Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 24, núm. 2, 2009. Pàg. 137–207. DOI: 10.2436/20.2002.01.24

Sir Michael Atiyah. Vida i obra

Sebastià Xambó i Descamps

Beauty in mathematics is the thing that helps you in the search for truth.

Sir Michael Atiyah

Resum L'objecte d'aquest article és donar una perspectiva general de l'impacte científic i humà de Sir Michael Atiyah. La presentació de les principals idees i resultats amb què ha contribuït al coneixement matemàtic es complementa amb informacions sobre les persones que, per una raó o una altra, han tingut o tenen un paper rellevant en la seva trajectòria. El «racó matemàtic» (darrera secció) s'ha inclòs per facilitar, a les persones més motivades, una apreciació més detallada dels continguts matemàtics, i de física matemàtica, de l'obra d'Atiyah. Junt amb les referències bibliogràfiques, ens agradaria que aquest treball fos una invitació a explorar més profundament el seu lúcid pensament.

Paraules clau: teoria K, teoria de l'índex, teories gauge, teories quàntiques de camps.

Classificació MSC2010: 01A65, 19-03, 19L10, 19L20, 35-03, 35J45.

Índex

1 Presentació

El professor Atiyah ha estat un protagonista en la primera línia del desenvolupament matemàtic durant més de cinc dècades. El seu impacte científic i social ha estat, i segueix essent, extraordinari. Això es va percebre d'una manera especialment vívida en les activitats que la Universitat d'Edimburg i la Royal Society d'Edinburg (RSE)[1] van organitzar durant la setmana del 20 al 24 d'abril del 2009 per celebrar el seu vuitantè aniversari (22 d'abril del 2009), de les quals podeu trobar un amplíssim ressò a [1] i [2].

L'impacte d'Atiyah en la comunitat matemàtica local ha estat també considerable, no només per la influència de la seva obra, que sempre ha comptat amb estudiosos entre nosaltres, o pels contactes mantinguts amb membres particulars, sinó també per les relacions institucionals, en ocasió del **3ecm** [3], del qual fou president del Comitè Científic, i de l'atorgament del grau de doctor *honoris causa* (DHC) per la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) el 25 d'abril del 2008.

Dels materials elaborats per a la cerimònia d'investidura com a DHC, la *SCM/Notícies* va publicar la *laudatio* i el discurs de recepció d'Atiyah [4]. A més, en aquella ocasió es van exposar uns pòsters sobre la vida i obra del guardonat. Aquests pòsters, que podeu trobar a [5], també es van exposar a la conferència «Atiyah80» i posteriorment es van incloure a [2]. En aquest article, n'oferim una adaptació, en la qual s'ha donat preeminència a la part textual. D'aquesta manera, i amb algunes ampliacions de diversa volada que ens ha semblat oportú incloure, esperem contribuir a difondre la significació de la trajectòria matemàtica d'una ment prodigiosament creativa, profundament humana i dotada d'una fantàstica capacitat d'inspiració.

Aclariments. En la redacció d'aquest article, s'ha procurat que fos possible fer-ne almenys dues lectures. La més planera va dirigida a les persones que tinguin interès a conèixer detalls de la biografia d'Atiyah, i potser fins i tot a fer-se una idea molt general de la seva manera de pensar i del seu impacte científic i humà. Per a una lectura d'aquesta mena, es poden ignorar els punters al «Racó matemàtic» (la darrera secció), la major part de les referències i fins i tot, moltes notes a peu de pàgina.

Tots aquests materials, però, i especialment el «Racó matemàtic» i les referències bibliogràfiques, s'han inclòs amb la intenció de ser útils a les persones que desitgen aprofundir en les idees considerades en la primera lectura, particularment les de natura matemàtica. En tot cas, aquesta segona lectura és la recomanada a tothom que vulgui conèixer més a fons la teoria de l'índex i les seves aplicacions més importants, qüestió per a la qual ha aparegut molt oportunament l'article [7].

La font principal per a les dades biogràfiques ha estat [8]. En alguns casos, hem usat dades que el professor Atiyah ens ha proporcionat oralment o via

1 Per al significat de les sigles, vegeu al final de l'article.

el correu electrònic. Per a la significació del seu treball, ens han estat indispensables els sis volums dels seus *Collected Works*,[2] i molt especialment les introduccions a cadascun dels volums, així com el primer article de CW6, «A personal history» (p. 9–15).[3]

Un darrer punt a tenir en compte és la convenció que hem adoptat per a les cites intercalades en el text. Aquestes cites es delimiten amb cometes baixes i la seva procedència s'indica entre parèntesis al final. Tanmateix, aquesta indicació s'ha omès en el cas que la cita s'hagi extret dels comentaris al principi dels volums de CW i que el volum concret al qual es refereix quedi clar pel context.

Agraïments. És un plaent deure agrair aquí al professor Sir Michael Atiyah la cordialitat i generositat amb què ha correspost a totes les meves indagacions, amb el benentès que només l'autor és responsable dels errors i inexactituds que encara no han estat detectats. Gràcies també a Anna Xambó, Francesc Fité, Jaume Puigbó i Maria Julià per indicar-me un bon nombre d'errades tipogràfiques.

2 Infantesa i adolescència

Michael Francis Atiyah nasqué a Londres el 22 d'abril del 1929. El seu pare, Edward Selim Atiyah (1903-1964), era libanès, havia estudiat a Oxford i fou un escriptor compromès amb la causa dels àrabs, i la seva mare, Jean, era escocesa. Ambdós progenitors eren de famílies benestants. L'avi matern fou ministre de l'església de Yorkshire i el patern fou metge a Khartum.

El pare d'Atiyah ocupà càrrecs del Servei Civil a Khartum fins al 1945. És per això que l'ensenyament primari el fa a aquesta ciutat, a l'Escola Diocesana (1934-1941). Era una escola petita, amb uns vint alumnes i dos mestres. Les llargues vacances d'estiu les passa amb la família a Anglaterra i al Líban.

L'ensenyament secundari el cursa, en règim d'internat, a Egipte, al Victoria College (1941-1945). És una escola de la ciutat d'Alexandria, a la banda occidental del delta del Nil, però en el període 1941-1944 es va convertir en hospital militar, a causa de la guerra, i l'escola fou traslladada al Caire. Així, doncs, els tres primers cursos els segueix al Caire i el quart, a Alexandria. El règim d'internat només s'interromp durant els períodes de vacances, quan torna a Khartum. A l'estiu, la família continua amb el costum de desplaçar-se a Anglaterra i al Líban.

El Victoria College és una escola cosmopolita, per la qual han passat molts noms prominents, que li proporciona una excel·lent formació bàsica. D'aquells dies recorda que estava cofoi de poder comptar fins a deu en una dotzena

---

2 CW d'ara endavant. Publicats per Clarendon Press, els cinc primers van aparèixer el 1988 i el sisè, el 2004. Els denotarem CW1,...,CW6.

3 Com que els articles de CW estan numerats de l'1 al 173 i el primer de CW6 és el número 125, posarem CW6[125] per designar-lo i ho farem anàlogament per a tots els altres treballs de CW. En canvi, per referir-nos a la p. 9 de CW6, la primera de l'article en qüestió, posarem CW6.9 o CW6[125].9.

d'idiomes diferents, un detall que es correspon amb la seva experiència internacional i multiètnica i que fa pressentir la natura oberta i afable del seu caràcter.

En el seu darrer curs, quan tenia quinze anys, es va concentrar en les matemàtiques i la química, però aviat es decantà del tot per les matemàtiques, ja que va considerar que en aquest cas només són importants els principis i les idees bàsiques, mentre que en el cas de la química trobava avorrit haver de memoritzar tanta informació factual. A partir d'aquest moment, ja no té cap dubte que el seu futur està en les matemàtiques.

El 1945, la família retorna definitivament a Anglaterra i Atiyah completa els estudis preuniversitaris (1945-1947) en el millor centre de secundària per a les matemàtiques, la Manchester Grammar School (MGS). És en aquest període quan pren consciència de ser, primordialment, un geòmetra. En l'arrel d'aquesta convicció, hi ha fonamentalment la fascinació que experimentà per la geometria projectiva clàssica, amb les seves elegants demostracions sintètiques, i pels quaternions. Aquesta certesa primigènia, i la seva infal·lible persistència al llarg dels anys, expliquen per què el gran geòmetra no queda mai eclipsat quan se submergeix en la topologia, l'anàlisi, l'àlgebra, la teoria de nombres o la física matemàtica, per esmentar els principals camps on la seva activitat ha tingut un impacte de primer ordre. De fet, la impressió general és que aquest esperit geomètric, guia de les seves exploracions dels dominis al·ludits, no ha fet més que intensificar-se al llarg dels anys quan s'ha revelat com un punt de vista profundament unificador, sobretot en relació amb la topologia, l'anàlisi i la física matemàtica.

3 Estudiant a Cambridge

La classe de matemàtiques a la MGS estava formada per un reduït nombre de persones, molt seleccionades, que eren formades per participar en els exàmens d'entrada a la Universitat de Cambridge. Llevat d'un estudiant que va anar a Oxford, tots els membres del curs d'Atiyah van obtenir una beca a Cambridge (1947). Aquests estudiants van ser assignats a diferents *colleges*, en funció de les seves habilitats. Per als tres millors, classificats, incloent-hi Atiyah, el destí fou el Trinity College, l'*alma mater* de noms com Isaac Newton (1643-1727), James Clerk Maxwell (1831-1879), Bertrand Russell (1872-1970) i altres científics i personalitats insignes.

Després d'obtenir la beca per al Trinity, Atiyah estigué dos anys fent el servei militar. Aquest lapse ara pot semblar exagerat, però hem de tenir en compte que la guerra, a la qual el Regne Unit contribuí amb un altíssim cost humà i material, feia només dos anys que havia acabat i era, per tant, natural que joves com Atiyah percebessin aquesta obligació com una expressió de solidaritat. Tanmateix, no fou una pèrdua tan greu com es podria pensar, ja que en el temps lliure es delectava llegint llibres de matemàtiques, com ara el *Number theory* de Hardy i Wright, o articles generals sobre teoria de grups.

Així doncs, l'ingrés al Trinity no es produí fins al 1949, als vint anys d'edat, però el talent i la maduresa d'Atiyah quedaren confirmats al final del primer any, quan obtingué la màxima qualificació de tota la Universitat de Cambridge. Philip Hall (1904-1982) fou un dels professors que el van impressionar, ja que trobava que les seves classes eren brillants.

Durant el segon any, i en el marc del curs de geometria que impartí John A. Todd (1908-1994), elaborà un treball sobre les tangents d'una cúbica racional normal, amb mètodes de geometria projectiva pura, que es convertí en la seva primera publicació (▷ **29**).[4] Aquesta publicació, promoguda per Todd, «em va produir una satisfacció i un encoratjament desproporcionats».

Atiyah es va graduar el 1952. Entre els amics de la seva promoció hi havia John Polkinghorne (n. 1930), físic i teòleg; James MacKay (n. 1927), que fou Lord canceller entre el 1987 i el 1997; John Aitchison (n. 1926), un distingit professor d'estadística, i Ian G. Macdonald (n. 1928), ben conegut per ser coautor amb Atiyah del llibre *Introduction to commutative algebra*, que comentarem més endavant.

4 Primeres recerques (1952-1956)

Immediatament després de la graduació, Atiyah va començar a fer recerca, en els camps de la geometria algebraica i de la geometria diferencial, sota la supervisió de Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975), professor d'astronomia i geometria a Cambridge i conegut per la seva teoria de les *integrals harmòniques*, o *formes harmòniques*, com se'n diuen actualment (▷ **5**).

Sobre l'elecció de Hodge com a director de recerca, Atiyah ens diu que «dubtava entre els professors Todd [que havia estat el seu tutor els dos anys anteriors] i Hodge». Però es decidí per Hodge perquè considerà que «representava un enfocament més modern basat en la geometria diferencial».

El progrés d'Atiyah en aquesta nova etapa fou vertiginós, ja que en poc més de dos anys aconseguí elaborar i llegir la tesi doctoral (1955). Hi va saber combinar els seus coneixements de geometria projectiva clàssica amb les teories de feixos i de classes característiques que estaven desenvolupant Jean-Pierre Serre i Friedrich Hirzebruch, respectivament. Atiyah, que era «un àvid lector dels *Comptes Rendus*, per seguir els desenvolupaments de la teoria de feixos», conegué Serre i Hirzebruch molt als inicis de la seva recerca i és clar que ambdós tingueren una influència decisiva en el seu desenvolupament. Serre, nascut el 1926, obtingué la Medalla Fields el 1954 (amb vint-i-set anys, el guardonat més jove fins avui), «per haver obtingut resultats majors sobre els grups d'homotopia de les esferes, especialment pel seu ús del mètode de les successions espectrals, i per reformular i estendre en termes de la teoria de feixos alguns dels resultats de la teoria de variables complexes» (citació

4 El símbol ▷ **n** remet a l'article número **n** del «Racó matemàtic» (secció 12, p. 169). Al principi de la secció se n'explica l'estructura.

oficial de la International Mathematical Union [IMU]). Pel que fa a Hirzebruch (n. 1927), el seu resultat fonamental en aquell moment, formulat i demostrat amb els nous mètodes, era el teorema de Hirzebruch–Riemann–Roch (HRR). Un any després, aquests mètodes i resultats van aparèixer exposats a [10], una obra mestra fonamental (la versió anglesa, [11], aparegué deu anys després).

Diguem aquí que la tesi d'Atiyah té dues parts, una relativa a fibrats vectorials analítics sobre corbes algebraiques i una altra que és un treball conjunt amb Hodge sobre integrals de segona espècie (▷ **30**). L'interès pels fibrats vectorials analítics, treballats per André Weil (1906-1998) en el seu seminari de Chicago, començà amb una visita de Newton Hawley a la Universitat de Cambridge, i Atiyah els aplicà de seguida a l'estudi de les superfícies reglades. En aquesta iniciativa, tingué també la inspiració de la carta de Serre a Weil en què donava una demostració del teorema de Riemann-Roch (RR) per a corbes mitjançant la teoria de feixos, i ben aviat aquests punts de vista van ser adoptats per molts altres investigadors. Per aquest treball, va ser guardonat amb l'Smith's Prize de la Universitat de Cambridge. Pel que fa al treball conjunt amb Hodge, «un tractament nou d'un tema vell», Atiyah explica que Hodge li va «esquematitzar com els teoremes de Lefschetz sobre integrals de segona espècie s'haurien de poder formular en el marc de la teoria de feixos. Vaig desenvolupar aquesta idea amb molt de detall i d'això en va resultar el nostre article conjunt».

Poc abans d'obtenir el doctorat per Cambridge, se li va atorgar una de les prestigioses *fellowships* de recerca al mateix Trinity, de la qual gaudí quatre cursos (1954-1958). També obtingué una beca de recerca de la Commonwealth Fund per visitar l'Institute for Advanced Study (IAS) de Princeton el curs 1955-1956.

Amb la vida professional ben encarrilada, Michael Atiyah es va casar amb la seva promesa, Lily Brown, el 30 de juliol del 1955, just abans d'anar a Princeton. Lily Brown inicià els seus estudis a la Universitat d'Edimburg el 1948 i després es traslladà a Cambridge. Es van conèixer amb Atiyah a la societat matemàtica dels estudiants. Lily va fer el doctorat al Girton College de Cambridge (1952-1954), sota la supervisió de Mary Cartwright, que era la directora del centre. Durant el curs 1954-1955, ocupà una plaça de lectora al Bedford College, un *college* femení associat a la Universitat de Londres, però hi renuncià quan decidí traslladar-se amb el seu marit a Princeton. Michael i Lilly han tingut tres fills, John, David i Robin, i el 2005 van celebrar les noces d'or amb la presència dels dos néts, Ned i Jamie (bessons), i de la néta, Ellen.

