

IEC
EINSTEIN I L'ACTUALITAT
DE LES SEVES CONTRIBUCIONS

Einstein i les matemàtiques

A Joan Girbau, *in memoriam*, per la seva humanitat
i el seus llargs i fructífers mestratges N

S. Xambó

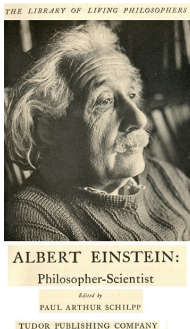
IMTech & BSC

3/3/2023

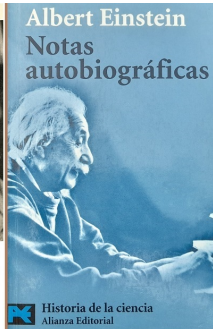
Índex

- Algunes referències bàsiques
- Formació matemàtica i física
- Teló de fons per a un geni
- *Annus mirabilis* (1905)
- Les matemàtiques de la RG
- Llegats
- Bibliografia

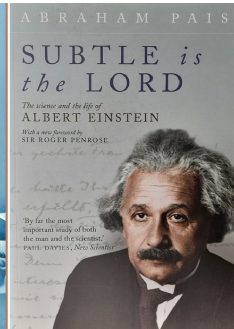
[1] (schilpp-1951)



[2] (einstein-1949)

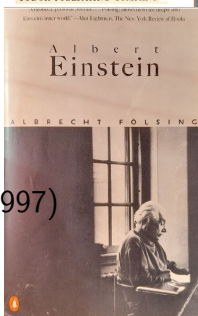


[3] (pais-1983)

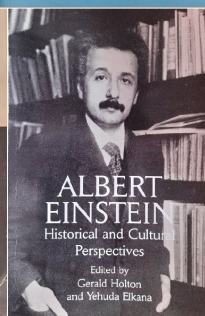


N

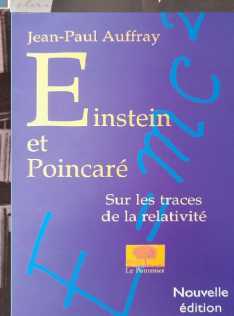
[4] (foelsing-1998)



[5] (holton-elkana-1997)



[6] (auffray-2005)



Facultat de Matemàtiques i Estadística

Conferències FME

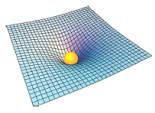


Volum I
Curs Poincaré
2003-2004



Facultat de Matemàtiques i Estadística

Conferències FME

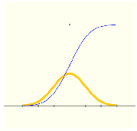


Volum II
Curs Einstein
2004-2005



Facultat de Matemàtiques i Estadística

Conferències FME



Volum III
Curs Gauss
2005-2006



Facultat de Matemàtiques i Estadística

Conferències FME

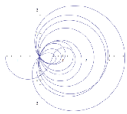


Volum IV
Curs Euler
2006-2007



Facultat de Matemàtiques i Estadística

Conferències FME



Volum V
Curs Riemann
2007-2008



Facultat de Matemàtiques i Estadística

Conferències FME

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{Q}/\mathbb{N}, \\ (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{R}/\mathbb{N} \wedge \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Volum VI
Curs E. Noether
2008-2009



Presentació (Sebastià Xambó Descamps)	9	Einstein y las teorías de campos unificados² (Manuel Asorey Carballeira)	101
Prefaci (Comissió Einstein)*	11	Geometría de Lorentz: de lenguaje a herramienta básica en la Relatividad General² (Alfonso Romero Sarabia)	123
Índex d'autors	15	Del efecto fotoeléctrico (1905) a la condensación de Bose-Einstein (1925)—Un curioso ejemplo de simbiosis en el desarrollo de teorías físicas² (Luis Navarro Veguillas)	149
Einstein: Física, Tecnología i Matemàtiques¹ (Ramón Vilaseca Alavedra)	17	Einstein, mestre de la física estadística (David Jou Miravent)	179
Einstein, Felix Klein, David Hilbert y Hermann Weyl² (José Manuel Sánchez Ron)	61	On the cosmological constant, the vacuum energy, and divergent series (Emili Elizalde Rius)	203
L'equació d'Einstein de la relativitat general i la seva relació amb l'equació d'ona² (Joan Girbau Badó)	79	Teoremas de singularidades en relatividad general³ (José M. M. Senovilla)	255

* Víctor González, Oriol Serra, Joan Solà-Morales, Eduard Recasens, Sebastià Xambó

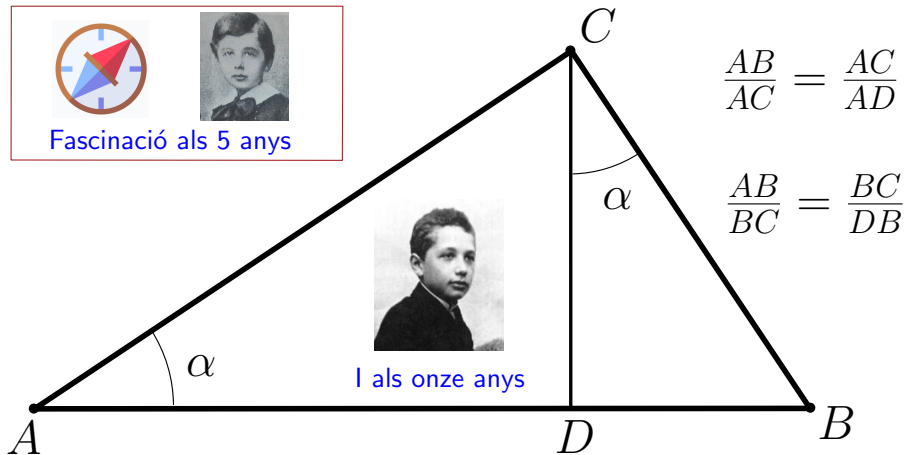
N

Més informació:

<https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/FME/ConferenciesFME.html>

Accés als volums: <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/79737>

Descobriment de la brúixola i del teorema de Pitàgores: [2], [1], [4]

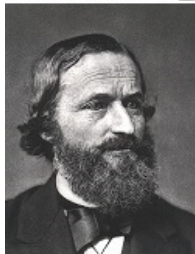


$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB^2$$

Geometria analítica i càlcul diferencial i integral



Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Newton (1642-1727),
Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783), Cauchy (1789-1857). N



Hurwitz (1859-1919), Minkowski (1864-1909),
Kirchhoff (1824-1887), Helmholtz (1821-1894), Hertz (1857-1894)

N

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



PUBLICACIONS DE LA SCH

4

UNA LECTURA DEL
*DISQUISITIONES GENERALES
CIRCA SUPERFICIES CURVAS*
DE C.F. GAUSS

Agustí Reventós
Carlos J. Rodríguez

[7] (reventos-rodriguez-2006)

Amb un apèndix de Joan Girbau

N

Equacions de Maxwell

Forma diferencial	
$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0$	CG
$\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}$	F
$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$	G
$\operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$	AM

CG, llei de Coulomb-Gauss.

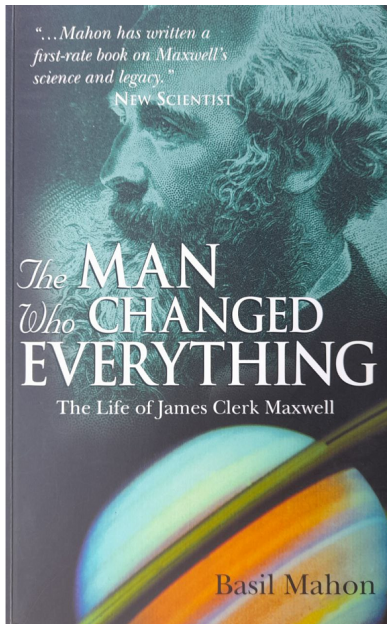
F, llei de Faraday.

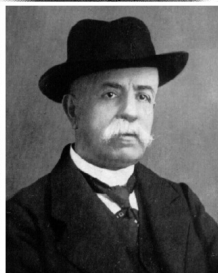
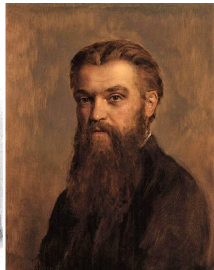
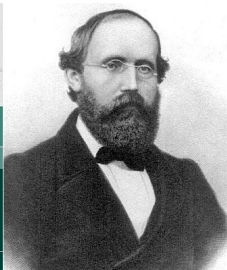
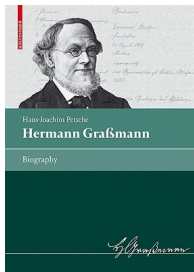
G, llei de Gauss de \mathbf{B} .

AM, llei d'Ampère Maxwell.

[8] (mahon-2004)

N





H. Grassmann (1809-77), B. Riemann (1826-66), W. K. Clifford (1845-79)
 F. Klein (1849-1925), Ricci (1853-1925), H. Poincaré (1854-1912)

N



D. Hilbert (1862-1943) T. Levi-Civita (1873-1941)

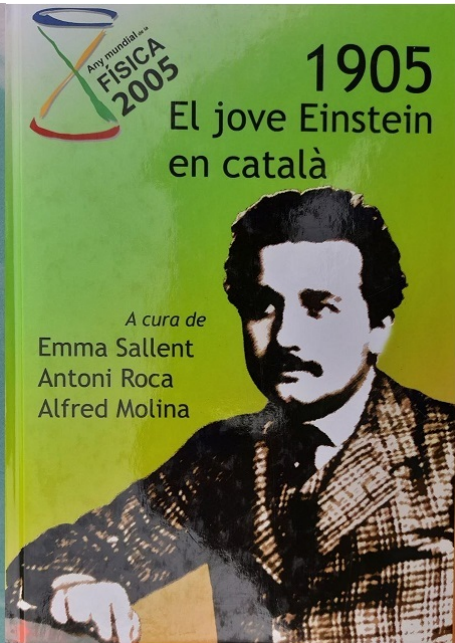
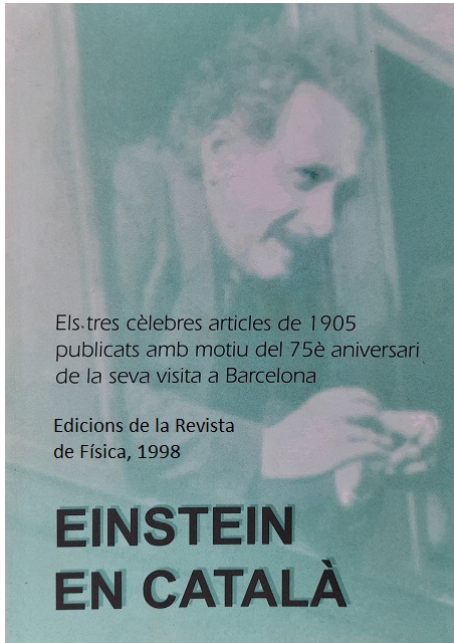


