mu$  es la forma lineal de  $E$  tal que  $(dx^\mu)(\gamma_\nu) = \delta_\nu^\mu$ , lo cual coincide con  $\gamma^\mu$ . Esto sugiere formar la expresión  $\partial = \partial_D = \gamma^\mu \partial_\mu$  (*operador de Dirac*), la cual, por definición, cumple que  $(\partial f) \cdot a = a \cdot (\partial f)$  es la derivada direccional de  $f$  en la dirección  $a$ . De hecho, esto muestra que el operador  $a \cdot \partial = (a \cdot \gamma^\mu) \partial_\mu = a^\mu \partial_\mu$  da, aplicado a una función  $f$ , su derivada en la dirección  $a$ .

El empleo de  $\partial$  en lugar de  $d$  tiene otras ventajas en el contexto de  $\mathcal{D}$ . La más relevante es que podemos formar, para cualquier campo multivectorial  $F = F(x)$ , los productos  $\partial F$ ,  $\partial \cdot F$  y  $\partial \wedge F$ . Por ejemplo, si  $F = F^J \gamma_J$ , entonces

$$\partial \cdot F = \gamma^\mu \partial_\mu F^J \cdot \gamma_J = \partial_\mu F^J \gamma^\mu \cdot \gamma_J.$$

De hecho, dado que  $\gamma^\mu \gamma_J = \gamma^\mu \cdot \gamma_J + \gamma^\mu \wedge \gamma_J$ , se tiene la relación

$$\partial F = \partial \cdot F + \partial \wedge F$$

para cualquier  $F$ .

Si  $F = F^\nu \gamma_\nu$  es un *campo vectorial*,  $\partial \cdot F = \partial_\mu F^\nu \gamma^\mu \cdot \gamma_\nu = \partial_\mu F^\nu \delta_\nu^\mu = \partial_\mu F^\mu$ , que es la *divergencia* (lorentziana) de  $F$ . Análogamente se ve, en este mismo caso, que  $\partial \wedge F = \partial_\mu F^\nu \gamma_{\mu\nu} = \sum_{\mu < \nu} (\partial_\mu F^\nu - \partial_\nu F^\mu) \gamma_{\mu\nu}$ . Nótese que en el espacio euclídeo de dimensión 3 esta expresión es el (bivector) *rotacional* de  $F$ . De ahora en adelante, diremos que  $\partial \cdot F$  y  $\partial \wedge F$  son la *divergencia* y el *rotacional* de  $F$ . En particular  $\partial$  resuelve el sueño de Dirac (encontrar una raíz cuadrada del *dalembertiano*  $\square$ ):

$$\partial^2 = \partial \cdot \partial = \partial_0^2 - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) = \square.$$

La representación relativa del operador vectorial  $\partial$  es  $\partial \gamma_0 = \partial \cdot \gamma_0 + \partial \wedge \gamma_0 = \partial_0 + \boldsymbol{\partial}$ . En este caso,  $\boldsymbol{\partial} = \partial \wedge \gamma_0 = \gamma^k \wedge \gamma_0 \partial_k = -\boldsymbol{\sigma}_k \partial_k = -\boldsymbol{\nabla}$ , donde  $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\sigma}_k \partial_k$  (el operador vectorial del espacio relativo). También se tiene que  $\gamma_0 \partial = \partial_0 - \boldsymbol{\partial} = \partial_0 + \boldsymbol{\nabla}$ .