A Princeton, amb vint-i-sis anys, Atiyah es va trobar amb molts dels que li influirien, o amb els quals col·laboraria estretament en el futur. A més de Hirzebruch i Serre, hi havia Isadore M. Singer (n. 1924), Raoul Bott (1923-2005), Kunihiko Kodaira (1915-1997)[5] i Donald C. Spencer (1912-2001), per esmentar-los per ordre creixent d'edat. Kodaira i Spencer van ser pioners llegendaris en

5 Fou guardonat amb la Medalla Fields (1954) «pels seus resultats majors en la teoria de les integrals harmòniques, amb nombroses aplicacions a les varietats kählerianes i, més concretament, a les varietats algebraiques, per a les quals provà, mitjançant cohomologia de feixos, que són varietats de Hodge» (citació oficial de la IMU).

l'aplicació de mètodes de la teoria de feixos a la geometria (són els fundadors, per exemple, de la teoria de deformacions de les varietats complexes, base de la teoria dels espais de moduli) i havien conegut el nom d'Atiyah quan Hodge impartí una conferència a Princeton sobre les integrals de segona espècie. No podem deixar de dir aquí que, en els anys a venir, Hirzebruch, Bott i Singer seran els tres col·laboradors principals d'Atiyah, però els detalls d'aquestes col·laboracions els considerarem més endavant.

D'aquesta estada a l'IAS, que es prolongà fins al desembre del 1956,[6] Atiyah en diu que fou «enormement estimulant». En particular, va assistir a un seminari sobre fibrats vectorials impartit per Serre que li va inspirar tres treballs. Un fou sobre categories exactes, l'altre sobre connexions analítiques de fibrats, i el tercer sobre fibrats vectorials sobre corbes el·líptiques (▷ **31**). Quaranta anys després, recorda que «aquell any a Princeton, en companyia de Serre, Bott i Singer, assistint a les classes de Kodaira i encoratjats per l'entusiasme de Spencer, ara em sembla una època daurada» CW6[152].569.

5 Cambridge (1957-1961)

De retorn de Princeton, als vint-i-set anys, Atiyah obté una plaça de lector assistent a la Universitat de Cambridge, que ocupa durant un any, i després una plaça de lector durant quatre anys, fins al 1961. En paral·lel, gaudeix de la *fellowship* de recerca al Trinity fins al 1958, com ja hem esmentat, i del 1958 al 1961 és nomenat *tutorial fellow* del Pembroke College. També és important dir que passà la tardor del 1959 a l'IAS, on coincidí amb Hirzebruch.

Molt al principi d'aquest període, John Milnor (n. 1931)[7] visità Oxford, i Atiyah va aprofitar, per discutir amb ell qüestions relatives a les superfícies de Kummer. D'aquí li va sorgir la idea de voler «entendre millor l'efecte dels punts dobles en la topologia de les superfícies algebraiques». Els resultats d'aquesta investigació van ser recollits en un article (▷ **32**) que fou «el punt de partida del bell treball de Brieskorn sobre punts dobles racionals».[8]

També va publicar un article sobre exemples (i contraexemples) de varietats complexes (▷ **33**). A més del contingut, aquest article té interès històric perquè fou la conferència que impartí en el primer *Arbeitstagung* (1957), la qual cosa «inicià la meva llarga sèrie de visites a Bonn».

Detinguem-nos un moment per considerar aquests *Arbeitstagungen*, unes conferències internacionals que Hirzebruch organitzà, amb unes poques excepcions, cada any a l'estiu, des del 1957 fins al 1991, primer a la Universitat de Bonn, després amb el suport del Sonderforschungbereich Theoretische

6 La beca de la Commonwealth Fund li fou prorrogada per un curs més, però Atiyah decidí tornar a Cambridge a finals del 1956.

7 Fou guardonat amb la Medalla Fields el 1962 per «haver provat que una esfera de dimensió 7 admet diverses estructures diferenciables, la qual cosa inicià el camp de la topologia diferencial» (citació oficial de la IMU).

8 Egbert Brieskorn (n. 1937) es doctorà l'any 1963 a la Universitat de Bonn amb la tesi *Zur differentialtopologischen und analytischen Klassifizierung gewisser algebraischer Mannigfaltigkeiten*, dirigida per Hirzebruch.

Mathematik (a partir del 1969) i finalment, a partir del 1980, al Max Planck Institut für Mathematik (MPIM).[9] L'objectiu era contribuir a disseminar les idees més actuals de la recerca matemàtica i, almenys al principi, de reintegrar la matemàtica alemanya en la matemàtica europea. Primer van ser reunions força restringides, però de mica en mica el nombre d'assistents anà creixent, i depassava de llarg el centenar a final dels anys setanta. El programa de cada any era confeccionat sobre la marxa, cosa que contribuïa a atreure els joves talents. El ritual era que Hirzebruch demanava propostes als participants, les quals eren copiades a la pissarra conforme s'anaven produint. Al final se n'havia de fer una tria. Les manifestacions de suport dels assistents a una proposta eren processades amb gran habilitat per Hirzebruch, adduint raons a favor si li agradava o més o menys evasives en cas contrari. Naturalment, una proposta era acceptada si era aclamada per un sector de pes del públic. Decidit el programa, es procedia a escoltar la primera conferència. Mentrestant, l'eficient personal administratiu preparava còpies del programa, que era repartit en la pausa que seguia la primera sessió. Doncs bé, en les vint-i-quatre ocasions en què assistí a l'*Arbeitstagung*, Atiyah impartí més de trenta conferències, de les quals setze van ser les primeres del programa. Aquesta constància, junt amb la seva facilitat per posar en circulació idees inspiradores, mostren que Atiyah fou un contribuïdor principal als objectius de l'*Arbeitstagung*, cosa que la Universitat de Bonn li reconegué el 1967 distingint-lo, per primera vegada, com a DHC. El resultat final és que els *Arbeitstagungen* han tingut un paper molt important en la creació d'un clima de recerca internacional a Europa, i a Alemanya en particular, i que Atiyah n'ha estat un actor molt principal.

Teoria *K* (I)

Alexander Grothendieck (n. 1928) havia introduït, l'any 1957, el grup $K(X)$, on X és una varietat algebraica no singular,[10] com un ingredient per a la seva generalització, coneguda com a teorema de Grothendieck–Riemann–Roch (GRR), del teorema de HRR (en la secció següent donem més detalls d'aquests resultats). Atiyah es familiaritzà amb les idees de Grothendieck als *Arbeitstagungen* de Bonn. D'altra banda, Ioan M. James (n. 1928), col·lega d'Atiyah a Cambridge, li explicà certs problemes topològics que tenia en la seva investigació de la relació entre les varietats d'Stiefel i els espais projectius truncats[11] i l'assabentà sobre els teoremes de periodicitat de Bott.[12] La teoria K topològica neix quan Atiyah s'adona de la connexió entre aquests tres ingredients: «Aviat em vaig adonar que les fórmules de Grothendieck portaven a resultats considerable-

9 A partir del 1991, any en què l'MPIM canvià l'estructura directiva, s'ha organitzat un *Arbeitstagung* cada dos anys, havent estat el del 2009 el novè d'aquesta segona sèrie.

10 Les classes d'isomorfisme dels feixos coherents sobre X formen un monoide amb la suma directa i $K(X)$ es pot definir com el grup associat a aquest monoide. La K prové de *Klassen* ('classes' en alemany).

11 Són els espais topològics que s'obtenen quan es contreu una varietat lineal d'un espai projectiu a un punt. En anglès es coneixen com a *stunted projective spaces.*

12 R. Bott «The stable homotopy of the classical groups», *Ann. Math.*, 70 (1959), 313–337.

ment forts per als problemes de James» i que «els teoremes de periodicitat de Bott encaixaven bé amb el formalisme de Grothendieck, cosa que permetia obtenir conclusions topològiques genuïnes». Aquesta constatació fou la que el va convèncer que «una versió topològica de la teoria K de Grothendieck, basada en el teorema de periodicitat de Bott, seria una eina poderosa en topologia algebraica».

Aviat va poder disposar d'una refinada pedra de toc de les seves idees sobre el $K(X)$, que es defineix, per a un espai topològic X, d'una manera similar al grup de Grothendieck, però usant, en lloc de feixos coherents, fibrats vectorials continus sobre l'espai topològic X, amb la suma directa com a suma. Quan Atiyah va aplicar aquestes idees al problema de James, en derivà un «problema purament algebraic»,[13] el qual va resultar «intrigantment difícil». De fet, Atiyah va explicar el problema a diversos col·legues i «Todd en trobà una solució completa». D'això en va resultar l'únic article que Atiyah va escriure conjuntament amb Todd (▷ **34**) i que és considerat com la fe de baptisme de la teoria K topològica.

L'èxit en aquestes qüestions reforça la determinació d'Atiyah de desenvolupar les seves idees sobre la teoria K. S'origina així una intensa col·laboració amb Hirzebruch. Un dels objectius d'Atiyah és obtenir «teoremes d'integritat del tipus descobert per Hirzebruch»[14] i en els quals intervenen «càlculs cohomològics amb classes característiques i espais homogenis» ([10, 11]), de manera que era molt natural que Hirzebruch en fos partícep. Sobre aquesta col·laboració, Atiyah n'ha dit que hi va aprendre molt, incloent-hi «com escriure articles i impartir conferències».

Els primers resultats d'aquesta col·laboració van ser certs anàlegs diferenciables del teorema de GRR i diverses aplicacions, entre els quals destaquen alguns teoremes sobre la impossibilitat de submergir les varietats diferenciables en espais euclidians (▷ **35**).

La tardor del 1959, Atiyah i Hirzebruch es van trobar a l'IAS i es van dedicar a seguir desenvolupant la teoria K. Els resultats principals els van presentar en una conferència celebrada a Tucson. El corresponent article és la primera exposició sistemàtica de la teoria (▷ **36**).

Altres treballs

René Thom (1923-2002) va introduir la teoria del cobordisme en la memòria «Quelques propriétés globales des variétés différentiables» (*Commentarii Mathematici Helvetici*, 28, 1954, 17-86).[15] El 1960, C. T. C. Wall (n. 1936) defensa una tesi sobre cobordisme orientat, de la qual Atiyah dóna tot seguit una inter-

13 Donat un enter positiu r, determinar el mínim valor de n tal que els r primers coeficients de la sèrie $\ln((1+t)/t)^n$ siguin nombres enters.

14 Aquestes qüestions es consideren en més detall en la secció següent.

15 Thom fou guardonat amb la Medalla Fields el 1958, bàsicament per aquest treball, ja que la citació oficial de la IMU diu: «El 1954 inventà i desenvolupà la teoria del cobordisme en topologia algebraica. Aquesta classificació de les varietats usa la teoria de l'homotopia d'una manera fonamental i esdevingué un exemple principal d'una teoria de cohomologia generalitzada».

pretació en termes d'una teoria de cohomologia generalitzada. Al final d'aquest primer període a Cambridge, també publica una memòria sobre caràcters i cohomologia dels grups finits i un article sobre complexos de Thom (▷ **37**).

Diguem, finalment, que en aquest període a Cambridge dirigeix la tesi doctoral de Rolph Schwarzenberger (1960), que hem trobat com a traductor a l'anglès del llibre de Hirzebruch, i la de Ian Porteous (1961).

6 Oxford (1961-1969)

El període de Cambridge s'acaba amb el trasllat a Oxford el 1961, amb trenta-dos anys, primer com a *reader* adscrit al St. Catherine's College i després, en el període 1963-1969, com a *Savilian professor* de geometria adscrit al New College. És una càtedra de les dues fundades el 1619 (l'altra era d'Astronomia) per Sir Henry Savile (1549-1622).[16] La tardor del 1962 i la del 1964 les passa a Harvard, on Raoul Bott és professor. El curs 1967-1968 el passa a l'IAS. Durant aquesta estada, li ofereixen una plaça permanent com a professor de matemàtiques, que acceptarà un any més tard.

En aquests vuit anys, segueix treballant intensament en la teoria K, sol o en col·laboració, i inicia recerques en la teoria de l'índex d'operadors diferencials el·líptics, sovint en col·laboració amb Bott o amb Singer, que és professor al Massachussetts Institute of Technology (MIT). Aquesta col·laboració no només es veu afavorida per les visites d'Atiyah a Harvard o a l'IAS, sinó també per les visites de Bott i Singer a Oxford.

Durant aquest període escriu, en col·laboració amb Ian G. Macdonald, el llibre *Introduction to commutative algebra* (Addison-Wesley, 1969) per a les classes que impartien a Oxford als estudiants de matemàtiques de tercer curs, amb, com diu en la introducció, «el modest objectiu de ser una ràpida introducció al tema». Com dèiem en la *laudatio* [4]:

> Per a molts matemàtics és un llibre modèlic. Presenta a la perfecció, en menys de 140 pàgines, les idees essencials del tema, incloent-hi les connexions amb la geometria algebraica i la teoria de nombres. Els problemes al final de cada capítol, molt ben escollits, formen una part integral del disseny del llibre. La seva solució sistemàtica és essencial per a una comprensió exhaustiva de les idees i no voldria deixar de dir que aquesta tasca s'ha considerat, des de la publicació del llibre, com una mena de ritu iniciàtic per a l'estudiantat de matemàtiques. Ha estat, doncs, i continua essent, una referència obligada per als

16 Les obligacions especificades per Savile eren que el catedràtic havia d'«explicar els *Elements* d'Euclides, les *Còniques* d'Apol·loni i l'obra completa d'Arquimedes. A més, havia de mostrar aplicacions pràctiques de les matemàtiques; ensenyar aritmètica, mecànica i teoria de la música, i les seves notes per al curs havien de quedar dipositades a la biblioteca de la universitat». Havent canviat tant les coses des del segle XVII fins al segle XX, les obligacions d'Atiyah, el dissetè ocupant, eren naturalment molt diferents de les assignades a Henry Briggs (1561-1630), que fou el primer (del 1619 al 1631), o a Edmond Halley (1656-1742), descobridor del cometa que porta el seu nom, que fou el cinquè. Oficialment és una Càtedra de Geometria, però, actualment, amb una interpretació totalment laxa. Els predecessors immediats d'Atiyah van ser Edward C. Titchmarsh (1899-1963), el setzè, i Godfrey H. Hardy (1877-1947), el quinzè.

estudiants de matemàtiques i per als professors d'àlgebra. La versió castellana, a càrrec de Griselda Pascual (1926-2001), fou publicada el 1973 per l'editorial Reverté i és la més usada entre els nostres estudiants.

Teoria K (II)

L'any 1962, Atiyah publica cinc articles sobre teoria K, dos dels quals són en col·laboració amb Hirzebruch. Frank Adams (1930-1989) acabava de resoldre, usant la teoria K, el problema dels camps vectorials en esferes, és a dir, el problema de determinar el nombre màxim de camps vectorials tangents a l'esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ linealment independents en cada punt.[17] «Estimulat per aquests resultats», Atiyah analitza com aplicar idees similars «al problema de submergir espais projectius reals $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^N$», és a dir, d'obtenir fites inferiors de N en termes de n. També estableix una fórmula de Künneth per a la teoria K ($\triangleright$ **38**).

El nucli dels dos articles amb Hirzebruch és el teorema de GRR per a immersions analítiques ($\triangleright$ **39**).

La significació dels treballs d'Atiyah sobre teoria K publicats fins al moment és reconeguda a l'Internacional Congress of Mahtematicians (ICM) celebrat a Estocolm el 1962, on imparteix una conferència invitada a la secció de topologia i geometria diferencial.