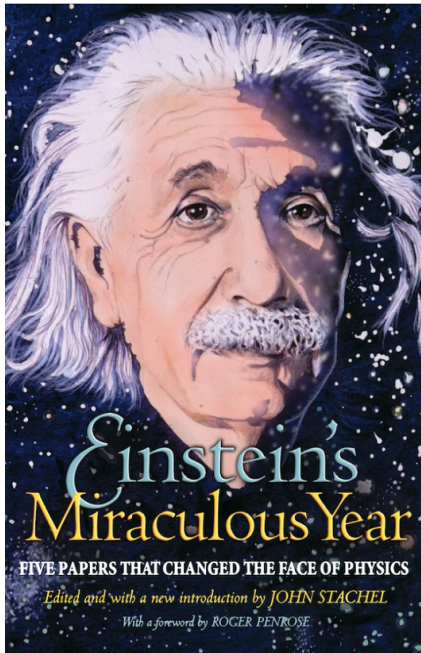
E. Noether (1882-1935) H. Weyl (1885-1955)



M. Grossmann (1878-1936)

N





Einstein 1905: un año milagroso

Prólogo de Roger Penrose
John Stachel (ed.)

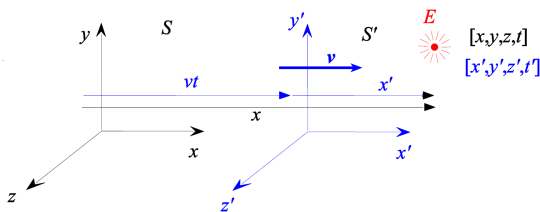
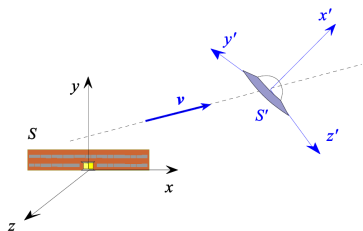


Cinco artículos que cambiaron la física



Drakontos Clásicos

Crítica



Si $t' = t$, llavors $x' = x - vt$ (grup de Galileu).

Si $t' \neq t$, existeix una velocitat universal finita c tal que

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad w = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

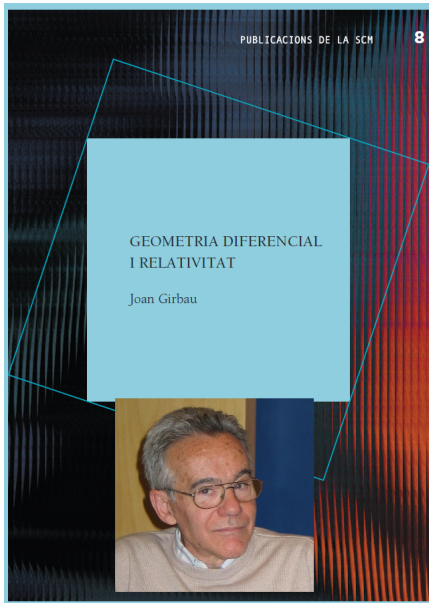
(grup de Lorentz de velocitat c). Els fets experimentals permeten concloure que c és la velocitat de la llum en el buit.

El 1908 Minkowski introdueix *espai-temps* de dimensió 4, una noció que Einstein adoptarà posteriorment com a pedra angular de la teoria general de la relativitat.

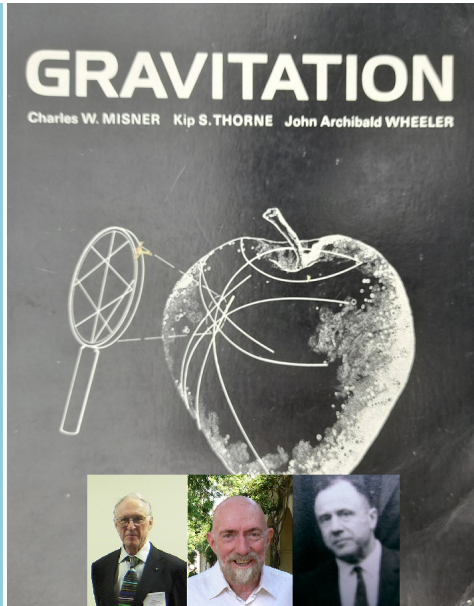
- 1907: Einstein concep el Principi d'Equivalència, clau de volta de la RG.
- 1912: Creu que pot superar totes les dificultats amb l'ajut de Grossmann (carta Sommerfeld).
- 1915: Visita d'Einstein a Göttingen. Hilbert publica les equacions cinc dies abans que Einstein, però la prioritat és d'Einstein (v. l'article de Sánchez-Ron en el volum Einstein de l'FME). N

Eq. de Poisson	Eq. d'Einstein, $\kappa = 8\pi G/c^2$
$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho$	$R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk} = \kappa T_{jk} \mid \text{Ricci} - \frac{1}{2} R g + \Lambda g = \kappa T$

Els termes $-\frac{1}{2} R g + \Lambda g$ es justifiquen d'una manera semblant a com Maxwell va introduir el corrent de desplaçament, però aquí l'expressió és l'única (sota determinades hipòtesis sobre la seva dependència de g) que sumada a Ricci dona un tensor amb divergència nul·la (un resultat de Poincaré).