**TEOREMA 5.1** (Ecuación de Maxwell-Riesz). *Sean  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j} \in \mathcal{E}$  vectores relativos dependientes del tiempo y  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  una función diferenciable de  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Pongamos  $F = \mathbf{E} + \mathbf{Bi}$  (bivector de Faraday) y  $J = (\rho + \mathbf{j})\gamma_0$ . Entonces la ecuación  $\partial F = J$  es equivalente a las cuatro ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  creados por la densidad de carga  $\rho$  el vector de corriente  $\mathbf{j}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Puesto que  $J\gamma_0 = \rho + \mathbf{j}$ , se tiene  $\rho = J \cdot \gamma_0$  y  $\mathbf{j} = J \wedge \gamma_0$ . Además, de  $(\rho + \mathbf{j})\gamma_0 = \gamma_0(\rho - \mathbf{j})$  obtenemos que  $\gamma_0 J = \rho - \mathbf{j}$ . Multiplicando la ecuación  $\partial F = J$  por  $\gamma_0$  a la izquierda, nos queda la relación equivalente  $(\partial_0 + \boldsymbol{\nabla})(\mathbf{E} + \mathbf{iB}) = \rho - \mathbf{j}$ . Desarrollando los productos, obtenemos

$$\partial_0 \mathbf{E} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{E} + \mathbf{i}(\partial_0 \mathbf{B} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B}) = \rho - \mathbf{j}.$$

Igualando los distintos grados de ambos miembros, esta ecuación resulta equivalente a las ecuaciones

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \partial_0 \mathbf{E} + \mathbf{i} \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \partial_0 \mathbf{B} + \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Ahora basta observar que  $\boldsymbol{\nabla} \cdot$  es el operador divergencia en el espacio relativo y que  $\mathbf{i} \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = -\text{rot}(\mathbf{B})$  (rotacional de  $\mathbf{B}$ ) para concluir que estas ecuaciones son equivalentes a

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \rho \quad (\text{Ley de Gauss para } \mathbf{E})$$

$$\text{rot}(\mathbf{B}) - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j} \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell})$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \quad (\text{Ley de inducción de Faraday})$$

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (\text{Ley de Gauss para } \mathbf{B})$$

que son las ecuaciones de Maxwell (en unidades en las que  $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ ) para el campo electromagnético creado por  $\rho$  y  $\mathbf{j}$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 5.2 (Invariantes). La expresión  $F^2$  es claramente invariante Lorentz. En términos de la expresión relativa  $F = \mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{i}$ ,  $F^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{i}$  (cf. P.6, página 553), de lo cual se infiere que  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$  y  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  son invariantes Lorentz.

Ilustremos las ventajas que ofrece la ecuación de Maxwell-Riesz respecto de las ecuaciones de Maxwell con otros ejemplos.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD. En primer lugar, multiplicando  $\partial F = J$  por  $\partial$  a la izquierda, se obtiene  $\square F = \partial \cdot J + \partial \wedge J$ . Como el término de la izquierda es un bivector ( $\square$  es un operador escalar), la parte escalar de la derecha se ha de anular:  $\partial \cdot J = 0$ . Esta ecuación es la *ecuación de continuidad de la carga*, pues equivale, en términos relativos, a la ecuación  $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ .

LEY DE EINSTEIN-LORENTZ. Consideremos una partícula con carga eléctrica  $q$  sometida en un campo electromagnético  $F$ . La *ley de Einstein-Lorentz* es la relación  $\dot{\mathbf{p}} = qF \cdot \dot{\mathbf{x}}$ , siendo  $\dot{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\mathbf{p}}$  la velocidad propia y la derivada propia del momento, respectivamente. La significación de esta relación para el laboratorio la proporciona el enunciado que sigue.

TEOREMA 5.3. Si  $F = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$  es la expresión de  $F$  en términos de la descomposición relativa  $\mathcal{D}^2 = \mathcal{E} + i\mathcal{E}$ , la ley de Einstein-Lorentz equivale a las relaciones

$$dm/dt = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \quad y \quad d\mathbf{p}/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v}). \quad (11)$$

