

A JBSG, *in memoriam*

Escondidas sendas
de la geometría proyectiva
a la física cuántica

S. Xambó

UPC

4 abril 2014

Tres paisajes

0. Geometría
1. Álgebra geométrica
2. Formalismos cuánticos

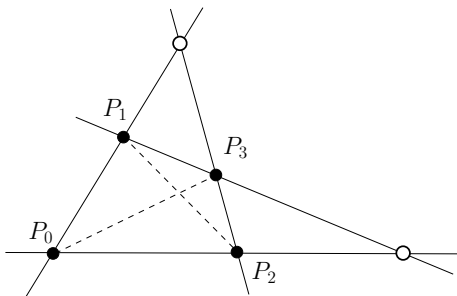
0. Geometría

- Senda desarguesiana
- Senda grassmanniana
- Senda neocartesiana

Senda desarguesiana: intuición visual del espacio

A.3 (Axioma proyectivo). Si P_0, P_1, P_2, P_3 son puntos distintos y las rectas P_0P_1 y P_2P_3 son incidentes, entonces las rectas P_0P_2 y P_1P_3 también lo son:

$$P_0P_1 \wedge P_2P_3 \neq 0 \Rightarrow P_0P_2 \wedge P_1P_3 \neq 0.$$



Senda grassmanniana: puntos, rectas, planos, ...

Un *retículo proyectivo* es un retículo modular, complementado y de longitud finita.

Teorema

El retículo $S(X)$ de subespacios de un espacio proyectivo X de dimensión finita es un retículo proyectivo.

Resultado clave: Si U y V son subespacios no nulos de un espacio proyectivo X , entonces $U \vee V$ es la unión de los conjuntos PQ , con $P \in U$ y $Q \in V$.

Senda neocartesiana: representación vectorial

- Sea K un cuerpo (no necesariamente conmutativo) y E un K -espacio vectorial. Sea $[E]$ el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1 de E . Pongamos $X = [E]$ y definamos \mathcal{L} como la familia de subconjuntos L de X tales que $L = [F]$, siendo F un subespacio de dimensión 2 de E . Entonces (X, \mathcal{L}) es un espacio proyectivo.
- La aplicación $F \mapsto [F]$ establece un isomorfismo entre el retículo $R(E)$ de los subespacios vectoriales de E y el retículo $S([E])$ de subespacios de $[E]$. De hecho se cumplen las relaciones

$$[F] \wedge [F'] = [F \cap F'], \quad [F] \vee [F'] = [F + F'].$$

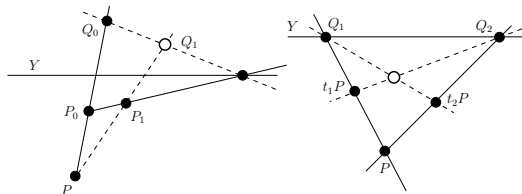
Sendas de ronda

- Todo retículo proyectivo de dimensión ≥ 3 es isomorfo a un retículo proyectivo 'neocartesiano'. El cuerpo K y el K -espacio vectorial E quedan determinados salvo isomorfismos semilineales.
- El dual de un retículo proyectivo es un retículo proyectivo. Sus puntos son los hiperplanos del primero. Más en general, sus subespacios son las radiaciones de hiperplanos. Su representación neocartesiana es el espacio vectorial dual.
- Proyección y sección: el espacio proyectante U^* de un subespacio U de un espacio proyectivo X es un espacio proyectivo isomorfo por sección a cualquier subespacio complementario de U . Su representación neocartesiana: cociente E/F e isomorfismo $F' \simeq E/F$ para todo subespacio suplementario F' de F en E .

Lenguaje afín

Es la clave para obtener la representación neocartesiana a partir de la representación desarguesiana.

- Espacio afín y grupo afín.
- Homologías y traslaciones.



Sea $P \notin Y$ un punto cualquiera. Entonces $t_1(t_2P)$ es incidente con la recta $(t_2P)Q_1$ y $t_2(t_1P)$ es incidente con la recta $(t_1P)Q_2$. Si $Q_1 \neq Q_2$, estas rectas se cortan en un único punto y por tanto

$$t_1(t_2P) = t_2(t_1P).$$

Esto prueba que $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$.

Las traslaciones y homotecias son las colineaciones que dejan invariantes los puntos del hiperplano del infinito y sólo ellos en el caso de las traslaciones.

Teorema de Desargues. Planos proyectivos

- Existen suficientes homologías si y sólo si se satisface el teorema de Desargues.
- El TdD es cierto en dimensión ≥ 3 , pero existen planos proyectivos que no lo cumplen.