En el breu article que acaba publicant en els *Proceedings* d'aquell congrés ($\triangleright$ **40**), resumeix primer les aplicacions més destacades de la teoria K i al final deixa ja albirar els nous horitzons matemàtics que contempla, exposant «la interpretació en teoria K del símbol d'un operador el·líptic». És un pas de la màxima importància en la carrera d'Atiyah, ja que, a partir d'ara, «l'índex dels operadors el·líptics esdevé el tema dominant», però amb interacció «de doble via» amb la teoria K. Això fa que entrem en una fase en la qual els articles són o sobre teoria K o sobre teoria de l'índex, i, en ocasions, sobre ambdues ensems. En aquest cas, la categorització que en fa Atiyah és «segons la component principal, encara que això és força arbitrari en alguns casos».

Prosseguirem ara amb la teoria K, fins a l'any 1966, i deixem per a l'apartat següent la consideració dels treballs sobre teoria de l'índex i l'inici de la col·laboració amb Singer.

La tardor del 1964, només nou anys després del seu doctorat a Cambridge, Atiyah va impartir un cicle de conferències sobre teoria K a Harvard. Les notes d'aquell curs es van publicar tres anys més tard en un llibre, el llegendari *K-theory* ($\triangleright$ **41**). Encara és una excel·lent introducció al tema, de la qual cal destacar l'equilibri entre la concisió, d'una banda, i la precisió i la completesa, de l'altra. Com hem vist, ha publicat un seguit d'articles que mostren l'amplitud i profunditat de la seva mirada. Entre aquests articles, destaquen els

17 Si 2^k és la màxima potència de 2 que divideix n i $k = 4r + s$, on r i s són el quocient i el residu de la divisió entera de k entre 4, llavors el nombre en qüestió és $2^s + 8r - 1$. En particular, és 0 quan n és senar, la qual cosa ja era coneguda (és un corol·lari del teorema de Poincaré-Hopf), i és $n - 1$ (que és el cas en què S^{n-1} és paral·lelitzable) només per a $n = 2, 4, 8$.

firmats conjuntament amb Hirzebruch, i sobretot els que fan referència a les generalitzacions diferenciable (▷ **35**) i analítica (▷ **39**). «La intenció era que la col·laboració amb Hirzebruch sobre la teoria K culminés en un llibre sobre el tema. Vam fer moltes reunions de planificació, però, malauradament, mai no va semblar que tinguéssim el temps que calia». Per tant, «aquest llibre ha hagut de fer de substitut del llibre conjunt que volíem haver escrit». De fet, la fructífera col·laboració amb Hirzebruch ha arribat pràcticament a la fi, ja que només publicaran un altre article conjunt (CW3[74], 1970).

Cal esmentar aquí que a l'estiu del 1963 tingué lloc un Summer Topology Institute, organitzat per l'American Mathematical Society (AMS) a Seattle, en el qual Hirzebruch va fer una introducció a la teoria K, dues conferències sota el títol «Lectures on K-theory», de les quals es van distribuir notes preparades per Paul Baum (n. 1937). Aquestes breus notes (20 pàgines) estan recollides a [9-b1], en l'article número 20, del qual Adams diu (p. 196), molt justament, que «pot ser recomanat per la seva claredat». D'altra banda, al principi d'aquest article, Hirzebruch ens assabenta que també es van distribuir notes d'Atiyah i de Bott. Aquesta notícia té interès perquè Bott va fer, a la tardor del mateix any, un seminari a Harvard en el qual va distribuir notes que sis anys més tard van ser la base de [12]. Així doncs, el llibre d'Atiyah assenyala que envers el 1964 la teoria K s'ha establert ja com una tècnica fonamental, a la cruïlla entre la geometria i la topologia algebraica. Per a una corroboració «externa» d'aquesta apreciació, citem el lúcid article «New ideas in algebraic topology (K-theory and its applications)», publicat el 1965 per Serguei Petrovitx Novikov (n. 1938) en els *Russian Math. Surveys* i inclòs com a cloenda a [9-b1] (article núm. 24).

L'any 1964 publica també el primer article de la dotzena en què, en els següents vint anys, Bott apareix com a coautor. És un remarcable article (▷ **42**) sobre «àlgebres de Clifford i la seva relació amb la teoria K real». Al principi, Arnold Shapiro (1922-1963) contribuí a la recerca per a aquest treball, però la seva mort a destemps va comportar que l'haguessin d'acabar Atiyah i Bott, els quals hi van incloure «un tractament minuciós de l'isomorfisme de Thom en teoria K real basat en espinors i àlgebres de Clifford».

Atiyah publicà un únic treball en col·laboració amb Adams. Aquest havia demostrat, en un llarg article, que no existeixen aplicacions contínues $f : S^{2n-1} \to S^n$ amb invariant de Hopf igual a 1, llevat per a $n = 1, 2, 4, 8$ (▷ **43**). Atiyah ens diu que el va complaure descobrir una demostració d'aquest resultat que «es podia escriure en una postal», fent servir «les operacions ψ^k que Adams havia introduït en el seu treball sobre el problema dels camps vectorials en esferes».[18] Atiyah va escriure a Adams, «explicant-li la "postal"», i d'aquí en va resultar l'article conjunt, ja que Adams «immediatament veié com generalitzar-la i obtenir resultats nous per al cas de nombres primers senars» (▷ **44**).

18 De fet, aquestes operacions havien estat introduïdes per Atiyah i Hirzebruch a CW1[25]: «En aquest article també vam introduir (mitjançant els seus caràcters) les operacions ψ^k que Adams usaria subseqüentment d'una manera brillant».

Acabem aquest apartat observant que encara publicà, fins al 1966, tres articles més de teoria K (▷ **45**).

Teoria de l'índex (I)

El terreny on va néixer la teoria de l'índex no fou altre que el preparat per Atiyah i Hirzebruch en les seves recerques sobre anàlegs diferenciables del teorema de GRR, les quals van suposar l'extraordinari desenvolupament de la teoria K de què hem parlat anteriorment. Havien demostrat, per exemple, que el gènere de Todd (▷ **11**) d'una varietat quasi complexa és un nombre enter (▷ **13**) i que l'$\hat{A}$-gènere (▷ **14**) és un nombre enter per a varietats espinorials (▷ **16**). Un altre antecedent important és la igualtat, deguda a Hirzebruch, entre l'L-gènere (▷ **17**) d'una varietat diferenciable de dimensió $4m$ i la seva signatura (▷ **18**). Tant en el cas del gènere de Todd com en el de la signatura, el que s'aconsegueix és igualar un invariant topològic, que, en principi, és un nombre racional, a un invariant analític, que, per natura, és un nombre enter. Una interpretació similar no era coneguda en el cas de l'$\hat{A}$-gènere i, com assenyalava Hirzebruch, era natural intentar trobar-la.

Aquesta era la situació quan Singer decidí passar una part del seu any sabàtic a Oxford, estada que significà l'inici d'una «llarga col·laboració [més de vint anys] sobre la teoria de l'índex d'operadors diferencials». Atiyah estava treballant per trobar una interpretació de l'$\hat{A}$-gènere en la línia suggerida per Hirzebruch i ja s'havia convençut que calia usar representacions espinorials (▷ **20**). Amb l'ajuda de Singer, aviat van (re)descobrir l'operador de Dirac (▷ **21**) per a varietats espinorials riemannianes, el qual opera sobre camps espinorials (▷ **20**), i van veure clar que l'$\hat{A}$-gènere havia de ser «la diferència de les dimensions dels camps espinorials harmònics positius i negatius» (aquesta diferència és precisament l'índex de l'operador de Dirac). Estaven preparats, doncs, per fer un pas anàleg al que va representar la teoria de les formes harmòniques de Hodge respecte de les equacions de Maxwell (▷ **5**).

Estant així les coses, la fortuna va voler que Stephen Smale (n. 1930) passés per Oxford després de visitar Moscou i que els suggerís, veient el que intentaven fer, mirar un article d'Israïl M. Gel'fand (1913-2009)[19] sobre «el problema general de calcular l'índex dels operadors el·líptics» (▷ **22**). Gel'fand havia conjecturat, després d'observar que no canviava per petites deformacions de les equacions, que l'índex s'hauria de poder expressar com un invariant topològic, a l'estil del teorema de HRR.

Reavaluada la situació amb aquestes informacions noves, van constatar que estaven en una posició molt avantatjosa respecte dels analistes que intentaven resoldre el problema de l'índex. D'una banda, disposaven de l'operador de Dirac, pel qual ja coneixien la resposta (el seu índex havia de ser igual a l'$\hat{A}$-gènere de Hirzebruch) i que «inclou totes les complicacions topològiques globals». D'altra banda, la teoria K, que és des d'on havien arribat al problema, resultà

19 I. M. Gel'fand «On elliptic equations», *Russian Math. Surveys*, 15 (3) (1960), 113.

l'eina apropiada. Finalment, «l'operador de Dirac era en certa manera el cas més general, ja que tots els altres en són una deformació».

La demostració del teorema de l'índex general la van completar durant la visita d'Atiyah a Harvard la tardor del 1962, seguint una línia inspirada en la demostració de Hirzebruch del teorema de la signatura mitjançant cobordisme, i en van publicar una versió resumida el 1963 (▷ **46**). Atiyah ens diu que en aquell moment s'adonava «de la significació del teorema de l'índex i que era un punt important del meu treball, però m'hauria estat difícil predir que el tema em continuaria ocupant, de diverses maneres, durant els vint anys següents». Ens diu, a més, que «m'hauria sorprès molt si m'haguessin dit que aquest treball seria important, en el seu moment, per a la física teòrica». Els detalls van ser presentats en un seminari que Atiyah organitzà amb Bott i Singer la mateixa tardor del 1962. Després, Richard Palais (n. 1931), a suggeriment d'Armand Borel (1923-2003), va organitzar un seminari a l'IAS durant el curs 1963-1964, del qual va resultar una de les primeres exposicions *in extenso* [14].

Mentrestant, Atiyah prossegueix la col·laboració amb Bott iniciada en l'article CW2[39] (▷ **42**). Un dels primers resultats que aconsegueixen és l'extensió del teorema de l'índex a varietats amb vora. El van presentar en el Col·loqui sobre anàlisi diferencial celebrat a Bombai el 1964 (el corresponent article coincideix amb CW3[57]). És el moment d'esmentar que a Atiyah i Bott els «resultà indispensable comprendre a fons el teorema de periodicitat de Bott» i que això els dugué a la demostració elemental d'aquest teorema recollida a CW2[40]. En aquest grup d'articles (▷ **47**), també cal esmentar que Palais va aconseguir incloure a [14], com un apèndix, un report d'Atiyah sobre el teorema de l'índex per a varietats amb vora.

Una altra important línia de treball iniciada amb Bott el 1964 fa referència a un refinament, conjecturat per Goro Shimura (n. 1930), del teorema dels punts fixos de Lefschetz en el cas d'aplicacions holomorfes. Un dels aspectes més innovadors del treball és que estableixen un teorema de punts fixos per a aplicacions que conserven un operador el·líptic, del qual després dedueixen diversos casos particulars, incloent-hi el conjecturat per Shimura (▷ **48**).

Medalla Fields

Arribem així a l'ICM del 1966, celebrat a Moscou, en el qual Atiyah és guardonat merescudament amb la Medalla Fields, amb la citació següent: «Michael Francis Atiyah (Universitat d'Oxford): ha treballat amb Hirzebruch en teoria K; ha demostrat, conjuntament amb Singer, el teorema de l'índex per a operadors el·líptics sobre varietats complexes; ha treballat conjuntament amb Bott per demostrar un teorema del punt fix relacionat amb la "fórmula de Lefschetz"». De fet, com ja hem vist, el teorema de l'índex d'Atiyah–Singer està formulat per a varietats diferenciables orientades, que inclouen les varietats complexes. És el teorema de HRR, inicialment vàlid per a varietats algebraiques, el que queda generalitzat, com a corol·lari, al cas de les varietats complexes.

A Moscou, Atiyah va impartir-hi dues conferències: una a la seu del Courant Institute, que acabava de ser inaugurada, i l'altra, la conferència plenària a l'ICM; ambdues foren «recapitulacions del teorema de l'índex i la seva relació amb la topologia dels grups lineals, és a dir, amb la teoria K» (▷ **49**).

ICM	*Ciutat*	*Medalla Fields*
1954	Amsterdam	Serre i Kodaira
1958	Edimburg	Thom
1962	Estocolm	Milnor
1966	Moscou	Atiyah, Grothendieck i Smale (▷ **50**)
1970	Niça	Hironaka i Novikov
1974	Vancouver	Mumford
1978	Hèlsinki	Quillen i Margulis
1982	Varsòvia	Connes, Thurston i Yau
1986	Berkeley	Donaldson
1990	Kioto	Jones i Witten

En aquesta taula es poden veure els guardonats amb la Medalla Fields més directament relacionats amb Atiyah des de l'ICM d'Amsterdam, el 1954, fins al de Kyoto, el 1990. Atiyah impartí una conferència plenària a l'ICM de Moscou i sengles conferències invitades als congressos d'Estocolm, Niça i d'Hèlsinki.

Teoria de l'índex (II) i teoria K (III)

Atiyah té trenta-set anys. En fa onze de la tesi i quatre que és a Oxford. Hi estarà tres anys més abans de prendre possessió d'una plaça de professor de matemàtiques a l'IAS. Durant aquests anys, la seva activitat de recerca, enfocada encara a la teoria K i a la teoria de l'índex, prossegueix amb molta intensitat, sovint amb la col·laboració de vells coneguts, com Singer i Bott, o d'investigadors novells als quals ha dirigit la tesi doctoral, com ara David O. Tall (n. 1941)[20] i Graeme B. Segal (n. 1942).[21]

Pel que fa a la teoria de l'índex, cal destacar dos grups de treballs. El primer està format per dos articles amb Bott sobre la fórmula de Lefschetz per a complexos el·líptics (▷ **51**). El segon grup està format per quatre articles extraordinaris, dels quals dos són amb Singer i un amb Segal (▷ **52**). El primer dels dos articles amb Singer presenta una nova demostració del teorema de l'índex que obre el camí a diverses generalitzacions. Aquestes generalitzacions són l'objecte dels altres tres treballs i de dos treballs més amb Singer que comentarem en la secció següent.

Pel que fa a la teoria K, es poden destacar dos temes principals. Un és la relació entre la teoria K i la teoria de l'índex, de la qual dóna un tractament

20 Es va doctorar a la Universitat d'Oxford el 1966 amb la tesi *The topology of group representations*, dirigida per Atiyah, i a la Universitat de Warwick el 1986 amb la tesi *Building and testing a cognitive approach to calculus.*

21 Doctorat el 1967 a la Universitat d'Oxford amb la tesi *Equivariant K-Theory*, dirigida per Atiyah.

complet en dos articles (▷ **53**). L'altre tema és la relació entre la teoria K i la teoria de representacions, de la qual va sorgir la teoria K *equivariant* (▷ **54**).

Equacions diferencials hiperbòliques

El febrer del 1967, Atiyah fa una conferència al Seminari Bourbaki. El text, CW4[77] és un report sobre els progressos fets conjuntament amb Bott i Lars Gårding (n. 1919) per entendre, actualitzar i generalitzar un treball d'Ivan G. Petrovsky (1901-1973).[22] Els detalls van aparèixer posteriorment (1970 i 1973) en dos llargs articles. Tot i que la seva redacció ocupà part de l'estada a l'IAS (1969-1972), sobretot en el cas del segon article, hem preferit deixar-ne constància aquí (▷ **55**). Atesa la natura interdisciplinària dels treballs, els autors van procurar de fer-los intel·ligibles a un ampli ventall de matemàtics. Com a exemple, pot servir el primer capítol del segon article, que és una excel·lent introducció a la cohomologia de les varietats algebraiques. L'accessibilitat per a diverses especialitats s'aconsegueix presentant diverses teories de cohomologia i com s'interrelacionen.