[9] (girbau-2022)

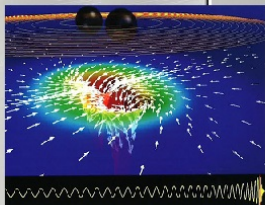


N [10] (misner-thorne-wheeler-1973)

NATIONAL BESTSELLER

BLACK HOLES & TIME WARPS

EINSTEIN'S OUTRAGEOUS LEGACY



KIP S. THORNE
FOREWORD BY STEPHEN HAWKING

"Deeply satisfying. . . [An] engrossing blend of theory, history, and anecdote." —WALL STREET JOURNAL

To Sebastian
I greatly enjoyed talking with
you today! Best Wishes, Kip ^{26 May 2011}

BLACK HOLES AND TIME WARPS

Einstein's Outrageous Legacy

KIP S. THORNE

THE FEYNMAN PROFESSOR OF THEORETICAL PHYSICS
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

[11] (thorne-1994)

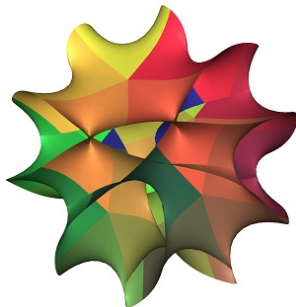
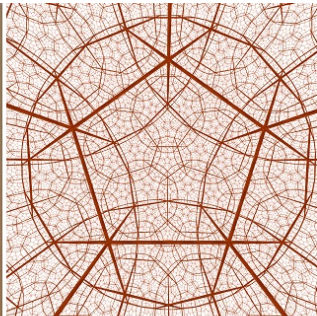
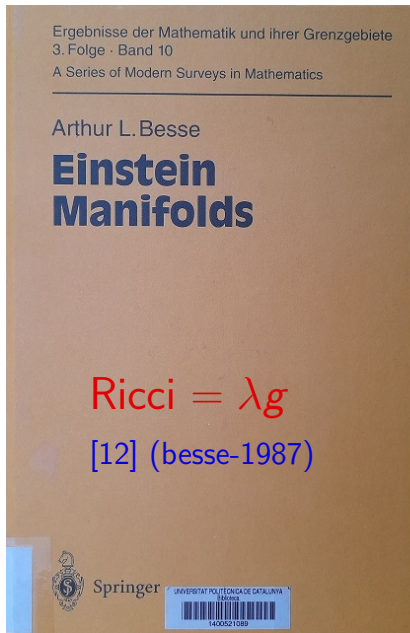
A volume of

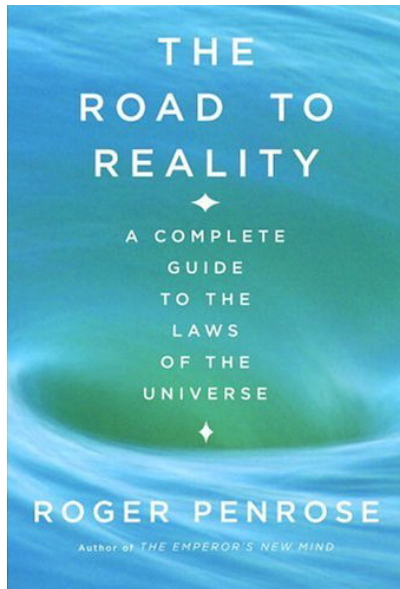
THE COMMONWEALTH FUND BOOK PROGRAM
under the editorship of Lewis Thomas, M.D.

W · W · NORTON & COMPANY

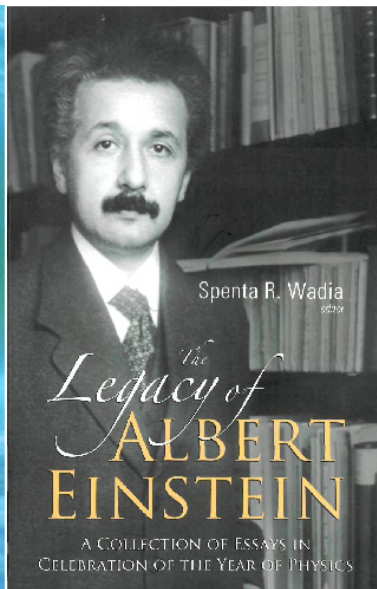
New York London

N

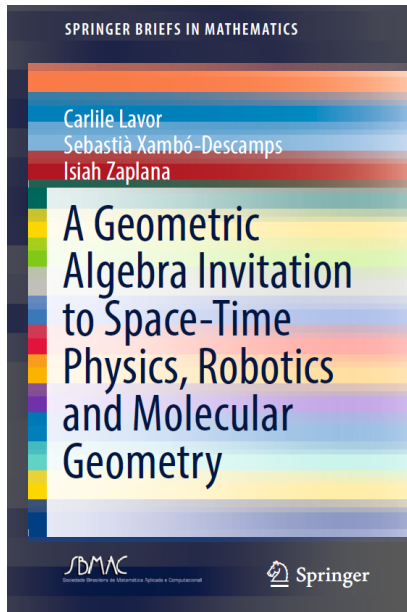




[13] (penrose-2005)