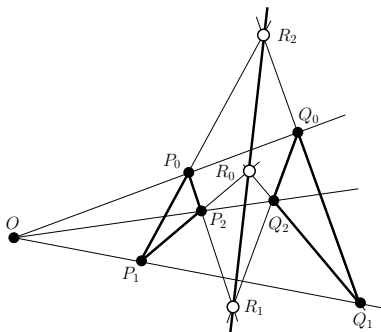
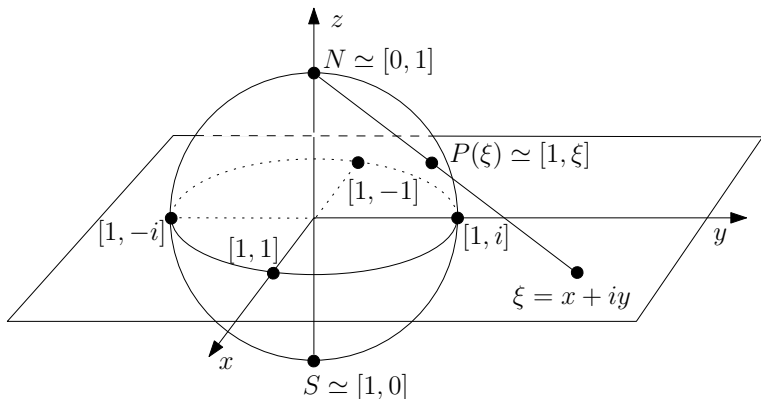


Diagrama mágico

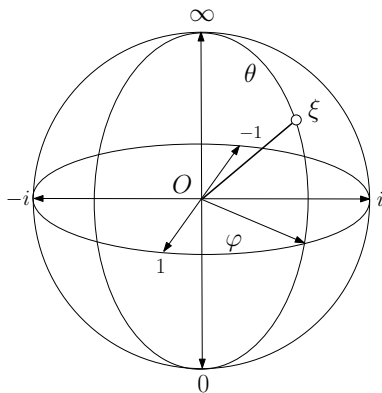
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 \rightarrow & Z(K) & \rightarrow & K & \rightarrow & \text{Int}(K) & \rightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 \rightarrow & \text{GL}(E) & \rightarrow & \text{S}(E) & \rightarrow & \text{Aut}(K) & \rightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 \rightarrow & \text{PGL}(E) & \rightarrow & \text{Aut}(X) & \rightarrow & \text{AUT}(K) & \rightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 1 & & 1 & & 1 &
 \end{array}$$

La esfera de Riemann: proyección estereográfica

$$\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1 \simeq \widehat{\mathbb{C}} \simeq S^2, [\xi_0, \xi_1] \mapsto \xi \mapsto P(\xi), \xi = \xi_1/\xi_0.$$



La esfera de Riemann: coordenadas φ y θ



$$[1, \xi] \sim \left[e^{-i\varphi/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), e^{i\varphi/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

1. Álgebra geométrica: sendas de ida y vuelta

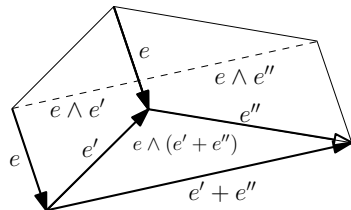
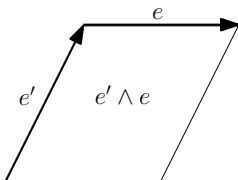
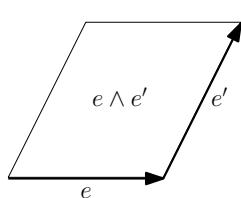
- Álgebra de Grassmann
- Álgebra de Clifford
- Álgebra geométrica

Álgebra de Grassmann

Dado un K -espacio vectorial E de dimensión n ,

$$\Lambda E = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k E = K \oplus E \oplus \Lambda^2 E \oplus \dots \oplus \Lambda^n E,$$

con el *producto exterior* \wedge , es un álgebra graduada asociativa y anticonmutativa (si $x \in \Lambda^r E$ e $y \in \Lambda^s E$, $y \wedge x = (-1)^{rs} x \wedge y$).



La antiderivación $\widehat{\xi}$, $\xi \in E^*$

Lemma

Sea $\xi \in E^* = L(E, K)$. Entonces existe una única antiderivación $\widehat{\xi}$ de $\wedge E$ tal que $\widehat{\xi}(e) = \xi(e)$ para todo $e \in E$. Esta antiderivación cumple

$$\widehat{\xi}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \xi(e_k) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{k-1} \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_r$$

cualesquiera que sean $e_1, \dots, e_r \in E$. En particular, $\widehat{\xi}$ tiene grado -1 . Finalmente se cumple que $\widehat{\xi}^2 = 0$.