DEMOSTRACIÓN. La expresión relativa del vector  $qF \cdot \dot{\mathbf{x}}$  es  $q(F \cdot \dot{\mathbf{x}}) \cdot \gamma_0 + q(F \cdot \dot{\mathbf{x}}) \wedge \gamma_0$ . La parte escalar es igual a  $q(F \cdot \dot{\mathbf{x}}) \cdot \gamma_0 = qF \cdot (\dot{\mathbf{x}} \wedge \gamma_0) = \beta qF \cdot \mathbf{v} = \beta q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ , ya que  $i\mathbf{B}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales. Esto, y la fórmula (10), prueban que la primera fórmula del enunciado equivale a la igualdad de las  $\gamma_0$ -componentes de la relación de Einstein-Lorentz. Examinemos ahora  $q(F \cdot \dot{\mathbf{x}}) \wedge \gamma_0 = q(\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \wedge \gamma_0 + q(i\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \wedge \gamma_0$ . El primer sumando es igual a  $\beta q\mathbf{E}$ , ya que  $(\sigma_k \cdot \dot{\mathbf{x}}) \wedge \gamma_0 = (\gamma_k \gamma_0 \cdot \dot{\mathbf{x}}) \wedge \gamma_0 = \dot{x}_0 \gamma_k \gamma_0 = \beta \sigma_k$ . Y el segundo es igual a  $\beta q\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ , ya que un cálculo similar nos da, siendo  $jkl$  una permutación cíclica de 123, que  $(i\sigma_j \cdot \dot{\mathbf{x}}) \wedge \gamma_0 = \dot{x}_k \sigma_l - \dot{x}_l \sigma_k = \beta(\sigma_l \mathbf{v}_k - \sigma_k \mathbf{v}_l) = \beta \sigma_j \times \mathbf{v}$ . Estas dos relaciones, junto con la fórmula (10), concluyen la demostración.  $\square$

OBSERVACIÓN 5.4. En la segunda fórmula (11), el término  $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$  es la fuerza ejercida por el campo electromagnético sobre la partícula y el segundo miembro es la *ley de Lorentz* para esta fuerza. La potencia de la fuerza de Lorentz viene dada por  $f \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$ , ya que  $\mathbf{B} \times \mathbf{v}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ . Ahora, la primera de las fórmulas (11) nos dice que esa potencia es igual a  $dm/dt$ , lo cual nos dice que las variaciones de la masa equivalen a energía. De hecho, el trabajo ejercido por la fuerza de Lorentz entre dos instantes, es decir, la integral de la potencia, es igual a la variación de la masa entre dichos instantes. Podemos concluir que  $p_0 = p \cdot \gamma_0 = m$  tiene la forma  $m = \varepsilon + \varepsilon_0$ , siendo  $\varepsilon$  la energía dinámica de la partícula y  $\varepsilon_0$  una constante que sólo depende de la masa en reposo  $m_0$ . Siendo  $m_0$  a su vez una masa, se puede igualar a energía (podemos pensar que es la energía necesaria para su creación, o la liberada en su desintegración), de manera que finalmente tiene sentido escribir  $m = E$ , siendo  $E$  la suma de la energía dinámica  $\varepsilon$  y la energía que corresponde a  $m_0$ . En unidades del SI, la fórmula resulta familiar:  $E = mc^2$ .