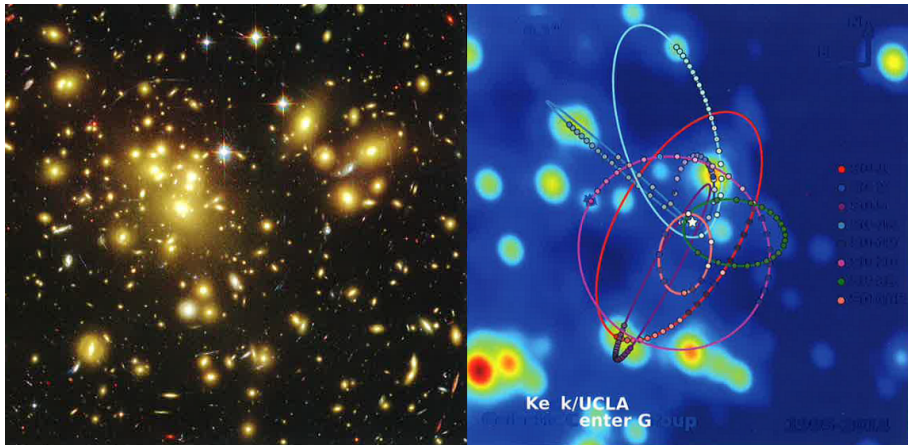


[14] (wadia-2006)



1	Low Dimensional Geometric Algebras	1
1.1	Linear Algebra Background	3
1.2	GA of the Euclidean Plane, \mathcal{G}_2	8
1.3	GA of the Euclidean Space, \mathcal{G}_3	14
1.4	GA of the Minkowski Space, $\mathcal{G}_{1,3}$	23
1.5	Exercises	30
3	Minkowski's Space-Time: Geometry and Physics	53
3.1	From Physics to Geometry and Back	54
3.2	A GA View of the Lorentz Group	60
3.3	A GA View of Electrodynamics	63
3.4	A GA View of Dirac's Equation	70
3.5	Exercises	72

[15] (lavor-xambo-zaplana-2018)



- Gauss, teoria de superfícies, topografia terrestre, ...
- Einstein, geometria riemanniana, relativitat general, topografia de l'univers, ...

N

Moltes gràcies!

<https://mat-web.upc.edu/people/sebastia.xambo/99/s-iec.pdf>

Moltes gràcies per la invitació a participar en aquesta iniciativa.

A Joan Girbau, *in memoriam*, per la seva humanitat i el seus llargs i fructífers mestratges.

Si el resplendor d'Einstein en la física i la cosmologia és com la llum del dia, llavors hem d'esperar a la nit per veure el birbilleig de les estrelles en les matemàtiques. Però a la llum de la ciència, i especialment de la que va crear Einstein, les estrelles són sols i el sol una simple estrella.

P

El llibre editat per Schilpp conté l'autobiografia d'Einstein (en alemany i anglès) que comença així: “Aquí m'assec per escriure, als 67 anys, quelcom semblant al meu propi obituari”.

A destacar les extenses biografies de Pais i Fölsing. Com a biografia científica, la de Pais és indispensable. Fixeu-vos també en la E d'Einstein en el títol d'Auffray, tot i que l'objectiu de l'assaig és destacar les contribucions de Poincaré.

P

Des del curs 2003-2004, l'FME dedica cada curs a una personalitat històrica. Dels sis primers (dedicats a Poincaré, Einstein, Gauss, Euler, Riemann i Noether) se'n van publicar sengles volums, agrupats sota la rúbrica "Conferències FME". Tots són rellevants per al tema de la xerrada d'avui, i molt especialment el volum II, dedicat a Einstein.

P

Entre les contribucions d'aquest volum em sembla oportú destacar avui les següents:

Conferència inaugural: Ramón Vilaseca; Conferències de la Jornada Einstein (9 de febrer de 2015): José M. Sánchez Ron, Joan Girbau, Manuel Asorey, Alfonso Romero i Luis Navarro; Conferència de cloenda: José Senovilla; altres conferències: David Jou i Emili Elizalde. La Comissió Einstein va estar formada per Víctor González (estudiant), Oriol Serra, Joan Solà-Morales, Eduard Recasens, i Sebastià Xambó.

A destacar el títol de l'article de Joan Girbau: “L'equació d'Einstein de la relativitat general i la seva relació amb l'equació d'ona”.

P

De l'Autobiografia, [2] (einstein-1949): Als 12 anys vaig viure una segona meravella d'una naturalesa totalment diferent [la primera, als 4-5 anys, fou l'encís d'una brúixola]: un petit llibre de geometria plana euclidiana que va arribar a les meves mans a principis del curs escolar. Afirmacions no evidents, com per exemple que les tres altures d'un triangle es tallen en un punt, es podien demostrar amb tanta certesa que qualsevol dubte semblava fora de qüestió. **Aquesta lucidesa i certesa em van causar una impressió indescriptible.** Que s'haguessin d'acceptar suposicions sense provar no em va amoïnar. Per exemple, recordo que un oncle em va explicar el teorema de Pitàgores abans que m'hagués arribat **el sagrat llibret de geometria.** Després de molt d'esforç vaig aconseguir "provar" aquest teorema sobre la base de la semblança dels triangles; en fer-ho em va semblar "evident" que les relacions dels costats dels triangles rectangles haurien d'estar completament determinades per un dels angles aguts. Només em semblava necessari demostrar un enunciat que no semblés "evident" d'una manera semblant. A més, **els objectes amb què tracta la geometria semblaven no ser de tipus diferent dels objectes de**

percepció sensorial, “que es poden veure i tocar”. Aquesta idea primitiva, que probablement també es troba al fons de la coneguda problemàtica kantiana relativa a la possibilitat de “judicis sintètics *a priori*”, es basa òbviament en el fet que la relació dels conceptes geomètrics amb els objectes d'experiència directa (vareta rígida, interval finit, etc.) estava **inconscientment present**.

Si així semblava que era possible obtenir un cert coneixement dels objectes de l'experiència mitjançant el pensament pur, aquest “prodigi” era erroni. No obstant això, per a qualsevol que ho experimenti per primera vegada, és meravellós que es pugui arribar a tal grau de certesa amb el pensament pur com els grecs ens van demostrar per primera vegada que és possible en geometria.