Tenemos, pues, una aplicación lineal $E^* \rightarrow \text{End}_K^{\text{op}}(\Lambda E)$, $\xi \mapsto \widehat{\xi}$, tal que $\widehat{\xi}^2 = 0$. Por la propiedad universal del álgebra exterior, existe un único homomorfismo de álgebras $\Lambda E^* \rightarrow \text{End}_K(\Lambda E)$, $\phi \mapsto \widehat{\phi}$, que coincide con $\xi \mapsto \widehat{\xi}$ para $\xi \in E^*$. Si $x \in \Lambda E$ y $\phi \in \Lambda E^*$, en lugar de $\widehat{\phi}(x)$ escribiremos simplemente $\phi(x)$.

Lemma

Sean $x = x_1, \dots, x_r \in E$ y $\xi = \xi_1, \dots, \xi_r \in E^*$. Entonces

$$(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_r)(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \det[\xi \times x],$$

siendo $[\xi \times x]$ la matriz $r \times r$ formada con los escalares $\xi_i(x_j)$.

Corolario

La aplicación $\Lambda^r E^* \rightarrow (\Lambda^r E)^*$, $\xi \mapsto \widehat{\xi}$, es un isomorfismo.

Observación

Con las notaciones del lema anterior, podemos mirar los vectores $x_1, \dots, x_r \in E$ como elementos de E^{**} y entonces tiene sentido formar la expresión $(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_r)$. Por el corolario, este valor debiera coincidir con $(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_r)(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \det[\xi \times x]$.

El lema, en cambio, nos suministra

$(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_r) = \det[x \times \xi]$, de manera que se debiera verificar $\det[x \times \xi] = \det[\xi \times x]$. Pero esta igualdad es clara, ya que $[x \times \xi]_{ij} = x_i(\xi_j) = \xi_j(x_i) = [\xi \times x]_{ji}$ y por tanto $[x \times \xi] = [\xi \times x]^T$.

El lema anterior admite una simple generalización para evaluar $(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_s)$. Si $r > s$, el resultado es nulo (ya que es un elemento de grado negativo). El lema nos da cuenta del caso $r = s$. Si $r < s$, sea \mathcal{J} el conjunto de multiíndices J de orden r tales que $J \subset \{1, \dots, s\}$ y pongamos $J' = \{1, \dots, s\} - J = \{j'_1, \dots, j'_{s-r}\}$. Entonces

$$(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_s) = \sum_J (-1)^J \det([\xi \times x]_J) \widehat{x}_{J'} \in \Lambda^{s-r} E,$$

siendo $(-1)^J$ el signo de la permutación J, J' de $\{1, \dots, s\}$, $[\xi \times x]_J$ la submatriz de $[\xi \times x]$ formada por las columnas J y $\widehat{x}_{J'} = x_{j'_1} \wedge \cdots \wedge x_{j'_{s-r}}$.

En el caso $r > s$, el punto de vista de la observación anterior nos permite aplicar esta generalización para atribuir el valor

$\sum_J (-1)^J \det([x \times \xi]_J) \xi_{J'} \in \Lambda^{r-s} E^*$ a $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_s)(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r)$, siendo $\{J\}$ el conjunto de multiíndices de orden s de $\{1, \dots, r\}$, $J' = \{1, \dots, r\} - J = \{j'_1, \dots, j'_{r-s}\}$, $[x \times \xi]_J$ la submatriz de $[x \times \xi]$ formada por las filas J y $\xi_{J'} = \xi_{j'_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{j'_{r-s}}$.

De ahora en adelante, las expresiones de la forma

$(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_s)$ serán interpretadas como un $(s - r)$ -vector si $r \leq s$ y como una $(r - s)$ -forma si $s \leq r$. La consistencia en el caso $r = s$ está garantizada por la observación anterior.

Si $e \in E$, definimos $\mu_e : \Lambda E \rightarrow \Lambda E$ por $x \mapsto e \wedge x$ (por motivaciones físicas, a los μ_e se les llama *operadores de creación*). Es un operador de grado 1. Como $e \wedge e = 0$, resulta que $\mu_e^2 = 0$. Siendo el producto exterior multilinear, la aplicación $E \rightarrow \text{End}_K(\Lambda E)$, $e \mapsto \mu_e$ es lineal.

Álgebra de Clifford

Sea ahora $q : E \rightarrow E^*$ una aplicación lineal o, equivalentemente, una *forma bilineal* de E ($q(e, e') = q(e)(e')$). Definimos $\delta_e : \Lambda E \rightarrow \Lambda E$ por la relación $e \mapsto \tilde{e}(x)$, donde $\tilde{e} = q(e)$ (a la antiderivación δ_e se le llama *operador de aniquilación*, también por motivaciones físicas). La aplicación $E \rightarrow \text{End}_K(\Lambda E)$, $e \mapsto \delta_e$ es lineal y cumple $\delta_e^2 = 0$.