POTENCIALES. Igualando componentes de los dos miembros de  $\partial F = J$ , vemos que esta igualdad equivale a las ecuaciones  $\partial \cdot F = J$  y  $\partial \wedge F = 0$  (que corresponden al primer y segundo par de las ecuaciones de Maxwell, no homogéneas y homogéneas, respectivamente). La segunda ecuación (y el lema de Poincaré) nos da que existe un campo vectorial  $A$  (del cual diremos que es un *potencial* de  $F$ ) tal que  $F = \partial \wedge A$ . En esta forma, la ecuación  $\partial \wedge F = 0$  es tautológica, pues  $\partial \wedge \partial = 0$ , y la ecuación  $\partial \cdot F = J$  se traduce en  $\partial \cdot (\partial \wedge A) = J$ , esto es,  $(\partial \cdot \partial)A - \partial(\partial \cdot A) = J$ , o bien  $\square A - \partial(\partial \cdot A) = J$ . Veamos que se puede escoger  $A$  de modo que se cumpla  $\partial \cdot A = 0$  (*condición de Lorentz*). En efecto, si  $f$  es una función escalar, entonces  $\partial \wedge \partial f = 0$  y por tanto  $\partial \wedge (A + \partial f) = \partial \wedge A = F$ , y el caso es que se puede hallar  $f$  de modo que  $\partial \cdot (A + \partial f) = 0$ , pues esta condición equivale a la ecuación  $\square f = -\partial \cdot A$  (para la existencia de solución de esta ecuación, véase [12], por ejemplo). Con la condición de Lorentz,  $F = \partial A$ , y la primera de las dos ecuaciones aludidas (la no homogénea), deviene  $\square A = J$ . Ésta es la *ecuación de ondas* (no homogénea) de  $A$ . Obtenida su solución, dado  $J$  y condiciones de contorno adecuadas, basta calcular  $\partial A$  para obtener  $F$ .

En términos relativos,  $A\gamma_0 = \phi + \mathbf{A}$ , con  $\phi = A \cdot \gamma_0$  y  $\mathbf{A} = A \wedge \gamma_0 \in \mathcal{E}$ . Entonces  $\partial A = \partial\gamma_0\gamma_0 A = (\partial_t - \boldsymbol{\nabla})(\phi - \mathbf{A}) = -(\boldsymbol{\nabla}\phi + \partial_t \mathbf{A}) + \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A}$ , ya que  $\partial_t\phi + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \partial \cdot A = 0$  (condición de Lorentz). Igualando con  $\mathbf{E} + \mathbf{B}i$ , vemos que la relación  $\partial A = F$  equivale a las ecuaciones

$$\mathbf{E} = -(\boldsymbol{\nabla}\phi + \partial_t \mathbf{A}), \quad \mathbf{B} = -i(\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \text{rot}(\mathbf{A}), \quad (12)$$

que son las relaciones que dan el campo eléctrico y el campo magnético en el laboratorio a partir de los potenciales  $\phi$  (*potencial escalar*) y  $\mathbf{A}$  (*potencial vector*).

TRANSFORMACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO. Uno de los resultados más emblemáticos de la teoría de la relatividad restringida de Einstein [4] es la relación entre los campos eléctrico y magnético observados en dos referencias inertiales. La obtención de dichas relaciones se puede plantear de la siguiente manera. Sabemos que la transformación que aplica  $\gamma$  en otra referencia inercial  $\gamma'$  es propia y ortocrona. Por tanto viene dada por un rotor  $R$ :

$$\gamma'_\mu = \underline{R}\gamma_\mu = R\gamma_\mu \tilde{R}.$$

Ahora, la observación fundamental es la siguiente (usamos que  $\underline{R}$  conserva el producto interior):

$$\begin{aligned} E'_k &= \sigma'_k \cdot F = \underline{R}\sigma_k \cdot F = \sigma_k \cdot \tilde{R}F = \sigma_k \cdot \tilde{R}FR, \\ B'_k &= \sigma'^*_k \cdot F = \underline{R}(\sigma^*_k) \cdot F = \sigma^*_k \cdot \tilde{R}FR. \end{aligned}$$

Así pues el problema queda reducido al cálculo de  $\tilde{R}FR$ . Veamos en detalle el caso en que  $R$  sea un boost de Lorentz, digamos (con notaciones del Ejemplo 4.8),

$$R = R_{\sigma_1, \alpha} = e^{\alpha\sigma_1/2}.$$

Recordemos que  $\underline{R}$  es el boost de Lorentz en la dirección  $\gamma_1 = \sigma_1 \gamma_0$  de velocidad  $u = \tanh \alpha$  y  $\beta = \cosh \alpha$ .