De [4] (foelsing-1998), p 24: Einstein no es va adonar plenament que les relacions entre geometria i realitat poden ser més complexes i profundes fins al desenvolupament de la seva teoria general de la relativitat.

[13] (penrose-2005), p. 40: Què passa amb el teorema de Pitàgores, que no és vàlid en geometria hiperbòlica? Hem d'abandonar aquest magnífic llegat pitagòric? En absolut, [...] totes les geometries "riemannianes", que formen el marc essencial per a la teoria general de la relativitat d'Einstein, depenen de manera vital del teorema de Pitàgores, ja que és vàlid en el límit de les petites distàncies. A més, apareix en altres grans àrees de les matemàtiques i la física (per exemple, l'estructura mètrica unitària" de la mecànica quàntica). P

De l'Autobiografia, [2] (einstein-1949): Des dels dotze als setze anys em vaig familiaritzar amb els elements de les matemàtiques juntament amb els principis del càlcul diferencial i integral. En fer-ho vaig tenir la sort de trobar llibres que no eren massa particulars en el seu rigor lògic, però que ho compensaven deixant que els pensaments principals destaquessin clarament i sinòpticament. Aquesta ocupació era, en conjunt, realment fascinant; es van assolir clímaxs comparables amb els de la geometria elemental: la idea bàsica de la geometria analítica, les sèries, els conceptes de diferencial i integral.

També vaig tenir la sort de conèixer els resultats i mètodes essencials de tot el camp de les ciències naturals en una excel·lent exposició popular, que es va limitar gairebé en tot moment a aspectes qualitatius (Els "People's Books on Natural Science" de Bernstein, un treball de cinc o sis volums), una obra que vaig llegir amb una atenció sense alè.

També havia estudiat ja una mica de física teòrica i, als disset anys, vaig entrar a l'Institut Politècnic de Zuric. P

Allà vaig tenir professors excel·lents (per exemple, Hurwitz, Minkowski), de manera que realment podria haver obtingut una bona educació matemàtica. Tanmateix, vaig treballar la major part del temps al laboratori de física, fascinat pel contacte directe amb l'experiència. La resta del temps el vaig passar principalment a casa estudiant els treballs de Kirchhoff, Helmholtz, Hertz, etc. El fet de descuidar fins a cert punt les matemàtiques no era degut només al meu més gran interès per les ciències naturals, sinó també per la impressió que les matemàtiques estaven dividides en nombroses especialitats, cadascuna de les quals podia acaparar fàcilment la curta vida que ens és concedida. En conseqüència, em vaig veure en la posició de l'ase de Buridan, que era incapaç de decidir a quin feix de fenc dirigir-se. Això raïa, òbviament, en què la meua intuïció no era prou forta en el camp de les matemàtiques per diferenciar clarament allò fonamentalment important, allò que és realment bàsic, de la resta de l'erudició més o menys prescindible. P

[16] (einstein-1956), *The meaning of relativity* (6a edició), Ap. II: “Els coneixements matemàtics que han permès establir la teoria general de la relativitat els devem a les investigacions geomètriques de Gauss i Riemann”.

I de Gauss diu que “va investigar les propietats mètriques d’una superfície de l’espai euclidià tridimensional, i demostrà que aquestes propietats es poden descriure mitjançant conceptes que es refereixen només a la superfície mateixa (*conceptes intrínsecs*) i no a la seva relació amb l’espai ambient (*extrínsecs*). Com que, en general, no existeix un sistema de coordenades preferit en una superfície, aquesta investigació va portar per primera vegada a expressar les magnituds rellevants en coordenades generals”. A celebrar la publicació d’*Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas* de C. F. Gauss, de n’Agustí Reventós i en Carlos Rodríguez, que podeu trobar al web de la SCM, i el tractament que fan del *theorema egregium* segons el qual la curvatura, que es defineix extrínsecament, resulta ser un concepte intrínsec. P

Sense el terme en \mathbf{E} , l'equació d'Ampère-Maxwell (la quarta) només és vàlida si el corrent \mathbf{j} és estacionari, que és el contingut de la llei d'Ampère. La raó és que la divergència del rotacional de \mathbf{B} és nul·la i en canvi la divergència de \mathbf{j} en general no ho és. El terme $\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ el va afegir Maxwell, amb el nom de *corrent de desplaçament*, per evitar aquesta contradicció. Veurem que Einstein es va veure amb una situació semblant en cas de les equacions de la relativitat general i que va tractar la qüestió d'una manera semblant. Val a dir que el camp electro-magnètic es propaga en el buit en ones a la velocitat $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, que numèricament coincideix amb la velocitat de la llum en el buit. Aquest és el moment de la unificació de l'electricitat, el magnetisme i l'òptica. A més, si acceptem el principi de relativitat, c ha de ser independent del sistema inercial en què es mesuri, ja que μ_0 i ε_0 són quantitats electromagnètiques que no dependran de l'observador inercial. P

Herrmann Grassmann: Noció d'estructura matemàtica. En particular d'espai vectorial (de qualsevol dimensió), de l'àlgebra exterior, en la que arrelen les geometries supersimètriques actuals, i la noció de forma quadràtica com element clau del que en podem anomenar *espais geomètrics* (lineals). Important primer pas en la direcció d'una geometria en el sentit de Leibniz (sense coordenades: *característica geomètrica*)

Bernhard Riemann: “Riemann ha estès la teoria de superfícies de Gauss a espais d'un nombre arbitrari de dimensions (espais amb mètrica riemanniana, que es caracteritza per un camp tensorial simètric de segon rang). En aquesta admirable investigació va trobar l'*expressió general de la curvatura* en espais mètrics de dimensions superiors” ([16] (einstein-1956), App. II).