Lemma

Para todo $e \in E$ se cumple la relación

$$(\mu_e + \delta_e)^2 = q(e, e)Id_{\Lambda E}.$$

Consideremos la aplicación lineal $\lambda : E \rightarrow \text{End}_K(\Lambda E)$, $e \mapsto \lambda_e = \mu_e + \delta_e$ y su única extensión a un homomorfismo de álgebras $\lambda : TE \rightarrow \text{End}_K(\Lambda E)$, siendo $TE = K \oplus E \oplus T^2E \oplus \dots$ el álgebra tensorial de E . Dado que los elementos de la forma $t_e = e \otimes e - q(e, e)1_K$ están en el núcleo de λ , λ induce un homomorfismo de álgebras $\lambda : C_qE \rightarrow \text{End}_K(\Lambda E)$, siendo C_qE el cociente de TE por el ideal bilátero generado por los tensores t_e , $e \in E$, es decir, el *álgebra de Clifford* de q (el producto en C_qE será denotado por simple yuxtaposición). A su vez, λ induce una aplicación lineal $\wedge : C_qE \rightarrow \Lambda E$, $a \mapsto \lambda_a 1_K$.

Si e_1, \dots, e_n es una base de E , pondremos $e_J = e_{j_1} \cdots e_{j_r} \in C_qE$. Recordemos que hemos puesto $\widehat{e}_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r} \in \Lambda^r E$.

Lemma

El conjunto Γ de los elementos $e_J \in C_q E$, cuando J recorre el conjunto de los multiíndices de $\{1, \dots, n\}$, es un sistema de generadores de $C_q E$ como espacio vectorial.

A partir de aquí supondremos que q es *simétrica*. Diremos que dos vectores $e, e' \in E$ son q -ortogonales si y sólo si $q(e, e') = 0$. Si $e_1, \dots, e_n \in E$ y $q(e_i, e_j) = 0$ cuando $i \neq j$ decimos que $\{e_1, \dots, e_r\}$ es un *sistema ortogonal*.

Lemma

Si $e_1, \dots, e_r \in E$ es un sistema ortogonal, entonces

$$\wedge(e_1 e_2 \cdots e_r) = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r.$$

Theorem

Si E admite una base q -ortogonal (lo cual es cierto siempre que la característica de K no sea 2), entonces la aplicación lineal $\wedge : C_q E \rightarrow \Lambda E$ es un isomorfismo.

Observación

Si K es de característica 2, existen formas bilineales simétricas que no admiten bases ortogonales. Para evitar estas anomalías, en el caso de característica 2 siempre supondremos que q se escoge de manera que admita una base ortogonal.

Notaciones. Sea e_1, \dots, e_n es una base ortogonal de E y pongamos $N = \{1, \dots, n\}$. Si $K = k_1, \dots, k_r \in N$ es una sucesión arbitraria de índices, pondremos e_K para denotar el producto $e_{k_1} \cdots e_{k_r}$. Para tratar este producto, introducimos las siguientes notaciones. Para $j \in N$, ponemos l_j para designar el número de veces que j aparece en K y \widehat{K} para denotar el multiíndice definido de manera que $j \in \widehat{K}$ si y sólo si l_j es impar. También ponemos $t(K)$ para denotar el número de pares $i, j \in N$ tales que $i < j$ y $k_i > k_j$. Finalmente ponemos q_K para designar $\prod_{j=1}^n q(e_j, e_j)^{l_j//2}$, siendo $l_j//2$ el cociente entero de la división de l_j por 2.

Lemma

El producto e_K se puede calcular por la fórmula $e_K = (-1)^{t(K)} q_K e_{\widehat{K}}$

Álgebra geométrica

El *producto interior* resulta de combinar q con el acomplamiento de dualidad $\Lambda E^* \times \Lambda E \rightarrow \Lambda E$, $(\phi, x) \mapsto \phi(x)$. Esta idea se concreta en el acomplamiento $\Lambda E \times \Lambda E \rightarrow \Lambda E$, $(x, y) \mapsto x \cdot y = (\widehat{q}x)(y)$, siendo $\widehat{q} = \wedge q : \Lambda E \rightarrow \Lambda E^*$ el endomorfismo de álgebras exteriores inducido por $q : E \rightarrow E^*$. Por ejemplo, el producto interior $e \cdot e'$ de dos vectores es igual a $q(e, e')$.

Llamaremos *álgebra geométrica* de q a la estructura $\Lambda_q E$ que resulta de dotar al álgebra exterior ΛE con el producto de Clifford (*producto geométrico* o simplemente *producto*) obtenido via el isomorfismo lineal canónico $\wedge : C_q E \rightarrow \Lambda E$ y del *producto interior*. En términos generales, el estudio del álgebra geométrica consiste en dilucidar las interrelaciones entre estos tres productos y también los procedimientos para aplicarla a situaciones concretas.