Relativamente a  $\gamma$ , podemos escribir

$$F = E_1 \sigma_1 + E_2 \sigma_2 + E_3 \sigma_3 + B_1 \sigma_1^* + B_2 \sigma_2^* + B_3 \sigma_3^*.$$

Puesto que  $R$  conmuta con  $\sigma_1$  y anticommuta con  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ ,

$$\tilde{R}FR = E_1 \sigma_1 + e^{-\alpha \sigma_1} (E_2 \sigma_2 + E_3 \sigma_3) + B_1 \sigma_1^* + e^{-\alpha \sigma_1} (B_2 \sigma_2^* + B_3 \sigma_3^*).$$

Para transformar esta expresión tenemos

$$e^{-\alpha \sigma_1} = \cosh \alpha - \sigma_1 \operatorname{senh} \alpha = \beta(1 - u \sigma_1)$$

y las relaciones

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_3^*, \quad \sigma_1 \sigma_3 = -\sigma_2^*, \quad \sigma_1 \sigma_2^* = -\sigma_3, \quad \sigma_1 \sigma_3^* = \sigma_2.$$

Con esto se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{R}FR &= E_1 \sigma_1 + \beta(E_2 \sigma_2 + E_3 \sigma_3) - \beta u(E_2 \sigma_3^* - E_3 \sigma_2^*) \\ &\quad + B_1 \sigma_1^* + \beta(B_2 \sigma_2^* + B_3 \sigma_3^*) + \beta u(B_2 \sigma_3 - B_3 \sigma_2). \end{aligned}$$

Poniendo  $\mathbf{E}_\parallel = E_1 \sigma_1$  y  $\mathbf{E}_\perp = E_2 \sigma_2 + E_3 \sigma_3$ , con notaciones análogas para  $\mathbf{B}$ , y teniendo en cuenta que  $E_2 \sigma_3 - E_3 \sigma_2 = \sigma_1 \times \mathbf{E}$ , y análogamente para  $\mathbf{B}$ , finalmente obtenemos, poniendo  $\mathbf{u} = u \sigma_1$ , las fórmulas de Einstein:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}_\parallel + \beta \mathbf{E}_\perp + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}_\parallel + \beta \mathbf{B}_\perp - \mathbf{u} \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 5.5. Estas fórmulas ponen de manifiesto que tanto en el cálculo de  $\mathbf{E}'$  como en el de  $\mathbf{B}'$  intervienen  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Un caso especialmente revelador es el de una partícula que en el sistema  $\gamma'$  está en reposo en el origen, con lo cual el campo  $F$  se reduce, relativamente a  $\gamma'$ , a un campo eléctrico  $\mathbf{E}'$ . La segunda fórmula de Einstein nos da (invirtiendo los papeles de  $\gamma$  y  $\gamma'$ )

$$\mathbf{B} = \mathbf{u} \times \mathbf{E}',$$

lo cual muestra que en el sistema  $\gamma$  se percibe, además del campo eléctrico  $\mathbf{E} = \mathbf{E}'_\parallel + \beta \mathbf{E}'_\perp$ , también un campo magnético. Este ejemplo certifica que *los campos magnéticos creados por cargas en movimiento no son más que efectos relativistas del campo de Coulomb creado por las cargas estacionarias*.

OBSERVACIÓN 5.6. Las fórmulas de Einstein son válidas para cualquier boost de Lorentz sin más que cambiar  $\sigma_1$  por el vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}$  de la dirección del boost y definir las partes paralela y perpendicular de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  respecto del mismo. En este caso  $\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{u}}$  es la velocidad del boost. La demostración es similar, pero usando el rotor  $R_{\hat{\mathbf{u}}, \alpha}$  en lugar de  $R_{\sigma_1, \alpha}$ .