7 Professor a l'IAS (1969-1972)

Després del memorable curs (1955-1956) passat a Princeton, del qual ja hem parlat i que representà el reconeixement del seu talent al màxim nivell, Atiyah hi tornà moltes vegades, per un total d'uns set anys, incloent-hi el període més llarg (1969-1972), en què fou professor de l'IAS [15].

Atiyah segueix avançant en les seves recerques, enfocades a la teoria K, a la teoria de l'índex i a les seves interrelacions, les quals tenen un paper principal en la intensa activitat matemàtica a l'IAS. Segons Johan L. Dupont (n. 1944), «molta d'aquesta activitat era, en gran mesura, a causa de la presència d'Atiyah. No només impartia sèries de conferències i organitzava seminaris, sinó que atreia molts joves matemàtics, amb els quals sostenia animades discussions. Normalment, en el te de la tarda, un nombrós grup de gent es reunia al seu voltant. Discutia gairebé qualsevol tema de matemàtiques, i sempre era molt ràpid i encertat» (comunicació privada, 2 de novembre del 2009).

Teoria K (IV)

Una de les qüestions que li interessen és la de l'existència de r camps vectorials linealment independents en cada punt d'una varietat orientable. El cas $r = 1$ era conegut: existeix un camp no nul arreu si i només si la característica d'Euler–Poincaré de la varietat és 0. Aquest és un teorema de Heinz Hopf (1894-1971) que redueix el problema de l'existència de camps vectorials no nuls arreu a una propietat purament topològica. Per al cas $r > 1$, Atiyah, en col·laboració amb Johan L. Dupont (el seu ajudant a l'IAS durant els dos primers cursos), va

22 I. G. Petrovsky «On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations», *Mat. Sbornik*, 17 (1945), 289–368.

establir-hi condicions necessàries, especialment en el cas en què la dimensió és un múltiple de 4 (▷ **56**). Aquests resultats van ser presentats pel mateix Atiyah en l'ICM celebrat a Niça (1970).

Apareix també un article amb Segal en el qual estableixen un curiós teorema sobre λ-anells. És un teorema purament algebraic, per bé que les seves motivacions i aplicacions siguin topològiques (▷ **57**). És el fruit d'una col·laboració afavorida pel fet que Segal, doctorat el 1967 amb una tesi sobre teoria K equivariant dirigida per Atiyah (vegeu el final de la secció anterior), fou membre de l'IAS durant el primer dels tres anys de l'estada d'Atiyah.

Teoria de l'índex (III)

Destaquem primer els dos articles amb Singer que completen la remarcable sèrie de cinc articles sobre la teoria de l'índex publicats en els *Annals of Mathematics* (AM). D'aquests articles, en la secció anterior (p. 151) hem parlat dels tres primers (▷ **52**). L'objecte dels dos articles en qüestió és la teoria de l'índex per a *famílies* d'operadors el·líptics (▷ **58**).

Amb Singer publica també un article en què fan una «recerca sistemàtica dels índexs mod 2 en el marc de les àlgebres de Clifford», i es troben amb «la gran sorpresa d'obtenir una demostració completament nova del teorema de periodicitat real» (▷ **59**).

Apareix també un article amb Hirzebruch que estableix un resultat remarcable sobre les varietats espinorials (▷ **60**). És el darrer dels nou que han sorgit de la seva col·laboració i que han publicat en l'interval de quinze anys. Enfocats a la recerca de generalitzacions del teorema de HRR i a les seves aplicacions, i amb una extensió una mica inferior a la mitjana de tots els articles de CW, aquests nou articles integren una parcel·la en la qual brillen juntes les qualitats de dues ments matemàtiques de primera magnitud.

No podem deixar de fer esment dels articles que Atiyah firma tot sol. Pel que fa al període a l'IAS, els CW recullen cinc publicacions d'aquesta mena. Com és usual en ell, són treballs que obren noves vies conceptuals, que revelen noves connexions entre àrees matemàtiques més o menys allunyades o que aporten una perspectiva nova sobre una problemàtica determinada (▷ **61**).

El darrer curs a l'IAS fou també l'inici d'una intensa col·laboració amb Vijay Kumar Patodi (1945-1976), de la qual van resultar cinc articles (Bott col·laborà en el primer i Singer en els altres quatre). Atès, però, que algunes de les idees més significatives d'aquest programa es van desenvolupar després del retorn d'Atiyah a Oxford, i que en tot cas es van publicar entre el 1973 i el 1976, deixem per a la secció següent la consideració més detallada d'aquests treballs.

8 Oxford (1973-1990)

El 1973, Michael Atiyah tornà a Oxford, ara com a professor de recerca de la Royal Society (RS), plaça que ocupà fins al 1990.

Durant aquest període, és president de la London Mathematical Society (LMS) (1975-1977), president de la Mathematical Association (MA) (1981-1982) i vicepresident de la RS (1984-1985). El 1983, en una cerimònia al Palau de Buckingham, la reina el distingeix amb el títol de *knight bachelor* (és a dir, que des d'aquell moment esdevé Sir Michael Atiyah) i la RS li atorga la Medalla Copley, la més antiga de la RS (s'atorga anualment des del 1731 per «assoliments extraordinaris en qualsevol branca de la ciència»).

La seva activitat investigadora prossegueix amb persistent intensitat. A més de dos articles sobre teoria K i d'un seguit d'articles sobre teoria de l'índex, posa en marxa un programa de recerca sobre les interaccions entre geometria i física que resultarà extraordinàriament fèrtil i influent. Tot i que la seva plaça a Oxford no té obligacions docents, o potser precisament per això, accepta molts estudiants als quals dirigeix o supervisa. Són joves amb molt de talent que en ocasions acaben convertint-se en col·laboradors. El resultat és un flux de treball sostingut i diversificat que produeix fruits abundants i d'una gran qualitat.

Teoria K (V)

Els dos articles esmentats en aquesta línia són els que clouen el volum CW2. En el penúltim, del 1974, explora un enfocament «heterodox» de la teoria de l'homotopia, però reconeix que, fins al moment, no ha donat els fruits que n'esperava, i en el darrer, presentat el 1977 en una conferència sobre teoria K i àlgebres d'operadors, ofereix una breu però il·luminadora vista panoràmica de la teoria K (▷ **62**).

Teoria de l'índex (IV)

En aquest apartat, cal considerar primer dos articles del volum CW3, el penúltim i l'antepenúltim (per ordre cronològic), i després dotze articles del volum CW4.

El penúltim article de CW3 són unes notes breus preparades per a la sèrie de quatre conferències impartides com a *colloquium lectures* en la reunió de l'AMS celebrada a Dallas el 1973, just després del retorn a Oxford. No es van arribar a publicar, però tenen un gran interès, ja que aporten una nítida presentació històrica de la teoria de l'índex, que troba convenient dividir en quatre períodes. El primer període s'inicia amb Riemann i acaba amb Hodge (1939); el segon, ja en els anys de postguerra, i ordit amb la teoria de feixos, arriba fins a la generalització de Hirzebruch (1954) del teorema de RR; en el tercer (1955-1962), trobem Grothendieck i la introducció de la teoria K, i en el quart (la dècada 1963-1973), el protagonisme és ja per als operadors el·líptics i la teoria de l'índex (▷ **63**).

L'antepenúltim article de CW3 és en col·laboració amb Elmer G. Rees (n. 1941) i està dedicat a Serre en ocasió del seu cinquantè aniversari (1976). Demostren que tot fibrat complex de rang 2 sobre l'espai projectiu complex de dimensió 3 admet una estructura holomorfa i alguns altres resultats relacionats. «Amb el rejoc entre topologia i geometria algebraica via la cohomologia de feixos, semblava particularment apropiat per dedicar-lo a Serre, com a reconeixement de les moltes coses que vaig aprendre d'ell en els primers anys, tant pel que fa al contingut com a l'estil» (▷ **64**).

Dels articles de CW4, n'hi ha un primer grup de cinc originat en allò que en podem dir «efecte Patodi». Aquests treballs van significar un salt qualitatiu i computacional en la teoria de l'índex (▷ **65**). Per iniciar-se en aquestes idees, res millor que dos articles expositius del 1975. Un és molt breu (cinc pàgines) i l'altre està format per les notes de vuit conferències que Atiyah impartí en el Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) de Varenna i que constitueixen «una introducció folgada a la teoria de l'índex». Aquesta apreciació és justa (tot i que les vuit conferències juntes ocupen poc més de quaranta pàgines), ja que delineen l'entramat conceptual essencial de la teoria de l'índex fins al 1975. Componen, doncs, una guia molt útil per aprofundir en l'estudi del tema (▷ **66**).

Els cinc darrers articles de CW4 tracten noves generalitzacions i aplicacions de la teoria de l'índex (i de la teoria K). Com a punt de partida, podem prendre l'article dedicat a Henri Cartan (1904-2008) en ocasió del seu setantè aniversari. L'objectiu principal n'és explorar el difícil problema de com estendre la teoria de l'índex a varietats no compactes. Una qüestió crucial en aquest sentit és disposar d'una noció apropiada de dimensió dels espais que en el cas compacte tenen dimensió (ordinària) finita. La proposta, formulada amb l'ajut de Singer, fou d'usar resultats d'anàlisi funcional (àlgebres de Von Neumann de tipus II): «Ens vam adonar que la teoria K i la teoria de l'índex es podien generalitzar en aquesta direcció». Per mostrar que això podia tenir algun interès, es posà en una situació «particularment simple», que es pot descriure com la d'un operador el·líptic sobre una varietat X que commuta amb l'acció lliure d'un grup discret Γ per al qual $V = X/\Gamma$ és compacte, i per a la qual obté «resultats concrets no trivials» (▷ **67**).

Tot seguit, hem de considerar els treballs en col·laboració amb Wilfried Schmid (n. 1943),[23] en bona part desenvolupats l'any 1975, quan van coincidir a l'IAS. Els objectes considerats són els grups de Lie semisimples no compactes. Amb tècniques introduïdes en l'article dedicat a Cartan, donen una nova demostració del teorema de Harish-Chandra sobre la integrabilitat local dels caràcters irreductibles i l'apliquen a una nova construcció, més assequible, de les representacions del grup de l'anomenada sèrie discreta (▷ **68**).

Finalitzem aquest apartat amb el treball fet en col·laboració amb Harold G. Donnelly (n. 1949)[24] i Singer. És una incursió en la teoria de nombres que il·lustra un cop més el gran abast dels mètodes de la teoria de l'índex. Atiyah explica la gènesi d'aquesta iniciativa a CW4.9 «L'invariant η introduït en l'article conjunt amb Patodi i Singer [v. CW4[80] i CW4[81], ▷ **65**], en part havia estat motivat pel treball de Hirzebruch sobre singularitats cuspidals [de

23 Doctorat el 1967 a la Universitat de Berkeley amb la tesi *Homogeneous complex manifolds and representatives of semisimple Lie groups*, dirigida per Phillip A. Griffiths (n. 1938).
24 Doctorat el 1974 a la Universitat de Berkeley amb la tesi *Chern-Simons invariants of reductive homogeneous spaces*, dirigida per Shiing-shen Chern (1911-2004).

superfícies modulars de Hilbert], i més concretament per la seva expressió del «defecte» [de la signatura, en les cúspides] en termes [del valor en $s = 1$] de funcions L de cossos quadràtics reals. Singer i jo vam obtenir aquesta fórmula a partir dels nostres resultats generals i vam fer plans per demostrar la fórmula [conjecturada per Hirzebruch: *Einseign. Math.*, 19 (1973), 183–281] per al cas de cossos totalment reals de qualsevol grau, però vam posposar-los a causa de certes dificultats analítiques que necessitaven un tractament curós. Molts anys després, amb l'ajut de Harold G. Donnelly, vam completar el programa i vam publicar-ne els resultats» (▷ **69**).

Geometria i física

Encara que Atiyah sempre havia estat interessat en la física matemàtica, l'inici oficial del programa de recerca enfocat a les «interrelacions entre geometria i física» no es produeix fins a l'any 1977. Tanmateix, la seva fecunditat fou aviat manifesta, tant pels treballs d'Atiyah, sovint conjunts amb col·laboradors seus, com pels d'altres investigadors inspirats per les seves idees. Retrospectivament, no hi ha dubte que el seu impacte ha estat immens i molt positiu, tant per a les matemàtiques com per a la física teòrica.

En l'origen de l'interès d'Atiyah per la física teòrica, hi ha dues circumstàncies determinants. D'una banda, coneix per Singer, quan aquest visita Oxford a principis del 1977, el treball de Yang i Mills en què estableixen, a partir de suposar la seva invariància *gauge* (▷ **24**), l'equació que ha de satisfer l'*espín isotòpic* (▷ **25**). La reacció no es fa esperar: amb la col·laboració de Nigel Hitchin (n. 1946),[25] i mitjançant una «senzilla» aplicació del teorema de l'índex, determina el nombre de paràmetres de què depenen les solucions autoduals, també anomenades *instantons*, de l'equació de Yang–Mills (▷ **26**).

D'altra banda, hi ha la interacció que s'establí amb Roger Penrose (n. 1931), nomenat professor de matemàtiques de la Universitat d'Oxford el mateix any del retorn d'Atiyah (1973), en relació amb la teoria de *twistors* (Penrose, 1967): «M'era fàcil entendre la geometria dels *twistors*, ja que era la vella correspondència de Klein per a rectes de $\mathbb{P}_3$ que vaig aprendre aviat en la meva formació, però vaig haver d'aprendre'n la motivació i la interpretació física. En aquells dies, Penrose utilitzava profusament les integrals múltiples complexes i els residus, però estava cercant quelcom més natural, i jo em vaig adonar que els grups de cohomologia de feixos donaven la resposta». Atiyah també va descobrir una «interpretació quaterniònica» dels *twistors* que, com veurem, fou un ingredient bàsic per als desenvolupaments subsegüents.

La següent experiència crucial d'Atiyah es produí quan Richard Ward[26] va fer un seminari per explicar les seves idees sobre «com usar els *twistors* per reinterpretar les equacions de Yang–Mills autoduals», idees que Atiyah

25 Doctorat a Oxford el 1972 amb la tesi *Differentiable manifolds: The space of harmonic spinors*, dirigida per Brian F. Steer i Atiyah, acompanyà Atiyah a Princeton durant dos anys i després retornà a Oxford. Actualment, és *Savilian professor de geometria.*

26 Doctorat el 1977 per Oxford, sota la supervisió de Roger Penrose.

emprà, després de formular-les en un context global, per construir instantons. Nogensmenys, «gairebé immediatament vaig quedar decebut quan vaig rebre *preprints* de físics que havien descobert (per mètodes diferents) les mateixes solucions! Això fou la meva primera experiència sobre el diferent *tempo* del món dels físics teòrics, en el qual les noves idees es difonen com un foc descontrolat i estimulen la producció de *preprints* a un ritme trepidant».

Valuós com és aquest testimoni per copsar l'ambient del moment, potser encara ho és més la reacció: «Estimulats per aquesta atmosfera competitiva, Ward i jo vam persistir a provar que, en principi, la geometria algebraica proporcionava mètodes per a la construcció de multiinstantons». La construcció *explícita*, amb l'ajut de Hitchin, i usant el procediment de Horrocks, fou una altra fita important. Tanmateix, Yuri I. Manin (n. 1937) i Vladimir G. Drinfel'd (n. 1954), amb els quals Atiyah s'havia correspost sobre el tema, van trobar la mateixa solució gairebé al mateix temps, i és per això que l'article en què van publicar els resultats (el famós ADHM) està firmat per tots quatre.