Involuciones

- La involución lineal $e \mapsto -e$ de E induce un automorfismo involutivo α de $\Lambda_q E$ (*automorfismo canónico*). Su restricción a $\Lambda_q^r E$ es $(-1)^r$. Como consecuencia, $\Lambda_q^+ E = \bigoplus_j \Lambda_q^{2j} = \{x \in \Lambda_q E \mid \alpha(x) = x\}$ es una subálgebra de $\Lambda_q E$.
- La involución $x \mapsto x^t$ de $T(E)$ que invierte el orden de los factores de grado 1 es un antiautomorfismo y conserva las relaciones que definen el álgebra exterior y el álgebra de Clifford. Induce pues un antiautomorfismo involutivo de $\Lambda_q E$, que seguimos denotando $x \mapsto x^t$. Su restricción a Λ_q^r es $(-1)^{r(r-1)/2}$.
- La composición $x \mapsto \bar{x} = \alpha(x^t) = (\alpha(x))^t$ es un antiautomorfismo involutivo (*conjugación de Clifford*). Su restricción a Λ_q^r es $(-1)^{r(r+1)/2}$.
- Una q -isometría de E induce un automorfismo de $\Lambda_q E$.

Formulario

Si $e, e_1, \dots, e_r, e', e'_1, \dots, e'_s \in E$, $x \in \Lambda_q^r E$, $y \in \Lambda_q^s E$:

- $ex = e \cdot x + e \wedge x$, $xe = x \cdot e + x \wedge e = (-1)^r(-e \cdot x + e \wedge x)$.
- $ex + (-1)^r xe = 2e \wedge x$ $ex - (-1)^r xe = 2e \cdot x$.
- $ee' = e \cdot e' + e \wedge e'$, $2e \cdot e' = ee' + e'e$, $2e \wedge e' = ee' - e'e$.
- $x \wedge y = (-1)^{rs} y \wedge x$, $x \cdot y = (-1)^{rs + \min(r,s)} y \cdot x$.
- xy sólo puede tener componentes no nulas en los grados $|r - s|, |r - s| + 2, \dots, r + s - 2, r + s$.
- $(xy)_{r+s} = x \wedge y$. $(xy)_{|r-s|} = \tilde{x} \cdot y$ si $r \leq s$, $x \cdot \tilde{y}$ si $r \geq s$.
- $(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \cdot (e'_1 \wedge \dots \wedge e'_s)$

$$= \begin{cases} (e_2 \wedge \dots \wedge e_r) \cdot (e_1 \cdot (e'_1 \wedge \dots \wedge e'_s)) & \text{si } r \leq s \\ ((e_1 \wedge \dots \wedge e_r) \cdot e'_s) \cdot (e'_1 \wedge \dots \wedge e'_{s-1}) & \text{si } r \geq s \end{cases}$$

Ejemplo: plano euclidiano V_2

Sean u_1, u_2 una base ortonormal. Los elementos de $\Lambda_q V_2$ tienen la forma $x = \alpha + \lambda u_1 + \mu u_2 + \beta i$, $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, siendo $i = u_1 u_2 = u_1 \wedge u_2$. Dado que $i^2 = u_1 u_2 u_1 u_2 = -u_1^2 u_2^2 = -1$, $L_q^+ = \{\alpha + \beta i\}$ es isomorfa al cuerpo \mathbf{C} de los números complejos, siendo i la unidad imaginaria. La multiplicación por i induce en V_2 la rotación de amplitud $\pi/2$ en sentido antihorario: $u_1 i = u_1 u_1 u_2 = -u_2$ y $u_2 i = u_2 u_1 u_2 = -u_1$. Nótese también que $(\alpha + \beta i)^t = \alpha - \beta i$.

Si a y b son vectores, entonces $a \cdot b = |a||b| \cos \varphi$ y $a \wedge b = A(a, b)i = |a||b| \sin \varphi i$, siendo $A(a, b)$ el área orientada del paralelogramo de lados a y b . Por tanto,

$$ab = a \cdot b + a \wedge b = |a||b|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |a||b|e^{i\varphi}$$

Espacio euclidiano V_n : simetrías y rotaciones

Proposición

Si a es un vector unitario de V_n , la aplicación $\sigma_a : V_n \rightarrow V_n$, $x \mapsto axa^{-1} = -axa$, es la simetría respecto del hiperplano a^\perp .

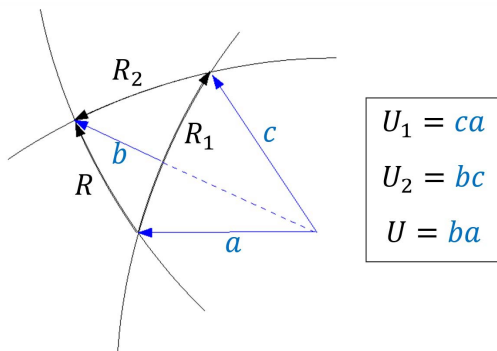
Dem. Es claro que $\sigma_a(a) = -aaa = -a$. Por otra parte, si $x \in a^\perp$, $\sigma_a(x) = -axa = xaa = x$. □

Corolario

Sean a y b son vectores unitarios no paralelos de V_n y $\varphi = \widehat{a, b}$. Pongamos $u = ba$. Entonces la aplicación $\rho_u : V_n \rightarrow V_n$, $x \mapsto uxu^t$, es la rotación de amplitud 2φ con eje $a^\perp \cap b^\perp$.