## 6. ECUACIÓN DE DIRAC

En la teoría de Schrödinger, los valores de la *función de onda*  $\psi(x)$ ,  $x \in \mathcal{M}$ , son números complejos. Al introducir el espín, Pauli fue llevado a cambiar  $\mathbb{C}$  por  $\mathbb{C}^2$ , y de ahí el nombre de *espinores de Pauli* para referirse a los elementos (normalizados) de  $\mathbb{C}^2$ . El cambio de  $\mathbb{C}^2$  por  $\mathbb{C}^4$  (espacio de *espinores de Dirac*, o *biespinores*) fue introducido por Dirac forzado por el hecho de que sus matrices  $\Gamma_\mu \in \mathbb{C}(4)$ . Los hitos del camino seguido por Dirac se pueden resumir como sigue.

Como punto de partida, tomó la *ecuación de Klein-Gordon*,  $(\square + m^2)\psi = 0$ . Esta ecuación es la ecuación de Schrödinger de un electrón, siendo  $m = m_e/\hbar$ ,  $m_e$  la masa en reposo del electrón, y  $\hbar = h/(2\pi)$  la constante de Planck (normalizada). Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, pero Dirac argumentó que precisaba una ecuación lineal en  $\partial_t$  y, requiriendo que fuese relativista, lineal también en  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  y  $\partial_z$ . Formó, pues, el operador  $D = d_\mu \partial_\mu$ , y al imponer que  $D^2 = \square$  descubrió que la solución más simple era poner  $d_\mu = \Gamma_\mu$  (las matrices (7) que se han comentado en la Observación 4.5). Con esto, la ecuación de Klein-Gordon factoriza en la forma  $(D - im)(D + im)\psi = 0$ , y Dirac simplemente postuló la ecuación  $(D + im)\psi = 0$ , equivalente a la forma en que la escribió:  $i\hbar D\psi = m_e\psi$ . Pero, para que esta relación tenga algún sentido,  $\psi$  ha de tomar valores en  $\mathbb{C}^4$ , y con esta suposición es la *ecuación de Dirac*. En presencia de un potencial electromagnético  $A$ , la ecuación de Dirac lo incorpora en la forma  $i\hbar(D - eA)\psi = m_e\psi$ , siendo  $e$  la carga del electrón, pero esto también exige expresar  $A$  en la forma  $A_\mu \Gamma_\mu$ .

El problema de expresar la ecuación de Dirac puramente en términos del álgebra  $\mathcal{D}$  fue enfocado correctamente por primera vez en [5] e investigado por muchos otros posteriormente, siendo [1, 6, 7, 8, 10, 11, 9, 3] los que nos han resultado más instructivos. El esfuerzo vale la pena, ya que por un lado se puede prescindir de lastres que son accidentales al problema (algunos se han comentado anteriormente), y por otro se puede explotar la rica estructura de  $\mathcal{D}$  para seguir ahondando en la comprensión de los fenómenos.

La formulación de Hestenes de la ecuación de Dirac es la siguiente (cf. [7], §2):

$$\partial\psi i\hbar - eA\psi = m_e\psi\gamma_0. \quad (13)$$

La naturaleza de sus ingredientes es como sigue. El campo  $\psi$  toma valores en el álgebra de  $\mathcal{D}^+$  ( $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}^+$ ). Nótese que la dimensión compleja de  $\mathcal{D}^+$  es 4, lo mismo que  $\mathbb{C}^4$ . El producto  $\partial\psi$  es el producto geométrico del operador de Dirac  $\partial$  con  $\psi$ . El producto  $A\psi$  es el producto geométrico del vector potencial  $A$  que hemos estudiado anteriormente y  $\psi$ . El símbolo  $i$  es una unidad imaginaria geométrica (no la de  $\mathbb{C}$ ):  $i = \gamma_2\gamma_1 = i\gamma_3\gamma_0 = i\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ . Por tanto, en la ecuación (13), que Hestenes llama *ecuación de Dirac real* y que aquí denominaremos *ecuación de Hestenes-Dirac*, ya no aparecen matrices ni la unidad imaginaria formal  $i$ .