William K. Clifford: Fa un pas decisiu més enllà de Grassmann amb l'àlgebra geomètrica (o de Clifford). Tradueix a l'anglès la memòria

de Riemann de 1844 (*Sobre les hipòtesis que estan a la base de la geometria*) i concep la idea, elaborant sobre suggeriments de Riemann, que la geometria de l'espai està determinada per la distribució de la matèria. L'àlgebra geomètrica és un formalisme idoni, però relativament poc conegut, per expressar à-la-Leibniz les teories de la relativitat.

Felix Klein: Programa d'Erlangen: Geometria com l'estudi dels conceptes i relacions invariants per l'acció d'un grup; jerarquia de les geometries conegudes.

Gregorio Ricci: Càlcul tensorial (càlcul absolut), teoria de connexions. Mestre de Tullio Levi-Civita. El 1900 publiquen [17] (ricci-levicivita-1900) (*Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*), basat en [18] (ricci-1886) (*Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali*), que al seu torn

desenvolupa idees de M. Christoffel de 1869 (ús dels símbols de Riemann-Christoffel, etc.).

Henri Poincaré: Va introduir el *principi de relativitat* el 1904 i havia trobat un argument heurístic per la fórmula $E = mc^2$. En el llibre [4] (foelsing-1998), p. 215: “Poincaré i Einstein van passar com vaixells a la nit, fent tot el possible per defugir-se un a l’altre”. El cas més dramàtic en relació al que va necessitar Einstein del càlcul tensorial el 1912 (any de la mort de Poincaré) és un remarcable teorema de Poincaré que esmentaré en parlar de la RG.

El llibre [6] (auffray-2005) (*Einstein et Poincaré: Sur les traces de la relativité*) aporta una revisió crítica de la relació d’Einstein amb alguns d’aquests predecessors. Resumit: “Poincaré i Einstein van encarnar dues concepcions diferents de la cerca del saber. La diferència entre ells es pot resumir en dues paraules: “esperit

matemàtic". Va ser innat a Poincaré, no ho va ser a Einstein, i veurem les conseqüències que això va comportar.

P

En el desenvolupament de la RG, Marcel Grossmann va tenir un paper important assistint a Einstein en l'assimilació del càlcul tensorial i en particular del càlcul absolut de Ricci i Levi-Civita. Hilbert va tenir un paper semblant al d'un catalitzador: seminari d'Einstein de 12 hores a Göttingen a principis de l'estiu de 1915 (hi van assistir Hilbert i Klein, Weyl), obtenció de les equacions el novembre del mateix any. Emmy Noether va contribuir amb l'article de 1918 en què obtingué una teoria general de les quantitats conservades en l'evolució d'un sistema associades a les simetries d'aquest sistema (tothom el cita sota la rúbrica de "teoremes de Noether"). Weyl va publicar el 1918 *Raum, Zeit, Materie* (espai, temps, matèria), una exposició primerenca de les teories de la relativitat, del qual en van aparèixer diverses edicions en els anys posteriors.

Del pròleg de Roger Penrose:

...durant aquest mateix any Einstein va aportar també noves idees fonamentals en dues àrees més, amb la seva tesi doctoral sobre la determinació de les dimensions moleculars i amb la seva anàlisi de la naturalesa del moviment brownià. *Aquesta darrera anàlisi per si sola li hauria valgut a Einstein un lloc en la història.* En realitat, el seu treball sobre el moviment brownià (juntament amb el treball independent i paral·lel de Smolouchowski) va establir les bases d'una part important del coneixement estadístic que ha tingut enormes implicacions en altres nombrosos camps. P

1907: La idea més feliç de la meua vida: en caiguda lliure no es percep la gravetat, i tots el cossos, independent de la seva constitució i forma cauen de la mateixa manera. Una referència en caiguda lliure és inercial.

1912: Albert Einstein va escriure des de Zuric al cèlebre físic Arnold Sommerfeld el següent: Ara estic treballant exclusivament en el problema de la gravitació i crec que puc superar totes les dificultats amb l'ajuda d'un amic matemàtic [Grossmann]. Però una cosa és certa: mai abans a la meua vida m'havia preocupat tant per res, i ara veig amb un enorme respecte les matemàtiques, les parts més subtils de les quals considerava fins ara, en la meua ignorància, com un pur luxe! En comparació amb aquest problema, la teoria original de la relativitat és un joc de nens.

El *principi de relativitat general*: les lleis físiques s'expressen de la mateixa forma en tots els sistemes de coordenades (és a dir, s'han de poder expressar intrínsecament).

El gran Dirac va publicar [19] (dirac-1975), *General theory of relativity* el 1975 (70 pàgines, 35 lliçons) des de l'òptica d'un físic. És instructiu comparar-lo amb les exposicions d'Einstein o amb les de caire més 'geomètric' (per dir-ho d'alguna manera), com per exemple el llibre [20] (sachs-wu-1977), *General relativity for mathematicians*.

P

El llibre de Joan Girbau aplica els mètodes rigorosos de la geometria diferencial (capítols 1-6) a la física clàssica (capítols 7-13) i a la relativitat (capítols 14-20). En concret: 18 Els fonaments de la RG, 19 Camp gravitatori produït per una estrella, 20 Models cosmològics.