Dem. Basta notar que

$$uxu^t = baxab = -b(-axa)b = \sigma_a(\sigma_b(x)).$$

Representación de la composición de rotaciones en V_3 .

A los elementos de la forma $u = ab$, a y b vectores unitarios no paralelos, los llamamos *rotadores*.

Ejemplo: espacio euclidiano V_3

Sea u_1, u_2, u_3 una base ortonormal de V_3 . Entonces tenemos una base de $\Lambda_q V_3$, siendo $v_1 = u_2 u_3 = u_2 \wedge u_3$, $v_2 = u_1 u_3 = u_1 \wedge u_3$, $v_3 = u_1 u_2 = u_1 \wedge u_2$ e $\mathbf{1} = u_1 u_2 u_3$:

$\mathbf{1}$	$\{u_1, u_2, u_3\}$	v_1, v_2, v_3	$\mathbf{1}$
1 escalar	3 vectores	3 bivectores	1 trivector

Formulas. $\mathbf{1}^2 = -1$, $\mathbf{1}u_k = (-1)^{k-1}v_k$ y

$$v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = v_1 v_2 v_3 = -1.$$

Poniendo $\mathbf{i} = v_1, \mathbf{j} = v_2, \mathbf{k} = v_3$ vemos que $\mathbf{H} = \Lambda_q^+ V_3$ es un álgebra isomorfa al cuerpo de los cuaternios de Hamilton. Nótese que

$$(\alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k})^t = (\alpha - \beta\mathbf{i} - \gamma\mathbf{j} - \delta\mathbf{k}).$$

Además, ρ_i, ρ_j, ρ_k son las simetrías axiales respecto de u_1, u_2, u_3 .

Ejemplo: álgebras de Dirac y de Pauli

Consideremos una base ortonormal $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (notaciones de Dirac) del espacio de Minkowski $V_{1,3}$ ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$):

$$\gamma_0^2 = 1 \quad \gamma_k^2 = -1 \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \text{ o}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = 2\eta_{\mu\nu}.$$

$\Lambda_q V_{1,3}$: álgebra del espacio-tiempo.

$$\mathbf{I} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \text{ (unidad pseudoescalar). } \mathbf{I}^2 = -1.$$

Si $\sigma_k = \gamma_k \gamma_0$, $\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\sigma_j \cdot \sigma_k = 2\delta_{jk}$ (Álgebra de Pauli).

$$\mathbf{I} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \text{ y } \mathbf{I} \gamma_k = -\gamma_k \mathbf{I}.$$

2. Formalismos cuánticos

He pensado cien veces más sobre el problema cuántico que sobre la teoría general de la relatividad.

ALBERT EINSTEIN

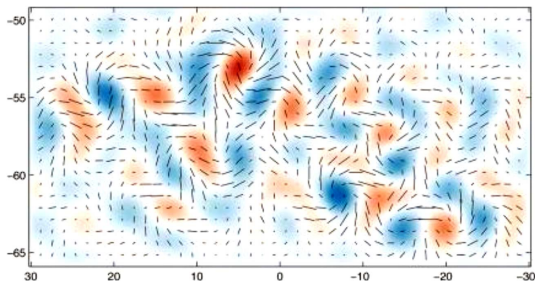
Aprendí a desconfiar de los conceptos físicos como base para una teoría. Se tiene que confiar, en cambio, en un formalismo matemático, incluso si a primera vista no parece estar conectado con la física, y concentrarse en obtener resultados matemáticos interesantes.

PAUL A. M. DIRAC

Vías sorprendentes

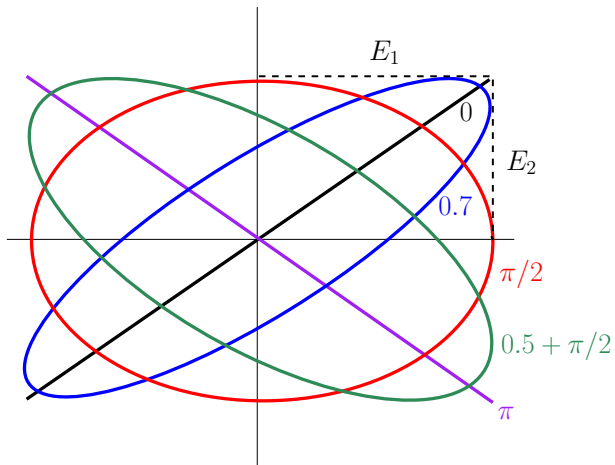
- La senda del espín
- La senda axiomática
- La senda de la lógica cuántica

Quando la luz era opaca



Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization (BICEP2) descubre la primera evidencia directa de la inflación y las ondas gravitacionales primordiales ($1^\circ = 240 \times 10^6$ años-luz).