Pero el valor ganado con (13) es la posibilidad de aprovechar la estructura de  $\mathcal{D}^+$ . El primer resultado básico en esta dirección es el siguiente:

**TEOREMA 6.1** (Forma canónica de  $\psi$ , [7]). *Si  $\psi \in \mathcal{D}^+$  y  $\psi\tilde{\psi} \neq 0$ , existen  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,  $\beta \in [-\pi, \pi]$  y un rotor  $R$  tales que  $\psi = \rho^{1/2}e^{\beta i/2}R$ . Además, esta expresión es única.*

**DEMOSTRACIÓN.** El producto  $\psi\tilde{\psi}$  es un escalar complejo (no puede contener términos de grado 2 porque es invariante por reversión), y por tanto lo podemos poner en forma polar:  $\psi\tilde{\psi} = \rho e^{\beta\mathbf{i}}$ , con  $\rho > 0$  y  $\beta \in [0, 2\pi]$ . Pongamos  $R = \psi\rho^{-1/2}e^{-\beta\mathbf{i}/2}$ . Entonces  $R$  es un rotor, ya que  $\tilde{R} = \rho^{-1/2}e^{-\beta\mathbf{i}/2}\tilde{\psi}$  y  $R\tilde{R} = \psi\rho^{-1}e^{-\beta\mathbf{i}}\tilde{\psi} = 1$ . La unicidad es también clara, ya que  $\rho$  y  $\beta$  quedan únicamente determinados por  $\psi\tilde{\psi}$ , y  $R$  queda únicamente determinado por la relación  $R = \psi\rho^{-1/2}e^{-\beta\mathbf{i}/2}$ .  $\square$

El papel de  $R$  en el estudio de la ecuación de Dirac-Hestenes es que  $\underline{R}$  es una isometría propia y ortocrona. Para ver que es una isometría propia, el argumento es el mismo que el de la demostración del Teorema 4.7. Que es ortocrona resulta de que todo rotor está conectado (por un camino continuo) con 1 ([19], Teorema 4.3), lo cual permite adaptar la parte final de la demostración aludida.

El rotor  $R$  es de hecho un campo de rotores y nos permite construir el campo de referencias  $e(x) = \underline{R}\gamma$ , todas con la misma orientación y orientación temporal que  $\gamma$ . Además, se cumple que  $\psi\gamma_\mu\tilde{\psi} = \rho e_\mu(x)$ : dado que  $\mathbf{i}$  anticonmuta con los vectores y que  $\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i}$ ,

$$\psi\gamma_\mu\tilde{\psi} = \rho e^{\beta\mathbf{i}/2}R\gamma_\mu\tilde{R}e^{\beta\mathbf{i}/2} = \rho e^{\beta\mathbf{i}/2}e^{-\beta\mathbf{i}/2}R\gamma_\mu\tilde{R} = \rho e_\mu(x).$$

En particular tenemos, poniendo  $v = e_0$ ,  $\psi\gamma_0\tilde{\psi} = \rho v$ , que es la llamada *corriente de Dirac*. El vector  $s = \frac{\hbar}{2}R\gamma_3\tilde{R} = \frac{\hbar}{2}e_3(x)$  es el *vector de espín*. El rotor  $R$  transforma la unidad geométrica  $i = \gamma_2\gamma_1$  en  $\iota = Ri\tilde{R} = e_2e_1$  y el vector  $S = \frac{\hbar}{2}\iota$  es el *bivector de espín*. La relación entre el vector de espín y el bivector de espín es  $S = \mathbf{i}sv$ . En efecto,

$$\mathbf{i}sv = \frac{\hbar}{2}\mathbf{i}R\gamma_3\tilde{R}R\gamma_0\tilde{R} = \frac{\hbar}{2}R\mathbf{i}\gamma_3\gamma_0\tilde{R} = \frac{\hbar}{2}R\gamma_2\gamma_1\tilde{R} = \frac{\hbar}{2}Ri\tilde{R} = \frac{\hbar}{2}\iota = S.$$

**AGRADECIMIENTOS.** A Xavier Gràcia, que además de señalar algunas erratas, sugirió usar «Allende», como así se ha hecho, para referirse al exterior del cono de luz, esto es, al *Elsewhere* de los textos en inglés (cf. Figura 1); y a Fernando Pascual, por proponer diversas mejoras de la terminología.