L'exposició sistemàtica i detallada dels resultats que acabem de comentar dóna lloc a dues memòries fonamentals. Una és l'acabada a finals del 1977 i firmada amb Hitchin i Singer. Tot i estar inspirada en la física, el seu contingut és essencialment matemàtic i inclou una versió detallada de la teoria de *twistors* i de les construccions amb Ward i Hitchin d'instantons de l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ (▷ **70**). L'altra memòria fonamental exposa la relació amb les teories *gauge* des del punt de vista dels físics. És una versió ampliada de les notes preparades per a les «Lezioni Fermiane» que Atiyah impartí el juny del 1978 a la Scuola Normale de Pisa (▷ **71**). Aquesta remarcable memòria posa de manifest que «les idees i problemes provinents de la física han conduït a treballs matemàtics d'un extraordinari interès i estretament relacionats amb la geometria algebraica clàssica» (CW5.184).

La publicació de la memòria sobre la geometria dels camps de Yang–Mills es produeix l'any del cinquantè aniversari d'Atiyah. Assenyala el final de la dècada iniciada amb l'aparició del llibre *K-theory* i és l'anunci d'una altra, la darrera a Oxford, tant productiva o més que les anteriors, i que també culminarà amb una memòria de síntesi (*The geometry and physics of knots*), de la qual parlarem més endavant. Alguns dels treballs d'aquesta dècada ja han estat considerats en els dos primers apartats d'aquesta secció i d'altres ho seran en l'apartat següent. Tocant a la relació entre geometria i física teòrica, s'aprecia, sobre el fons d'idees dels treballs anteriors, una certa especialització i diversificació dels temes, i és per això que en el que resta d'aquest apartat en presentarem successivament els més significatius.

Comencem amb els treballs en què s'exposen els resultats de les recerques originades per les teories de Yang–Mills i algunes de les seves ramificacions (▷ **26**). Una de les idees brillants fou adonar-se que les equacions de Yang–Mills en dimensió 2 (és a dir, sobre una superfície de Riemann S), tot i ser essencialment trivials, es podien usar per estudiar els espais de moduli de fibrats vectorials sobre S. Aquesta idea la va desenvolupar amb Bott, però a tal fi van haver d'elaborar una teoria de Morse relativa a la cohomologia equivariant. La publicació principal que en va resultar és una llarga i magistral memòria apareguda l'any 1982 ($\triangleright$ **72**).

Tanmateix, el descobriment més sensacional en aquesta direcció va provenir de Simon Donaldson (n. 1957), que estava treballant en la seva tesi doctoral (*The Yang–Mills equations on Kähler manifolds*, 1983) sota la supervisió d'Atiyah i Hitchin. Donaldson va trobar la manera d'aplicar les equacions de Yang–Mills per deduir profunds i innovadors teoremes sobre l'estructura de les varietats de dimensió 4, resultats pels quals fou guardonat amb la Medalla Fields a l'ICM del 1986 (Berkeley).[27] Atiyah va anar exposant els seus punts de vista sobre aquests progressos en diverses publicacions que són una font privilegiada per accedir a unes idees extraordinàriament innovadores i a la seva significació en un marc general ($\triangleright$ **73**).

A continuació, considerarem les investigacions sobre la teoria de monopols no abelians ($\triangleright$ **27**), als quals Atiyah ja s'havia referit a l'ICM del 1978 ($\triangleright$ **71**). Encara que l'inici de l'interès per aquesta qüestió prové del treball de Paul Dirac (1902-1984) sobre monopols magnètics[28] i que el seu estudi té relació amb la quantificació dels camps de Yang–Mills (com una possible pista per donar sentit matemàtic a la integral de Feynman), l'objecte de les recerques d'Atiyah, amb la col·laboració de Hitchin i altres, és essencialment de natura geomètrica i força tècnica. Es poden descriure com les solucions de les equacions de Yang–Mills autoduals sobre $\mathbb{R}^4$ que no depenen de x_4 (en podem dir solucions estàtiques), les quals es redueixen a les solucions de les equacions de Bogomolny a $\mathbb{R}^3$. Per al seu estudi, els mètodes solen ser variacions apropiades de la transformada de Penrose ($\triangleright$ **74**).

Indiquem ara els treballs en què s'exploren diverses connexions entre la geometria simplèctica ($\triangleright$ **28**) i la geometria algebraica complexa o, més generalment, la geometria de les varietats holomorfes. El procediment sol consistir a establir teoremes generals que posen de manifest sorprenents parentius entre resultats contemporanis aparentment disjunts i obtenir-ne col·lateralment millores, generalitzacions i idees per a ulteriors recerques. En tots aquests treballs, l'aplicació moment i l'estructura polièdrica de la seva imatge hi tenen un paper destacat ($\triangleright$ **75**). Entre aquests articles, hi figura el darrer en què apareix la firma de Bott, CW5[109]. Els noms d'Atiyah i Bott han encapçalat una dotzena d'articles, ocasionalment amb algun altre coautor (Shapiro, Gårding, Patodi), durant un període de vint anys. No hi ha dubte que la col·laboració ha estat, al costat de les col·laboracions amb Hirzebruch i amb Singer, una de les més intenses i productives. «La col·laboració amb Raoul ha estat un dels grans

27 La citació oficial de la IMU diu que fou «principalment pel seu treball en la topologia de varietats de dimensió 4, i especialment per demostrar que existeix una estructura diferenciable en l'espai euclidià de dimensió 4 diferent de l'estructura usual».

28 Per a una presentació molt assequible dels aspectes més rellevants d'aquests objectes, vegeu el capítol introductori de [9-*d*2]. L'article original de Dirac, titulat «Quantized singularities in the electromagnetic field», és un clàssic de la literatura científica: *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 133 (1931), 60–72.

goigs de la meva vida personal i matemàtica. El nostre treball conjunt sens dubte reflecteix, i ensems reforça, la nostra llarga amistat, la qual subratlla que la matemàtica és una activitat humana que encara no s'ha reduït a un programa d'ordinador» (CW6[154], p. 588).

Donem el torn a un aspecte de la producció d'Atiyah que per si sol donaria per a un llarg assaig. Es tracta de la profunda influència recíproca entre Atiyah i Witten. Aquí només podem donar-ne unes breus indicacions a través de les publicacions d'Atiyah, que es considera «afortunat per haver conegut Witten molt aviat, quan era un *junior fellow* a Harvard (1977)» del qual «va aprendre molt». Edward Witten (n. 1951)[29] és un explorador penetrant de les fronteres de la física teòrica, extraordinàriament prolífic, i és reconegut que els seus treballs han proporcionat als matemàtics sofisticades vies d'accés a la física. En la producció d'Atiyah, les empremtes de la influència de Witten es troben en diversos treballs. Esmentem primer tres peces del 1984 sobre «anomalies» (▷ **76**), entre les quals es troba el darrer treball en col·laboració amb Singer (CW5[120]). Fou una col·laboració al llarg de més de vint anys que produí una quinzena d'articles remarcables, alguns amb l'ajut d'un tercer autor (Patodi, Hitchin, Donnelly).

Encara el mateix any 1984, un dels més fèrtils d'Atiyah, fa una conferència a l'*Arbeitstagung* en què reflexiona sobre un treball de Witten i Cumrun Vafa (n. 1960) relatiu a desigualtats de l'espectre de l'operador de Dirac, i l'any següent, en la conferència per celebrar el setantè aniversari de Laurent Schwartz (1915-2002), aprofita per difondre una idea de Witten per demostrar el teorema de l'índex per a l'operador de Dirac (▷ **77**). I, finalment, hi ha un cert nombre de treballs dedicats a qüestions relatives a les teories quàntiques de camps topològiques, els quals sovint ressonen com una música tocada a duet per dos virtuosos acompanyats per una orquestra de primeres figures (▷ **78**).

Tanquem aquest apartat amb unes citacions extretes de l'article de Witten «Michael Atiyah and the physics/geometry interface» (*Asian J. Math.* 3 (1) (1999), lxi-lxiv) preparat en ocasió del seixantè aniversari d'Atiyah:

> Els físics teòrics encara no s'havien adonat que la revolució de les teories *gauge* havia creat una situació en la qual seria necessari i profitós adquirir una sofisticació matemàtica més gran de la que estàvem acostumats. Atiyah i altres matemàtics [...] van tenir un important paper en el procés.
>
> Albert Schwarz va mostrar [el 1976] que alguns dels ingredients de la solució [usant instantons de l'anomenat problema $U(1)$] s'entenien millor amb el teorema de l'índex d'Atiyah–Singer [...]. En l'ambient de la física teòrica d'aquells dies, [això] estava molt més enllà del nivell de sofisticació matemàtica prevalent.
>
> El 1987 [...] Atiyah suggerí que hauria de ser possible construir, per mètodes físics, una teoria quàntica de camps amb funcions de correlació els polinomis

29 Doctorat el 1976 per la Universitat de Princeton amb la tesi *Some problems in the short distance analysis of gauge theories*, dirigida per David J. Gross (n. 1941), fou guardonat amb la Medalla Fields a l'ICM del 1990 (Kyoto, Japó), i fins ara és l'únic físic que ha rebut aquesta distinció.

de Donaldson i amb espais de Hilbert els grups de Floer. [Witten va demostrar que efectivament es podia fer abans d'acabar l'any.]

[El 1988] Atiyah considerava que era una situació insatisfactòria no entendre el polinomi de Jones en termes d'una teoria quàntica de camps. [Witten va resoldre aquest problema molt aviat, amb pistes donades per Atiyah, i considerà que] aquest treball, en què es relaciona el polinomi de Jones amb la teoria de Chern–Simons, fou una inflexió en la meva carrera.

He intentat explicar alguns dels moments més significatius de les meves interaccions amb Michael Atiyah i transmetre una mica el paper que va tenir encoratjant-nos a estudiar teoria quàntica de camps des de nous punts de vista. Vam haver d'aprendre moltes lliçons abans de poder abastar seriosament aquestes noves perspectives. Atiyah, junt amb col·legues com Bott i Singer, va tenir un paper important en l'ensenyament d'algunes d'aquestes lliçons al món de la física. Atiyah sempre havia cregut intuïtivament que l'estudi de la teoria quàntica de camps com una eina per a la geometria s'havia d'integrar en l'estudi d'aspectes més «físics» de la teoria quàntica de camps. Per a mi, personalment, aquesta fou una de les lliçons més dures d'aprendre.

Altres treballs

Ens hem deixat encara un bon nombre de treballs publicats en el període que estem considerant en aquesta secció. En farem dos grups. En el primer posarem alguns dels articles als quals al·ludíem a [4]:

> Un aspecte interessant de l'obra d'Atiyah és que conté un bon nombre de peces (gairebé quaranta) que ell en diu «quasimatemàtiques» i que de fet són assajos, visions panoràmiques d'alguna qüestió o escrits biogràfics. Pel que fa a l'extensió, no arriba a una dècima part de la seva obra coneguda, però tenen una gran importància perquè ofereixen vies més planeres d'accés al seu pensament que les dels articles més tècnics. A més, posen de manifest que Atiyah és també un escriptor de primera fila. La seva prosa és fluida, nítida, efectiva. No s'entrebanca en res, no conté coses supèrflues i sempre fa la impressió que ho ha dit tot.

D'aquesta mena d'articles, CW1 en recull catorze, dels quals dotze corresponen al segon període d'Oxford, i d'aquests destaquem els sis que ens semblen més representatius, incloent-hi la biografia del seu mestre Hodge. Els títols són prou clars per no necessitar comentaris. Hi hem afegit també un article del 1984, inclòs com a CW5[122], amb un curiós comentari del mateix Atiyah (▷ **79**).

L'altre grup d'articles és de contingut matemàtic. Alguns podrien haver-se inclòs en algun dels paràgrafs de l'apartat anterior, però al final hem optat per agrupar-los aquí per ordre cronològic de publicació, amb comentaris breus quan ens ha semblat que podien ajudar a precisar-ne la natura (▷ **80**).

Finalment, cal dir que l'any 1988 Atiyah publicà els cinc primers volums dels seus *Collected Works* (Oxford, Clarendon Press). Apleguen cent vint-i-quatre treballs, agrupats de la manera següent:

Volum	*Títol*	*Articles*
1	*Early papers*	1–9
	General papers	10–23
2	*K-theory*	24–55
3	*Index theory: 1*	56–78
4	*Index theory: 2*	79–93
5	*Gauge theories*	94–124

A més del prefaci general, que es repeteix en els cinc volums, cada volum conté una introducció específica en què Atiyah fa comentaris sobre els diversos articles que s'hi apleguen per «explicar la gènesi de les idees i les relacions mútues» (CW1.V) i que ha estat, com n'hem anat deixant constància, una font bàsica i indispensable per a aquest treball.

9 Cambridge (1990-1997)

El 1990, Atiyah retorna a Cambridge com a *master* del Trinity College. És un càrrec de nomenament reial, a proposta del primer ministre, per al qual cal tenir un títol de Cambridge i les més altes distincions acadèmiques. Des de la seva fundació, el 1546, per Enric VIII, la presa de possessió desplega tota la tradicional solemnitat britànica i acaba a l'entrada del Master's Lodge, la residència que ocuparà durant el seu mandat. El seu predecessor en el càrrec fou Andrew Huxley (n. 1917), guardonat amb el Premi Nobel de Fisiologia i Medicina el 1963, i el seu successor, Amartya Sen (n. 1933), Premi Nobel d'Economia el 1998, i entre els seus trenta-cinc antecessors hi trobem Isaac Barrow (1630-1677) en el període 1672-1677.

El Trinity és una admirable institució que no té paral·lel en el nostre sistema, encara que només sigui per la seva independència financera i per tenir plenes competències d'admissió. Amb set-cents estudiants de grau, quatre-cents cinquanta de postgrau, i més de cent seixanta professors (*fellows*),[30] és el *college* més gran de la Universitat de Cambridge, també el més aristocràtic, i és certament una institució capdavantera a escala mundial en diverses especialitats. La llista dels seus *alumni* distingits mostra, en particular, una gran tradició matemàtica i física, que inclou noms com Isaac Newton (1643-1727), Charles Babbage (1791-1871), Arthur Cayley (1821-1895), James Clerk Maxwell (1831-1879), Alfred N. Whitehead (1861-1947) i Godfrey H. Hardy (1877-1947).

En aquest segon període a Cambridge, Atiyah és, a més, president de la RS (1990-1995)[31] i primer director de l'Institut Isaac Newton per a les Ciències Matemàtiques (1990-1996). L'Isaac Newton, en la definició del qual Atiyah

30 Entre els *fellows* actuals en l'especialitat de matemàtiques, el més antic és Ian Cassels (n. 1922), des del 1949, seguit d'Atiyah, des del 1954, i el més recent és Tim Gowers (n. 1963), des del 1995, guardonat amb la Medalla Fields a l'ICM del 1998 (Berlín). També hi trobem Alan Baker (n. 1939), des del 1964, i Bela Bollobás (n. 1943), des del 1970.

31 Dels sis antecessors immediats d'Atiyah en el càrrec de *master*, quatre van ser també presidents de la RS.

tingué un paper principal, és una institució interdisciplinària que no exclou cap tema *a priori* i on el mèrit científic és el factor decisiu. El 1992, coincidint amb l'inici de les activitats regulars de l'Institut, li és conferida l'Ordre del Mèrit (OM) per la reina.