Polarizaciones clásicas



Estados de polarización de la luz

Campo eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en la dirección Oz :

$$(E_x, E_y) = (E_{0x}e^{i(kz-\omega t+\phi_x)}, E_{0y}e^{i(kz-\omega t+\phi_y)}) = (E_{0x}e^{\phi_x}, E_{0y}e^{\phi_y})e^{i(kz-\omega t)}$$

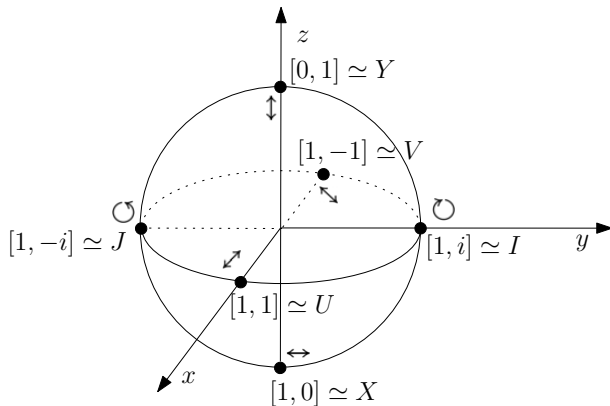
Estado de polarización: $[E_{0x}e^{\phi_x}, E_{0y}e^{\phi_y}] \in \mathbf{P}_\mathbb{C}^1 \simeq \widehat{\mathbf{C}} \simeq S^2$.

$X = [1, 0]$, $Y = [0, 1]$: horizontal y vertical.

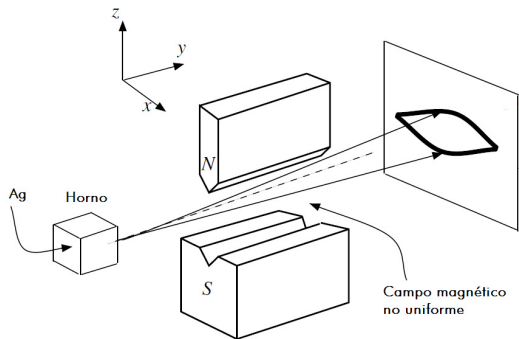
$U = [\rho, \rho]$, $V = [\rho, -\rho]$: diagonal y antidiagonal ($\rho = 1/\sqrt{2}$)

$I = [\rho, \rho i]$, $J = [\rho, -\rho i]$: circular dextrógira y levógira.

Luz en la esfera de Riemann

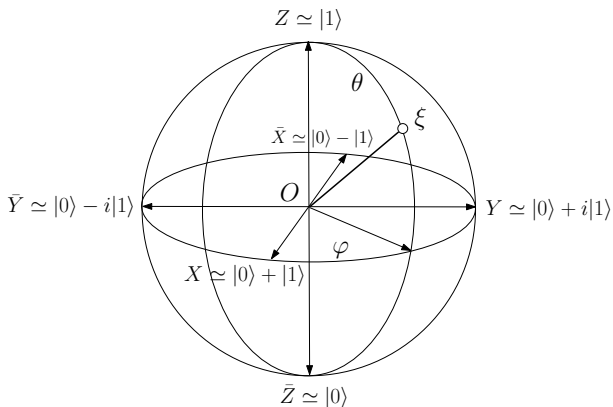


Experimento de Stern-Gerlach



Esquema del experimento de Stern-Gerlach (1922)

q -bit



$$|\xi\rangle \simeq e^{-i\varphi/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

La senda axiomática

Aspectos fundamentales de los que una formalismo cuántico ha de dar cuenta:

- Sistema cuántico
- Espacio de estados
- Aparatos de preparación
- Observables
- Medida de un observable
- Evolución temporal

Contrastes esenciales con la física clásica

- Infdefinición objetiva
- Estocasticidad y probabilidad
- Entrelazamiento y no localidad

Refutación experimental de las teorías con variables locales ocultas.
Experimento GHZ = Greenberger-Horne-Zeilinger (1989).

Q₁. a) Sistemas y estados cuánticos

Sistema cuántico: Un espacio vectorial hermítico E .

Estados cuánticos (puros): Los puntos del espacio proyectivo $[E]$.