## REFERENCIAS

- [1] G. CASANOVA, *L'algèbre vectorielle*, Que sais-je? 1657, Presses Universitaires de France, 1976.
- [2] P. A. M. DIRAC, The quantum theory of the electron, I, II, *Proceedings of the Royal Society of London A* **117** (1928), 610–624 y **A118** (1928), 351–361.
- [3] C. DORAN AND A. LASENBY, *Geometric algebra for physicists*, Cambridge University Press, 2003.
- [4] A. ENSTEIN, On the electrodynamics of moving bodies, *The principle of relativity*, 37–65, Dover, 1952. Este texto es una traducción del artículo «Zur Elektrodynamik bewegter Körper», *Annalen der Physik* **17** (1905).

- [5] D. HESTENES, *Space-time algebra*, Gordon & Breach, 1966; Birkhäuser, 2015 (2.<sup>a</sup> edición).
- [6] D. HESTENES, A unified language for mathematics and physics, *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, 1–23, Springer, 1986.
- [7] D. HESTENES, Real Dirac theory, *The theory of the electron* (J. Keller y Z. Oziewicz, editores), 1–50, UNAM, 1996.
- [8] D. HESTENES, Spinor particle mechanics, *Fourth International Conference on Clifford Algebras and Their Applications to Mathematical Physics*, 14 páginas, Springer, 1996.
- [9] D. HESTENES, Mysteries and insights of Dirac theory, *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **28** (2003), no. 3, 390–408.
- [10] D. HESTENES, Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics, *American Journal of Physics* **71** (2003), no. 2, 104–121.
- [11] D. HESTENES, Spacetime physics with geometric algebra, *American Journal of Physics* **71** (2003), no. 7, 691–714.
- [12] F. JOHN, *Partial differential equations*, volumen 1 de *Applied Mathematical Sciences* (tercera edición), Springer-Verlag, 1978.
- [13] A. A. MICHELSON Y E. W. MORLEY, On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether, *American Journal of Science (3rd series)* **34** (1887), 333–345.
- [14] H. MINKOWSKI, Space and Time, *The principle of relativity*, 75–91, Dover, 1952. Este texto es una traducción de la comunicación «Raum und Zeit» a la 80.<sup>a</sup> Convención de Científicos y Médicos Alemanes (Colonia, 21 de septiembre de 1908).
- [15] W. PAULI, Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, *Z. Phys.* **42** (1927), no. 7, 601–623.
- [16] WIKEPEDIA, Tests of special relativity, [https://en.wikipedia.org/wiki/Tests\\_of\\_special\\_relativity](https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_special_relativity). Consulta: 2017-03-24.
- [17] S. XAMBÓ, *Álgebra lineal y geometrías lineales, II*, Euníbar, 1978.
- [18] S. XAMBÓ, Escondidas sendas de la geometría proyectiva a los formalismos cuánticos, *El legado matemático de Juan Bautista Sancho Guimerá* (D. Hernández-Ruipérez y A. Campillo, editores), 233–274, Real Sociedad Matemática Española & Ediciones Universidad de Salamanca, 2016. Disponible en <https://mat-web.upc.edu/people/sebastia.xambo/GA/2015-Xambo--EscondidasSendas-JBSG-in-memoriam.pdf>
- [19] S. XAMBÓ, Álgebra geométrica y geometrías ortogonales, *La Gaceta de la RSME* **19** (2016), no. 3, 559–588.