Tota aquesta activitat institucional resulta absorbent fins i tot per Atiyah, de manera que les publicacions d'aquest període són escasses. Podem referir una nota i una memòria sobre *skyrmions*, en col·laboració amb Nicholas Manton[32] (▷ **81**); un article expositiu sobre el profund contingut matemàtic de l'operador de Dirac (▷ **82**), i nou assajos. D'aquests assajos, tres són semblances biogràfiques (Hirzebruch, Bott i Penrose) i els altres són reflexions sobre el paper de les matemàtiques en la ciència o de la ciència en la societat en general. Són, en tot cas, lectures molt recomanables, sorgides d'un gruix d'experiències i coneixement difícilment igualable (▷ **83**).

10 Edimburg (des del 1997)

L'any 1997, Atiyah es jubila de Cambridge i accepta una plaça de professor honorari a la Universitat d'Edimburg, plaça que ha ocupat fins a l'actualitat. Durant aquest període, ha estat *chancellor* de la Universitat de Leicester (1995-2007) i president de la RSE (2005-2008). Entre les actuacions que promogué a la RSE, està orgullós d'haver aconseguit erigir, al final del seu mandat, una estàtua de Maxwell al carrer de George, prop de la seu de la societat. És una magnífica escultura en bronze, obra d'Alexander Stoddart, en memòria del que fou membre del RSE i un dels fills més il·lustres d'Edimburg.

Com hem assenyalat en la presentació, Atiyah també fou president del Comitè Científic del tercer Congrés Europeu de Matemàtiques (**3ecm**) celebrat l'any 2000 a Barcelona, esdeveniment que va propiciar la seva visita a Barcelona en dues ocasions. El Congrés Europeu de Matemàtiques és una de les activitats principals de la Societat Matemàtica Europea (EMS) i l'organització del **3ecm** correspongué, per l'acord de l'EMS pres el 1996 a Budapest, a la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC). Atiyah fou nomenat per l'EMS, a proposta de la SCM, president del Comitè Científic. Fou un motiu de gran satisfacció, no tan sols per la seva categoria científica, sinó també perquè havia tingut un paper fonamental en la creació de l'EMS.

Atiyah tornà a visitar Barcelona en dues ocasions. El desembre del 2007, invitat per la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) de la UPC, va impartir, en el marc del curs Riemann de la FME, la conferència d'obertura titulada «Riemann's influence in geometry, analysis and number theory». A més, el Centre de Recerca Matemàtica (CRM) va auspiciar una altra conferència, «Duality in mathematics and physics», que fou impartida a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. L'altra visita a Barcelona tingué lloc l'abril del 2008 per rebre la distinció com a DHC de la UPC.

32 Doctorat el 1978 a Cambridge, sota la supervisió de Peter Goddard (n. 1945), amb la tesi *Magnetic monopoles and other extended objects in field theory.*

Treballs matemàtics

Els comentarem en tres grups. Un primer grup està format per sis articles, dels quals Atiyah diu que li van permetre de «retrobar-se amb la recerca matemàtica després dels seus llargs compromisos amb el Trinity i la RS». L'origen d'aquestes investigacions és una pregunta que li formulà Michael Berry (n. 1941) relacionada amb l'aproximació clàssica a la dicotomia bosó/fermió de la mecànica quàntica que havia publicat l'any 1997 conjuntament amb Jonathan Robbins. El problema, purament geomètric, era construir una aplicació contínua, compatible amb l'acció del grup simètric d'ordre n, de l'espai de configuració de n-ples ordenades de punts distints de $\mathbb{R}^3$ en la varietat que parametritza n-ples ordenades de $\mathbb{C}$-subespais de dimensió 1 mútuament perpendiculars de l'espai $\mathbb{C}^n$ (espai de banderes completes). En el primer article, Atiyah troba una solució al problema, per mitjans geomètrics relativament elementals, i enuncia una conjectura que, si fos certa, donaria una solució molt més elegant. En els altres articles, es prossegueixen aquestes idees en diverses direccions i, en particular, es posen de manifest connexions amb la física més enllà del context original del problema (▷ **84**).

El segon grup també consta de sis articles, força tècnics, sobre física o sobre qüestions geomètriques estretament relacionades amb la física. És commovedor comprovar que Atiyah, a l'entorn del seu setantè aniversari, s'inicia en temes que per a ell són nous, com ara la teoria de cordes o la teoria M, i que en poc temps hi contribueix amb el seu estil característic i amb tota l'autoritat (▷ **85**).

En el tercer grup posem els dos articles expositius corresponents a les dues conferències que Atiyah va impartir el desembre del 2007 a Barcelona i a les quals hem fet referència al final de la introducció a aquesta secció (▷ **86**).

Finalment, cal que ens referim a la publicació de CW6, el sisè volum dels *Collected Works*. Apareix l'any del setanta-cinquè aniversari de l'autor, setze anys després dels cinc primers volums, i conté quaranta-nou treballs de diversa natura que, en total, depassen les mil pàgines. «Inevitablement», ens diu en el curt prefaci, «amb responsabilitats administratives creixents i amb més anys, una major proporció dels articles són visions panoràmiques d'una mena o una altra, més que no pas articles tècnics de matemàtiques. Aquests *surveys*, sovint exposats en algun simposi, o per alguna ocasió especial, tendeixen a cobrir terrenys similars i tenen el perill de ser repetitius. És per aquesta raó que no s'hi han inclòs tots els meus treballs del període 1988-2004. He estat una mica selectiu i només he tingut en compte articles que contenen nous resultats o almenys una nova perspectiva.»

Semblances biogràfiques i assaig

El caràcter d'aquests escrits, originats en circumstàncies diverses, és l'apreciació personal de quatre matemàtics que han tingut una especial significació en la trajectòria d'Atiyah: Hirzebruch, Todd, Kodaira i Weyl. El de Hirzebruch és més aviat històric, i complementa l'article CW6[152] que hem vist a ▷ **83**.[33] A aquesta llista, cal afegir-h l'article autobiogràfic que inicia CW6, «A personal history». Conté una introducció, enfocada a recordar les seves col·laboracions més importants, i onze seccions sobre els temes de les seves recerques: teoria K, teoria de l'índex, relacions entre la teoria K i la teoria de l'índex, teoremes de punts fixos, mètodes de l'equació de la calor, l'invariant η, equacions hiperbòliques, equacions de Yang–Mills, fibrats sobre superfícies de Riemann, cohomologia equivariant i, finalment, teories quàntiques de camps topològiques (▷ **87**).

En el grup d'assajos incloem cinc títols. D'una natura que combina elements històrics amb reflexions que a vegades tenen un caràcter força especulatiu, i fins i tot filosòfic, són peces que poden servir com a entrades especialment accessibles al pensament de l'autor i als contextos en els quals s'ha desplegat (▷ **88**).

Premi Abel

L'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres atorgà el Premi Abel 2004 conjuntament a Sir Michael Atiyah, de la Universitat d'Edimburg, i a Isadore M. Singer, del MIT,

> pel seu descobriment i demostració del teorema de l'índex, que interconnecta topologia, geometria i anàlisi, i pel seu extraordinari paper en la construcció de nous ponts entre les matemàtiques i la física teòrica.

L'Acadèmia també precisava que:

> El teorema de l'índex d'Atiyah–Singer és una de les grans fites de les matemàtiques del segle XX, que ha influït profundament en molts dels desenvolupaments posteriors en topologia, geometria diferencial i teoria quàntica de camps. Els seus autors, tant junts com individualment, han estat decisius per tancar l'escletxa entre els mons de la matemàtica pura i la física teòrica de partícules i han promogut una interfertilització que ha estat un dels desenvolupaments més engrescadors de les darreres dècades.

El Premi Abel, establert en memòria del matemàtic noruec Niels Henrik Abel (1802-1829), s'atorga anualment a un matemàtic o més. Sovint anomenat «Premi Nobel de les matemàtiques», el lliura el rei de Noruega i és sens dubte un dels més preuats que es poden assolir en el camp de les matemàtiques. Entre les motivacions que van concórrer en l'establiment d'aquest guardó, destaca el desig de prestigiar les matemàtiques, particularment de cara a la joventut.

Pot ser un moment oportú per recordar que, actualment, a més de membre de la RS, Atiyah és membre extern de dinou acadèmies nacionals i ha estat investit DHC per trenta-tres universitats d'arreu del món. A més, la Universitat de Leicester li va dedicar un edifici, destinat a temes interdisciplinaris, i la Universitat Nord-americana de Beirut va dotar una Càtedra de Ciències Matemàtiques que porta el seu nom (▷ **88**, CW6[159]).

---

33 Un article anàleg, no inclòs a CW, és «The impact of Thom's cobordism theory», *Bull. Amer. Math. Soc.*, 41(3) (2004), 337–340.

Guardonats amb el Premi Abel fins al 2009

2003	Jean Pierre Serre
2004	Michael F. Atiyah i Isadore M. Singer
2005	Peter D. Lax
2006	Lennart Carleson
2007	S. R. Srinivasa Varadhan
2008	John G. Thompson i Jacques Tits
2009	Mikhaïl Gromov

11 Apunts de cloenda

Hem tingut ocasió de conèixer un bon nombre d'apreciacions d'Atiyah sobre el seu propi treball i sobre els seus col·laboradors. Són totes molt significatives i, segons totes les evidències, remarcablement acurades i justes. Tanmateix, el seu ple sentit només es revela si hom les contrasta amb la seva perspectiva general de les matemàtiques, la ciència, la raó i la societat en general. En l'elaboració d'aquesta perspectiva, hi ha tingut una funció principal el refinat i punyent estil dialèctic amb què s'encara amb les dicotomies que inevitablement es presenten en el pensament conscient. Ho il·lustrarem amb uns pocs exemples concrets que posen de manifest aquesta característica general de la seva ment.

Fixem-nos primer en el cas de la dicotomia que en podem dir «de la torre d'ivori», és a dir, la de l'isolament del matemàtic *versus* la seva participació en els afers de la societat. La seva «resolució» d'aquesta dicotomia l'exposa diàfanament en el discurs de recepció del títol de DHC de la Universitat Brown (CW6.516):

> Es podria descriure o caricaturitzar el matemàtic pur com un que treballa sol al seu despatx, capficat en les seves elaborades construccions, que no mira per la finestra i sense cap interès per la resta de l'edifici. A cada despatx hi ha diferents matemàtics [...]. Els despatxos no estan tancats, però no hi ha pas gaire trànsit entre ells. Continuant amb aquesta analogia, jo mateix vaig començar d'aquesta manera, però em vaig trobar rondant despatx per despatx, sortint al jardí, al carrer, anant carretera enllà... Això em va portar a creuar una bona part de les matemàtiques pures i, amb el temps, a topar-me amb la física teòrica. Pel camí vaig poder albirar altres terrenys, especialment via les equacions diferencials. Aquesta dilatació dels meus interessos matemàtics es va intensificar per, i es va reflectir en, diversos canvis en la meva carrera. Com a president de la RS (1990-1995), em vaig haver d'involucrar en la ciència en general. Després de Stokes, era el primer matemàtic que ocupava el càrrec, el mateix que [tres] segles abans havia estat exercit per Isaac Newton durant més de vint anys. Vaig haver de reflexionar sobre el paper de les matemàtiques en la ciència i també sobre el de la ciència en la societat. Simultàniament, vaig esdevenir el primer director de l'Institut Isaac Newton per a les Ciències Matemàtiques, a Cambridge, i vaig haver de pensar en la seva filosofia i en les seves polítiques [...]. Finalment, com a *master* del Trinity College (1990-1997), amb les seves grans tradicions

> matemàtiques originades amb Newton, vaig prendre consciència de la història i del paper de les matemàtiques en el desenvolupament de la ciència.

Una dicotomia estretament relacionada amb l'anterior és la de matemàtica pura *versus* matemàtica aplicada. Sobre això, en el mateix escrit, Atiyah es pronuncia de la manera següent:

> Els matemàtics purs sovint ignoren o menyspreen la matemàtica aplicada adduint que és avorrida, lletja i intel·lectualment poc profunda. Jo penso que, adoptant aquesta actitud negativa, s'equivoquen. Hi ha diverses raons per les quals haurien de canviar els seus punts de vista:
>
> 1) Les aplicacions subministren nous problemes i conceptes. Això ha estat així històricament i segueix essent vàlid avui.
> 2) Alguns fenòmens matemàtics s'han descobert per la via de les aplicacions. Els solitons, en les seves diverses formes, en donen un exemple recent.
> 3) Els matemàtics purs necessiten aliats poderosos per poder presentar el seu cas davant del públic. Els matemàtics aplicats (i altres científics) entenen la força de les matemàtiques i poden fer arribar millor aquest missatge.
> 4) [També] necessiten sortides per als seus estudiants, molts dels quals hauran d'aplicar les matemàtiques d'una manera o altra en les seves ocupacions futures.

Els testimonis anteriors es poden complementar amb un parell de paràgrafs de CW6.9 que mostren que Atiyah predica amb l'exemple:

> Alguns matemàtics [...] prefereixen treballar sols. No és el meu cas. Prefereixo el viu intercanvi de les discussions i arguments matemàtics i una bona part del meu temps l'he passada d'aquesta manera. Afortunadament, els temps han estat propicis per a aquest estil de vida interactiu. L'Institut de Princeton i l'*Arbeitstagung* anual a Bonn oferien grans oportunitats de parlar amb matemàtics de primera classe d'arreu del món.
>
> Penso que és just dir que, durant els vint-i-cinc anys més productius de la meva vida, aquestes col·laboracions van ser la característica dominant. En cada cas les nostres formacions eren una mica diferents i d'això me'n vaig beneficiar, guanyant expertesa de la millor manera possible: treballant amb un expert!

També ha expressat la seva posició d'una manera clara sobre la polaritat entre la realitat i el llenguatge. Unes breus citacions seran suficients per indicar la direcció dels seus pensaments:

> Potser el més senzill és dir que les matemàtiques són l'eina per pensar amb precisió. La matèria és secundària, l'aspecte principal és la manera com es tracta (CW6.516).
>
> Si el llenguatge és la característica distintiva de l'*homo sapiens*, aleshores les matemàtiques són la característica distintiva de l'*homo scientificus* (CW6.537).
>
> Les matemàtiques són el *software* de la ciència (CW6.537).
>
> És difícil conciliar l'aparició de la mecànica quàntica amb la visió platònica. Tots els indicis apunten que estem davant de noves idees matemàtiques que ens han estat dictades per la mecànica quàntica, i ningú no podria mantenir que la teoria quàntica fou una pura creació de la ment (CW6.645).

> L'àlgebra és l'oferta del dimoni al matemàtic. El dimoni diu: «Et donaré aquesta màquina poderosa que contesta qualsevol pregunta que li vulguis fer. L'única cosa que has de fer és donar-me l'ànima: renuncia a la geometria i disposaràs d'aquesta meravellosa màquina» (avui hom pot imaginar-la com un ordinador!). És cert que ens agrada disposar de tots dos aspectes, de manera que possiblement enganyaríem el diable fent veure que li venem l'ànima però, de fet, no lliurant-la-hi. Tanmateix, el perill per a l'ànima és real, ja que quan passem a càlculs algebraics, essencialment deixem de pensar; deixem de pensar en mode geomètric, deixem de pensar en el significat (CW6.657).

Tocant a les dicotomies intuïció *versus* rigor o sentit estètic *versus* lògica, Atiyah també ha expressat punts de vista interessants:

> En la història de les matemàtiques abunden els casos en què una inspiració feliç triomfa sobre la manca de rigor (CW6.487).
>
> De fet, la cerca de la simplicitat i l'elegància és, en un sentit fonamental, el propòsit de tota investigació científica. Cerquem principis senzills i idees que expliquin fenòmens complicats. El sentit estètic és una de les guies importants de la investigació. Per a un matemàtic, com per a un artista, veritat i bellesa estan íntimament relacionades (CW6.539).