- El producto hermítico $\langle x|y\rangle$ se supone lineal en y y conjugado-lineal en x .
- $|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$, $\hat{x} = x/|x|$.
- El estado definido por $x \in E - \{0\}$ se suele denotar $|x\rangle$ (notación *ket* de Dirac).
- Dado que $|x\rangle = |\hat{x}\rangle$, todo estado se puede representar por un vector unitario $u = \hat{x}$.
- Dos vectores unitarios u y u' definen el mismo estado si i sólo si $u' = e^{i\varphi} u$ para algún $\varphi \in \mathbf{R}$ (el estado determina el *vector de estado* salvo un *factor de fase* (o *fasor*))

Q1. b) Superposición cuántica

Si $u, u' \in E - \{0\}$ y $\xi, \xi' \in \mathbf{C}$, el estado $|\xi u + \xi' u'\rangle$ se suele denotar $\xi|u\rangle + \xi'|u'\rangle$ (¡abuso de notación!) y se dice que es la *superposición* de $|u\rangle$ y $|u'\rangle$ (con coeficientes ξ y ξ').

Ejemplos:

- V. Luz en la esfera de Riemann y q -bit
- Si u_j ($j = 0, \dots, n - 1$) es la base estándar de \mathbf{C}^n y $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$,

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= |\xi_0 u_0 + \dots + \xi_{n-1} u_{n-1}\rangle \\ &= \xi_0 |u_0\rangle + \dots + \xi_{n-1} |u_{n-1}\rangle \\ &= \xi_0 |0\rangle + \dots + \xi_{n-1} |n-1\rangle \end{aligned}$$

(usualmente se escribe $|j\rangle$ en lugar de $|u_j\rangle$).

Q₂. Aparatos y observables

Aparato: Conjunto de pares $A = \{(a_1, E_1), \dots, (a_r, E_r)\}$ tales que

- Los a_j son números reales distintos ($\{a_1, \dots, a_r\}$ es la escala o graduación del aparato); y
- Los E_j son subespacios vectoriales de E , 2 a 2 ortogonales, con $E = \oplus_j E_j$.

Observación o medida con A : Suponiendo que el estado es $|u\rangle$,

- selecciona un valor a_j con probabilidad $p_j = |\pi_{E_j} u|^2$, y
- cambia el estado $|u\rangle$ al estado $|\pi_{E_j} u\rangle$.

Suma de probabilidades:

$$\sum_j p_j = \sum_j |\pi_{E_j} u|^2 = \left| \sum_j \pi_{E_j} u \right|^2 = |u|^2 = 1.$$

Observable \leftrightarrow operador autoadjunto:

A cada observable A se le puede asignar el operador autoadjunto $\hat{A} = \sum_j a_j \pi_{E_j}$.

Recíprocamente (teorema de representación espectral), todo operador autoadjunto $\hat{A} : E \rightarrow E$ da lugar a un observable formado con los valores propios distintos a_j de \hat{A} y los correspondientes subespacios $E_j = E_{a_j}$ de vectores propios.

Ejemplo (observables de Pauli). $\sigma_z = \{(1, Z), (-1, \bar{Z})\}$ es el aparato SG para medir si el espín está dirigido hacia arriba o hacia abajo.

Como operador es la matriz $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$. σ_x y σ_y se definen

análogamente y sus matrices resultan ser $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} & -i \\ i & \end{bmatrix}$,

respectivamente.

Q₃. Dinámica unitaria

Supongamos que el sistema E está aislado en el intervalo $[0, t]$. Sea x_0 el estado del sistema E en el instante $t = 0$. Entonces existe un operador unitario $U_t : E \rightarrow E$ tal que $x_t = U_t x_0$ es el estado del sistema en el instante t .

Si $U_t = e^{-iHt}$, siendo H un observable, decimos que la evolución es hamiltoniana, y que H es el hamiltoniano del sistema.

Nota. $U_t U_t^\dagger = e^{-iHt} (e^{-iHt})^\dagger = e^{-iHt} e^{+iH^\dagger t} = Id$.

Ecuación de Schrödinger: Si H no depende de t , $\frac{dx}{dt} = -iHx$.

Q₄. Entrelazamiento

Dados dos sistemas cuánticos E y E' , el sistema cuántico compuesto por los dos sistemas es $E \otimes E'$ con la métrica hermítica que cumple

$$\langle x \otimes x' | y \otimes y' \rangle = \langle x | y \rangle \cdot \langle x' | y' \rangle.$$

De los estados de la forma $|x \otimes x'\rangle$ se dice que son *compuestos*.

Los otros estados de $E \otimes E'$ son estados *entrelazados* (*entangled*).

Por ejemplo, si $|x\rangle$ e $|y\rangle$ son estados ortogonales de E , y $|x'\rangle$ y $|y'\rangle$ estados ortogonales de E' , entonces

$|x \otimes x' + y \otimes y'\rangle = |x\rangle|x'\rangle + |y\rangle|y'\rangle$ es un estado entrelazado (estado EPS).

Referencias

- Transparencias: [SXD-Talks](#)
- Opúsculo expositivo: [GA-SimposioJBSG](#) (20.4)
- J. Rué, S. Xambó, *Mathematical Essentials of Quantum Computing* [pdf](#).