El llibre enciclopèdic dels físics Misner-Thorpe-Wheeler (1280 pàgines) il·lustra el domini de la geometria diferencial que van trobat necessari assolir per donar compte cabal de la teoria de la gravitació d'Einstein.

P

De la lliçó de Kip Thorne en l'ocasió del seu DHC per la UPC (25 de maig de 2017):

L'any 1980, em va quedar clar que les fonts més fortes que LIGO detectaria probablement serien col·lisions de forats negres. Per detectar les ones de les col·lisions i extreure'n la informació, *necessitarem un catàleg de totes les formes d'ona que podrien produir les col·lisions*. Calcular aquestes formes d'ona era tan difícil que no es podia fer només amb llapis i paper. Caldria simulacions per ordinador: resoldre les equacions de la relativitat d'Einstein en un ordinador, una empresa anomenada *relativitat numèrica*.

I d'això és del que vam parlar, ja que havia llegit el seu llibre, on s'especulava com serien aquestes formes d'ona. La part més dubtosa, abans del xerric final, va resultar ser més senzilla del que havia esperat.

Exemples

- Si $T = 0$, $\text{Ricci} = \frac{2\Lambda}{n-2}\mathbf{g}$, $\lambda = \frac{2\Lambda}{n-2}$.
- L'espai euclidià, amb $\lambda = 0$.
- L'esfera S^n , $\lambda = n - 1$.
- L'espai hiperbòlic de dimensió n , $\lambda = -(n - 1)$.
- L'espai projectiu complex de dimensió n , $\lambda = n + 1$.
- Les anomenades varietats de Calabi-Yau, $\lambda = 0$.

P

En el prefaci de Penrose al llibre de Pais, llegim: Einstein va ser *el primer a trencar amb la física clàssica de l'època* i a introduir la crucial idea quàntica “ona/partícula”: la idea que tot i que la llum era una ona electromagnètica, de vegades s'havia de tractar com una col·lecció de partícules (ara anomenats “fotons”). A través d'aquest treball, Einstein va descobrir l'explicació de l'efecte fotoelèctric, que finalment li va guanyar un premi Nobel. Va proporcionar (a la seva tesi doctoral) un *mètode nou per determinar les mides de les molècules, en un moment en què la seva mateixa existència encara era controvertida. Va ser un dels primers a comprendre la naturalesa detallada del petit moviment “brownià” de petites partícules en suspensió i a proporcionar un començament a la nova física estadística. Va aportar idees clau que van portar al desenvolupament dels làsers.* I tot això per no parlar de les seves *teories revolucionàries de la relativitat especial i general!*

References I

- [1] P. A. Schilpp, ed., *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*.
The Library of Living Philosophers, Tudor Publishing Company, 1951.
- [2] A. Einstein, *Autobiographical notes*.
Open Court Publishing, 1949.
Included in [1], pp. 1-95, in German and English. Published in Spanish, with a Preface by Paul Arthyur Schilpp, by Alianza Editorial (libro de bolsillo) in 1984, with the title: *Albert Einstein, Notas autobiográficas*.
- [3] A. Pais and S. Goldberg, *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*.
American Association of Physics Teachers, 1983.

References II

- [4] A. Fölsing, *Albert Einstein*.
Penguin Books, 1998.
- [5] G. J. Holton and Y. Elkana, *Albert Einstein: Historical and cultural perspectives*.
Dover Publications, 1997.
- [6] J.-P. Auffray, *Einstein et Poincaré. Sur les traces de la relativité*.
Le Pommier, 2005.
- [7] A. Reventós and C. J. Rodríguez, *Una lectura del Disquisitiones generales circa superficies curvas de C. F. Gauss*, vol. 4 of *Publicacions de la SCM*.
Societat Catalana de Matemàtiques, 2006.

References III

- [8] B. Mahon, *The man who changed everything: The life of James Clerk Maxwell*.
John Wiley & Sons, 2004.
- [9] J. Girbau, *Geometria diferencial i relativitat*, vol. 8 of *Publicacions de la SCM*.
Societat Catalana de Matemàtiques, 2022.
Reproducció íntegra i textual de l'edició original de la UAB (1993).
Edició a cura de Pere Pascual.
- [10] C. W. Misner, K. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*.
Freeman, 1973.

References IV

- [11] K. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*.

WW Norton & Company, 1995.

Commonwealth Fund Book Program. Foreword by Stephen Hawking and an Introduction by Frederick Seitz.

- [12] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, vol. 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 3. Folge*.

Springer, 1987.

References V

- [13] R. Penrose, *The road to reality. A complete guide to the laws of the Universe.*
Alfred A. Knopf, 2005.
XXVIII + 1099 pp.
- [14] “The Legacy Of Albert Einstein: A Collection Of Essays In Celebration Of The Year Of Physics,” 2006.
- [15] C. Labor, S. Xambó-Descamps, and I. Zaplana, *A Geometric Algebra Invitation to Space-Time Physics, Robotics and Molecular Geometry.*
SBMA/Springerbrief, Springer, 2018.
- [16] A. Einstein, *The meaning of relativity (6th edition).*
Chapman and Hall Ltd, 1956.

References VI

- [17] G. Ricci and T. Levi-Civita, “Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications,” *Mathematische Annalen*, vol. 54, no. 1-2, pp. 125–201, 1900.
- [18] G. Ricci, “Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali,” *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)*, vol. 14, no. 1, pp. 1–11, 1886.
- [19] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*.
John Wiley & Sons, 1975.
- [20] R. Sachs and H.-H. Wu, *General relativity for mathematicians*, vol. 48 of *Graduate Texts in Mathematics*.
Springer, 1977.