Pel que fa a llibertat d'investigació *versus* planificació (més o menys) centralitzada, hem espigolat el següent:

> Fins i tot si es demana a la ciència de complir una missió pràctica, és essencial mantenir ben viu el sentit d'indagació fonamental i lliure, impulsat per la curiositat individual. I espero que es tindrà en compte que no hi ha un esperit més curiós que el d'un matemàtic, ja que formula les preguntes més bàsiques i cerca les respostes més inesperades (CW6.539).
>
> Ens cal llibertat per pensar i intercanviar idees sense la por d'una Inquisició o dels seus equivalents moderns. Necessitem educació i llibres on aprendre quin és el llegat del passat. Ens calen recursos per fer les nostres tasques i un entorn intel·lectual ric, si hem d'assolir plenament el nostre potencial. A canvi, hem d'aportar la nostra contribució a la societat: a la seva cultura, a la seva ciència i a la seva economia (CW6.670).

Atiyah tampoc no ha defugit assumir compromisos de gran importància en les relacions internacionals, com ara la presidència de les Conferències Pugwash sobre Ciència i Afers Mundials (1997-2002).[34] També va contribuir a la

34 L'objecte d'aquestes conferències és buscar solucions per a les amenaces a la pau i la seguretat globals i treballar per reduir el perill de conflictes armats. Van ser fundades per Joseph Rotblat (1908-2005) i Bertrand Russell (1872-1970) a Pugwash (Nova Escòcia, Canadà) el 1957, seguint el solc obert pel manifest Einstein–Russell del 1955 a favor del desarmament nuclear. Rotblat i les Conferències Pugwash van compartir el Premi Nobel de la Pau del 1995 «pels seus esforços dirigits a disminuir el paper de les armes nuclears en la política internacional i, a la llarga, a eliminar-les del tot» (citació del Nobel). L'extraordinària història de Joseph Rotblat, un físic britànic d'origen polonès, ara es pot reviure amb la pel·lícula *The strangest dream*, d'Eric Bednarski (National Film Board of Canada, 2008, http://films.nfb.ca/strangest-dream/).

fundació de l'*InterAcademy Panel on International Issues* (IAP)[35] i de l'Associació d'Acadèmies Europees (ALLEA). Com ja hem assenyalat anteriorment, també va contribuir decisivament a la creació de l'EMS.

En contrapartida a les diverses apreciacions d'Atiyah, especialment sobre persones, podem considerar les percepcions que tenen d'Atiyah altres personalitats altament qualificades. N'hem trobat ja algunes, molt particularment les de Witten, que, al nostre entendre, expressen opinions àmpliament compartides. Una aportació complementària prové dels testimonis dels seus estudiants[36] i col·laboradors; per brevetat n'hi haurà prou esmentar-ne una que es pot considerar molt representativa. És la de George Lustig (n. 1946),[37] que, en el volum dedicat a Atiyah amb motiu del seu setantè aniversari, deixà escrit que «no només és un gran matemàtic i un gran mestre, sinó també un ésser humà d'una extraordinària generositat».[38]

Michael Atiyah segueix actiu, amb un esperit sorprenentment jove, tant en recerca com en molts altres compromisos.[39] En un dels projectes col·labora amb el distingit neurobiòleg Semir Zeki en estudis sobre el cervell humà, especialment quan realitza tasques matemàtiques. Per exemple, en un article publicat el 2008 trobem que «els resultats mostren que en el cervell existeix un sistema d'abstracció per detectar irregularitats temporals, independentment de la font que les ha originat».[40] També dedica una part del seu temps a escriure articles de reflexió, sovint en forma de recensions de llibres. Una mostra n'és l'article «Thoughts of a matematician»,[41] en què comenta tres llibres recents sobre la ment matemàtica i la seva natura. Oportunament, un parell de frases d'aquest article són molt apropiades per posar punt final a aquest treball:

> Els matemàtics ens veiem a nosaltres mateixos com a artistes creatius, guiats per consideracions d'elegància i bellesa. No s'arriba a noves visions per manipulacions formals, sinó mitjançant idees, i les idees originals no poden ser fabricades a la carta.

35 Una xarxa global de més de cent acadèmies nacionals fundada el 1993. Acull membres de tots els nivells de desenvolupament econòmic i el seu propòsit és ajudar les acadèmies que en són membres a orientar el públic sobre els aspectes científics de temes globals crítics (http://www.interacademies.net/).

36 En aquest escrit ja n'hem esmentat uns quants (l'any entre parèntesis és el de la lectura de la tesi): Rolph Schwarzenberger (1960), Peter Newstead (1966), Graeme B. Segal (1967), George Lustig (1971), Nigel Hitchin (1972), Simon Donaldson (1983) i Francis Kirwan (1984), però la llista completa seria molt més llarga.

37 Doctorat a la Universitat de Princeton el 1971, supervisat per Atiyah i William Brower, amb la tesi *Novikov's higher signature and families of elliptic operators.*

38 G. Lustig, «Recollections about my teacher, Michael Atiyah», *Asian J. Math.*, 3 (1) (1999), lv-lvi. Aquest mateix volum conté també eloqüents apreciacions personals de G. B. Segal, R. Bott i S. Donaldson, entre d'altres.

39 El llibre [6] inclou una llista de 252 publicacions, agrupades per anys, des del 1952 fins al 2008 (p. 151–163). A més dels treballs apareguts a partir del 2004, l'any de la publicació de CW6, també inclou materials publicats anteriorment i no inclosos a CW.

40 S. Zeki *et al.*, «The encoding of temporally irregular and regular visual patterns in the human brain», *PLoS ONE*, 3(5) (2008), 1–6.

41 *Brain*, 131 (2008), 1156–1160.

12 Racó matemàtic

L'ús d'aquesta secció queda subordinat, en principi, al text de les seccions precedents, que usen els punters a aquest racó com un mecanisme d'accés opcional a material més especialitzat.

Consta de vuitanta-sis articles numerats, que hem agrupat en dos blocs: glossari (articles ▷ **1** a ▷ **28**) i comentaris (▷ **29** a ▷ **86**). L'article ▷ **0** al principi del glossari és una introducció a les convencions i notacions que hem adoptat.

Cada article dels comentaris conté una o més referències completes a treballs d'Atiyah i gairebé sempre s'inclouen comentaris més especialitzats que els generals fets en el context que hi remet. Aquests comentaris sovint inclouen citacions, que delimitem amb cometes baixes. Com hem dit en la presentació (en els aclariments), al final de cada citació se n'indica la procedència, entre parèntesis, llevat en el cas, que és el més freqüent, de les extretes del text d'Atiyah inclòs com a presentació del volum dels seus *Collected Works* al qual pertanyen els treballs considerats.

Els articles del glossari són introduccions breus a alguns dels temes que generalment no formen part de matèries obligatòries d'una llicenciatura de matemàtiques. A més de fixar notacions, la raó per a la seva inclusió ha estat reduir substancialment les referències a la bibliografia i augmentar així la fluïdesa de la lectura. Atès, però, que no ens va semblar viable aconseguir un glossari raonablement complet, a [9] s'han inclòs dades d'alguns textos que poden servir com a referències a tal efecte i a les quals remetem en els llocs oportuns.

Glossari

► **0.** Algunes notacions i convencions. Per als propòsits d'aquest article, convindrem, si no es diu explícitament el contrari, que les *varietats diferenciables* són de classe C^∞ i compactes, i entendrem que el terme *varietat*, sense més qualificacions, vol dir *varietat diferenciable*. Per indicar que una varietat V té dimensió n, escriurem V_n.

Les *varietats analítiques*, reals o complexes, també se suposen compactes. De les varietats analítiques reals (complexes), en direm simplement *varietats analítiques* (*varietats complexes* o *holomorfes*). Si V és una varietat holomorfa (no necessàriament compacta) de dimensió n, posem V^r per denotar la corresponent *varietat diferenciable*, de manera que V^r és orientada i té dimensió $2n$. Així doncs, V_n és la notació que convé quan pensem V com a varietat complexa i V^r_{2n}, quan la mirem com una varietat real.

Els espais projectius reals, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, són varietats analítiques i els complexos, $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, són varietats holomorfes.

► **1.** Varietats algebraiques. Diem que una varietat holomorfa V_n és *algebraica* si admet una immersió analítica en un $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ (l'espai projectiu complex) per a algun N. Com que les varietats projectives no singulars (o llises) de $\mathbb{P}_N$ són òbviament varietats algebraiques, i el recíproc també és cert per a un teorema clàssic de W. L. Chow (1949), resulta que les varietats algebraiques coincideixen amb les (isomorfes a) varietats projectives complexes no singulars.

► **2.** Varietats riemannianes. Una *varietat riemanniana* és una varietat diferenciable provista d'una *mètrica riemanniana*, és a dir, un producte escalar bilineal simètric $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ definit positiu a T_pV per a tot $p \in V$ i que depèn diferenciablement de p.

► **3.** Formes diferencials. L'espai vectorial de les p-formes sobre un obert U d'una varietat V es denota $\Lambda^p(U)$ en el cas diferenciable, $A^p(U)$ en el cas analític real i $\Omega^p(U)$ en el cas holomorf. Més en general, si E és un fibrat vectorial sobre V, les p-formes definides sobre U en valors en E es denoten $\Lambda^p(U,E)$ en el cas diferenciable, $A^p(U,E)$ en el cas analític real i $\Omega^p(U,E)$ en el cas holomorf. El llibre [9-*a*4], capítol I, proporciona una excel·lent introducció a aquestes qüestions (varietats i fibrats vectorials) i també a les varietats quasi complexes (I, § 3).

► **4.** Cohomologia. A l'anell (graduat) de la cohomologia d'una varietat V a coeficients en un anell Λ (commutatiu amb unitat) el denotarem $H^*(V,\Lambda)$. La seva component de grau j és $H^j(V,\Lambda)$, el j-èsim grup de cohomologia de V a coeficients en Λ. En el cas $\Lambda = \mathbb{Z}$, ens permetem escriure $H^*(V)$ i $H^j(V)$ en lloc de $H^*(V,\mathbb{Z})$ i $H^j(V,\mathbb{Z})$. A tota subvarietat W de codimensió j de V li correspon una classe $cl(W) \in H^j(V,\Lambda)$. Adonem-nos que si V és holomorfa i W és una subvarietat holomorfa de codimensió j, llavors $cl(W) \in H^{2j}(V,\Lambda)$, ja que la codimensió real de W és $2j$.[42] Per exemple, si H és un hiperplà de l'espai projectiu complex $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, llavors $h = cl(H) \in H^2(\mathbb{P}_n)$, i és un fet que $H^{2j}(\mathbb{P}_n)$ és cíclic infinit generat per h^j si $0 \le j \le n$, mentre que tots els altres grups de cohomologia de $\mathbb{P}_n$ són nuls.

► **5.** Teoria de Hodge. La teoria de les formes harmòniques es pot trobar a [9-*a*1]. Repassem-ne els trets essencials. En una varietat riemanniana orientada V de dimensió n, hi ha l'*operador de Hodge* $* : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{n-p}(V)$ que satisfà $** = (-1)^{p(n-p)}$. Aleshores, es defineix $\delta : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{p-1}(V)$ per la fórmula $\delta = (-1)^{np+n+1} * d*$ (*codiferencial*), on $d : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{p+1}(V)$ és la diferencial exterior, i $\Delta : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V)$ (*laplaciana* de V) per la relació $\Delta = \delta d + d\delta$. Les formes *harmòniques* de grau p són les p-formes anul·lades per Δ. Formen un espai vectorial $\mathcal{H}^p(V)$ que resulta isomorf a l'espai $H^p_{\mathrm{dR}}(V)$ de la cohomologia de De Rham de grau p, és a dir, $Z^p(V)/d\Lambda^{p-1}(V)$, on $Z^p(V)$ és el nucli de la diferencial $d : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{p+1}(V)$. L'isomorfisme és induït per la inclusió $\mathcal{H}^p(V) \subset Z^p(V)$. També es compleix que una p-forma α és harmònica si i només si $d\alpha = d(*\alpha) = 0$, de manera que la teoria de Hodge és una certa generalització de les equacions de Maxwell (▷ **26**).

► **6.** Gènere geomètric i gènere aritmètic. Donada una varietat algebraica $V = V_n$, posarem Ω^k ($k = 0, 1, \ldots, n$) per denotar el fibrat vectorial (o el feix localment lliure) de les k-formes holomorfes de V, de manera que l'es-

42 Per a una varietat holomorfa V, $H^*(V,\Lambda)$ és, per definició, $H^*(V^r,\Lambda)$.

pai de les seves seccions globals, $H^0(V,\Omega^k)$, és l'espai de les k-formes holomorfes sobre tot V.[43] La dimensió d'aquest espai, $h^0(V,\Omega^k)$ en notació estàndard, també serà denotada $g_k(V)$. Notem que $g_0(V)$ és el nombre de components connexes de V, ja que una funció holomorfa definida en tota una varietat compacta i connexa és constant (teorema de Liouville). De $p_g(V) = g_n(V)$, se'n diu *gènere geomètric* de V. És multiplicatiu, en el sentit que $p_g(V\times V') = p_g(V)p_g(V')$. El nombre $p_a(V) = g_n - g_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}g_1$ s'anomena *gènere aritmètic.* També es té que $g_k(V) = h^k(V,\Omega^0)$, ja que en general $H^q(V,\Omega^p) \simeq H^{n-q}(V,\Omega^{n-p})$ (per teoria de Hodge o pel teorema de dualitat de Serre) i, per tant, $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$, amb $h^{p,q} = \dim H^q(V,\Omega^p)$. Així doncs, $g_0 + (-1)^n p_a(V) = g_0 - g_1 + \cdots + (-1)^n g_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k h^k(V,\Omega^0) = \chi(\mathcal{O}_V)$, la característica d'Euler–Poincaré de $\mathcal{O}_V$. Si V és connexa, això ens dóna que $p_a(V) = (-1)^n(\chi(\mathcal{O}_V) - 1)$. Adonem-nos que aquesta fórmula ens dóna que $\mathcal{O}_V$ és un invariant biracional, ja que $p_a(V)$ ho és.

► 7. Funció de Hilbert. Si $V = V_n \subset \mathbb{P}_N$, sigui $I(V)$ l'ideal de

$$A_N = \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_N]$$

generat pels polinomis homogenis que s'anul·len sobre V i $S(V) = A_N/I(V)$. Com que $I(V)$ és un ideal homogeni, $S(V)$ és una $\mathbb{C}$-àlgebra graduada, $S(V) = \oplus_{k\geq 0} S(V)_k$, de la qual en diem *anell de coordenades homogènies* de V. Si mirem $h_V(k) = \dim_{\mathbb{C}} S(V)_k$ com a funció de k (*funció de Hilbert* de V), resulta que és polinòmica en k per a $k \gg 0$, és a dir, existeix un polinomi P_V univariat de grau n (*polinomi de Hilbert* de V) tal que $h_V(k) = P_V(k)$ per a tot k prou gran. Aquest polinomi P_V admet una senzilla descripció cohomològica, ja que $S(V)_k$ s'identifica a les seccions globals del fibrat de línia $H^{\otimes k}$, on H és la restricció a V del dual del fibrat tautològic de $\mathbb{P}_n$, de manera que $h_V(k) = h^0(V, H^{\otimes k})$. Però, per a $k \gg 0$, $h^p(V, H^{\otimes k}) = 0$ per a tot $p > 0$ (Serre), de manera que en realitat $h_V(k) = \chi(V, H^{\otimes k})$ per a $k \gg 0$, i com que $\chi(V, H^{\otimes k})$ és, com a funció de k, un polinomi en k per a tot k, finalment podem concloure que $P_V(k) = \chi(V, H^{\otimes k})$ per a tot k. En particular, obtenim la relació $P_V(0) = \chi(\mathcal{O}_V)$, que demostra que $P_V(0)$, que, en principi, només és un nombre racional, és, de fet, enter. A més, $p_a(V) = (-1)^n(P_V(0) - 1)$ si V és connexa (▷ **6**).

► 8. Classes de Chern. Donat un fibrat vectorial *complex* E sobre una varietat V, la seva *classe total de Chern* ([9-*b*4], § 14) té la forma $c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E) \in H^{2*}(V,\mathbb{Z})$ on r és el rang de E (r és la dimensió de qualsevol fibra de E) i $c_j(E) \in H^{2j}(V,\mathbb{Z})$ (j-èsima classe de Chern de E). Aquesta classe compleix que $c(E \oplus E') = c(E) \cdot c(E')$ (*fórmula de Whitney* per a la classe total de Chern). Per exemple, si L és un fibrat de rang 1, llavors $c(L) = 1 + x$, on $x = c_1(L) \in H^2(V,\mathbb{Z})$. També és important recordar que si L i L' són fibrats complexos de rang 1, llavors $c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$.

Si $L_1, \ldots, L_r$ són fibrats de rang 1 i $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, llavors la fórmula de Whitney ens dóna $c(E) = (1 + x_1)\cdots(1 + x_r)$, $x_i = c_1(L_i)$. En resulta que

43 Ω^0 és el fibrat trivial de rang 1, $V \times \mathbb{C}$, sovint denotat $\mathbf{1}_V$ o, simplement, $\mathbf{1}$. Vist com a feix localment lliure de rang 1 (com a feix invertible), és denotat $\mathcal{O}_V$.

$c_j(E) = \sigma_j(x_1, \ldots, x_r)$ (el j-èsim polinomi simètric elemental en $x_1, \ldots, x_r$). El *principi de descomposició* estipula que per treballar amb classes de Chern de fibrats no es perd generalitat, suposant que són suma directa de fibrats de rang 1, de manera que es pot suposar, donat un fibrat complex E de rang r, que existeixen elements auxiliars $x_1, \ldots, x_r$, dels quals en direm *arrels* de E, que compleixen $c(E) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_r)$ i, per tant, $c_j(E) = \sigma_j(x_1, \ldots, x_r)$.

Vegem-ne alguns exemples. Comencem per la determinació de les classes de Chern de $E \otimes E'$ en funció de les classes de Chern de E i de E'. Fem un cas molt concret que conté l'essència del procediment. Si les arrels de E són x_1 i x_2 (en particular E, té rang 2) i $x = c_1(L)$, on L té rang 1, llavors les arrels de $E \otimes L$ són $y_1 = x_1 + x$ i $y_2 = x_2 + x$, amb la qual cosa $c_1(E \otimes L) = y_1 + y_2 = c_1(E) + 2x$ i $c_2(E \otimes L) = y_1 \cdot y_2 = (x_1 + x)(x_2 + x) = c_2(E) + c_1(E)x + x^2$. Anàlogament, es té que $c_j(\bar{E}) = (-1)^j c_j(E)$, on $\bar{E}$ és el fibrat conjugat de E. En efecte, si L té rang 1, llavors $c_1(\bar{L}) = -c_1(L)$, ja que $\bar{L} \otimes L = \mathbf{1}_V$, amb la qual cosa les arrels de $\bar{E}$ són $-x_1, \ldots, -x_r$ si $x_1, \ldots, x_r$ són les arrels de E. Un segon exemple és el *caràcter de Chern* de E, $\mathrm{ch}(E)$, el qual es defineix expressant la funció simètrica $e^{x_1} + \cdots + e^{x_r}$ en termes dels $\sigma_j(x_1, \ldots, x_r)$, és a dir, com a funció de les classes de Chern $c_j(E)$. Fixem-nos que $\mathrm{ch}(E \oplus E') = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(E')$ i $\mathrm{ch}(E \otimes E') = \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{ch}(E')$.

Adonem-nos finalment que si E és un fibrat vectorial complex sobre $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, llavors l'isomorfisme $\mathbb{Z} \simeq H^{2j}(\mathbb{P}_n)$, donat per $n \mapsto nh^j$ (▷ **4**), ens permet identificar $c_j = c_j(E)$ amb un nombre enter.

► **9.** Classes de Pontrjagin. Sigui E un fibrat real de rang r sobre una varietat V i sigui $s = \lfloor r/2 \rfloor$. Les *classes de Pontrjagin* de E, $p_j(E) \in H^{4j}(V, \mathbb{Z})$, $j = 0, \ldots, s$, es defineixen per la fórmula $p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbb{C})$ ([9-*b*4], § 15). En el cas que E sigui orientat i $r = 2s$, les arrels de $E \otimes \mathbb{C}$ tenen la forma $x_1, -x_1, \ldots, x_s, -x_s$ i $c(E) = \prod_{i=0}^{i=s}(1 - x_i^2) = \sum_{j=0}^{j=s}(-1)^j \sigma_j(x_1^2, \ldots, x_s^2)$, la qual cosa ens diu que les classes de Chern d'ordre senar de $E \otimes \mathbb{C}$ són nul·les i que $p_j(E) = \sigma_j(x_1^2, \ldots, x_s^2)$.

► **10.** Classes de Hirzebruch. Sigui $q(x) = \sum_{i \geq 0} q_i x^i \in \mathbb{Q}[[x]]$ amb $q_0 = 1$. Siguin $x_1, x_2, \ldots, \ldots$ indeterminades. Per a cada nombre enter positiu n, el producte $q(x_1) \cdots q(x_n)$ és simètric respecte de $x_1, \ldots, x_n$ i, per tant, el podem escriure en la forma $1 + Q_1(\sigma_1) + Q_2(\sigma_1, \sigma_2) + \cdots + Q_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) + \cdots$, on els darrers $\cdots$ representen termes de grau $> n$ en les x_i i $\sigma_j = \sigma_j(x_1, \ldots, x_n)$. El polinomi Q_j ($j = 1, \ldots, n$) té grau j com a polinomi en les x_i i pes j com a polinomi en les σ_i (considerant que σ_i té pes i), i no és difícil veure que no depèn de n si $n \geq j$.

Sigui ara $H = \bigoplus_{i \geq 0} H^i$ una $\mathbb{Q}$-àlgebra commutativa graduada i $h = 1 + h_1 + h_2 + \cdots \in H$. Si posem $Q(h) = 1 + Q_1(h_1) + Q_2(h_1, h_2) + \cdots$, és fàcil comprovar, si $h' \in H$ també compleix $h'_0 = 1$, que $Q(hh') = Q(h)Q(h')$. En particular, està definit, si E és un fibrat complex sobre una varietat V, l'element $Q(E) = Q(c(E)) = 1 + Q_1(c_1) + Q_2(c_1, c_2) + \cdots \in H^{2*}(V, \mathbb{Q})$, on $c_j = c_j(E)$ (▷ **8**), i és clar que $Q(E \oplus E') = Q(E) \cdot Q(E')$. De $Q_n(E) \in H^{2n}(V, \mathbb{Q})$ en direm, la *q-classe de Hirzebruch* de E.

En el cas que V sigui holomorfa i $E = T_V$ (el fibrat tangent de V), parlarem de la *q-classe de Hirzebruch* de V i la denotarem $Q_n(V)$, és a dir, $Q_n(V) = Q_n(T_V)$. El *q-gènere* (de Hirzebruch) de V es defineix com $\int_V Q_n(V) \in \mathbb{Q}$ (posem $\int_V \alpha$, $\alpha \in H^{2n}(V, \mathbb{Q})$, per denotar el valor $\alpha[V]$ de α sobre el cicle fonamental $[V]$ de V).

► **11.** Classes de Todd. Donat un fibrat complex E sobre una varietat V, les td-classes de Hirzebruch (▷ **10**) $\mathrm{Td}_j(E)$ que corresponen a la sèrie

$$\mathrm{td}(x) = x/(1 - e^{-x}) = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}x^2 + \cdots$$

s'anomenen *classes de Todd* del fibrat E.

En el cas en què V és holomorfa i $E = T_V$, obtenim les classes de Todd de V, $\mathrm{Td}_j(V)$. El td-gènere de V, $\int_V \mathrm{Td}_n(V) \in \mathbb{Q}$, s'anomena *gènere de Todd* de V.

La sèrie td és l'única sèrie q per a la qual el q-gènere dels espais projectius és 1 (v. [11]), condició que és natural en el context del teorema de HRR (▷ **12**).

► **12.** Teoremes de HRR i GRR. El teorema de HRR afirma, per a qualsevol fibrat holomorf E sobre una varietat algebraica V, que

$$\chi(V, E) = \int_V \{\mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{Td}(X)\}_n.$$

En el cas particular que $E = \mathbf{1}_V$, ens dóna que el gènere de Todd, $\int_V \mathrm{Td}_n(V)$, coincideix amb $\chi(V, \mathcal{O}_V)$. Remarcablement, doncs, el gènere de Todd de V és un nombre enter. Aquesta fórmula implica que el gènere de Todd de $V = \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ ha de ser 1, ja que $\chi(V, \mathcal{O}_V) = 1$ (▷ **7**), i això explica l'elecció de la sèrie td per definir el gènere de Todd (▷ **11**).

El teorema de GRR estableix que si $f : Y \to X$ és un morfisme de varietats algebraiques llises, llavors

$$f_*(\mathrm{Td}(X) \cdot \mathrm{ch}(E)) = \mathrm{Td}(X) \cdot \mathrm{ch}(f_![E]) \text{ a } H^*(X, \mathbb{Q}),$$

on E és qualsevol fibrat algebraic (o holomorf, en el cas complex) sobre Y. L'aplicació $f_* : H^*(Y, \mathbb{Q}) \to H^*(X, \mathbb{Q})$ és l'aplicació dual de Poincaré de l'aplicació natural $f^* : H^*(X, \mathbb{Q}) \to H^*(Y, \mathbb{Q})$, $[E] \in K(X)$ és la classe de E i $f_! : K(Y) \to K(X)$ és l'homomorfisme «admirable» de Grothendieck, és a dir, $f_![E] = \sum_{j \geq 0} (-1)^j [R^j f_*(E)]$, on $R^j f_* E$ són les imatges directes superiors de E (considerat com a feix coherent sobre Y). El teorema de GRR generalitza significativament el teorema de HRR (és fàcil veure que el teorema de GRR es redueix al teorema de HRR sobre Y prenent com a X un punt).

► **13.** Integritat del gènere de Todd. El gènere de Todd és un enter per a varietats algebraiques (▷ **12**). La definició d'aquest gènere té sentit per a varietats quasi complexes (pel fet de tenir el seu espai tangent una estructura complexa), i una de les conseqüències interessants de la versió diferenciable del teorema de GRR (▷ **35**) és que per a aquestes varietats també és un nombre enter.

► **14.** $\hat{A}$-gènere. Si E és un fibrat vectorial orientat de rang $r = 2s$ sobre una varietat V i $x_1, \ldots, x_s$ són els símbols (▷ **9**) tals que $p_j(E) = \sigma_j(x_1^2, \ldots, x_s^2)$, es defineix la classe

$$\hat{A}(E) = \prod_{i=1}^{i=s} \frac{x_i/2}{\sinh x_i/2} = 1 + \hat{A}_1(E) + \cdots + \hat{A}_s(E) \in H^{4*}(V, \mathbb{Q}),$$

on $\hat{A}_j(E)$ és un polinomi de pes j en les classes de Pontrjagin $p_1(E), \ldots, p_s(E)$.

Si V és una varietat orientada de dimensió n, l'$\hat{A}$-gènere de V és 0 si n no és múltiple de 4 i és el nombre racional $\hat{A}(V)$ definit per l'expressió $\int_V \hat{A}_k(T_V)$ si $n = 4k$.

► **15.** Classes de Stiefel–Whitney. Si E és un fibrat vectorial continu de rang r sobre un espai topològic B, existeixen $w_i(E) \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \ldots, r$, que són naturals respecte d'homomorfismes de fibrats i compleixen la fórmula de Whitney $w(E \oplus E') = w(E) \cdot w(E')$, on $w(E) = 1 + w_1(E) + \cdots + w_r(E) \in H^*(X, \mathbb{Z}_2)$. Si convenim a posar $w_0(E) = 1$ i $w_i(E) = 0$ per a tot $i > r$, llavors $w(E) = \sum_i w_i(E)$. Referència: [9-*b*4].

► **16.** Varietats espinorials. Es diu que una varietat V és *espinorial* si és orientable i $w_2(V) = 0$, on $w_2(V) \in H^2(V, \mathbb{Z}_2)$ és la segona classe de Stiefel-Whitney de V (▷ **15**). Recordem que V és *orientable* si i només si $w_1(V) = 0$.

Per a la significació geomètrica de les varietats espinorials, vegeu [13]. Un resultat fonamental d'Atiyah i Hirzebruch és que l'$\hat{A}$-gènere (▷ **14**) és un nombre enter (▷ **35**),

► **17.** L-gènere. Si E és un fibrat vectorial orientat de rang $r = 2s$ sobre una varietat V i $x_1, \ldots, x_s$ són els símbols (▷ **9**) tals que $p_j(E) = \sigma_j(x_1^2, \ldots, x_s^2)$, es defineix la classe

$$L(E) = \prod_{i=1}^{i=s} \frac{x_i/2}{\tanh x_i/2} = 1 + L_1(E) + \cdots + L_s(E) \in H^{4*}(V, \mathbb{Q}),$$

on $L_j(E)$ és un polinomi de pes j en les classes de Pontrjagin $p_1(E), \ldots, p_s(E)$.

Si V és una varietat orientada de dimensió n, l'L-gènere de V és 0 si n no és múltiple de 4 i és el nombre racional $L(V)$ definit per l'expressió $\int_V L_k(T_V)$ si $n = 4k$.

► **18.** Signatura d'una varietat. La *signatura* $\sigma(V)$ d'una varietat orientada V_n es defineix de la manera següent: és 0 si n no és múltiple de 4 i és la signatura de la forma bilineal $H^{2k}(V, \mathbb{Z}) \times H^{2k}(V, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ donada per $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_V \alpha \cdot \beta$ si $n = 4k$.

► **19.** Àlgebra de Clifford. Si V és un K-espai vectorial de dimensió finita, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, dotat d'una mètrica g, l'*àlgebra de Clifford* de (V, g), $\mathrm{Cl}(V, g)$, és la K-àlgebra generada per V i sotmesa a les relacions $xy + yx = 2g(x, y)$, $x, y \in V$. Adonem-nos que aquestes relacions es poden també formular dient que x i y anticommuten quan són perpendiculars i commuten quan són proporcionals (paral·lels). Fixem-nos també que $x^2 = g(x, x)$ per a tot $x \in V$. Si $e_1, \ldots, e_n$ és una base ortonormal de V (en el cas real, i a fi de poder considerar mètriques de qualsevol signatura, es diu que un vector e és *unitari* si

$g(e,e) = \pm 1$), $\mathrm{Cl}(V,g)$ és la K-àlgebra generada per $e_1,\dots,e_n$ amb les relacions

$$g(e_j,e_j) = \varepsilon_j, \quad e_je_k = -e_ke_j \quad \text{si } j \neq k,$$

on $\varepsilon_j = g(e_j,e_j) = \pm 1$.

► **20.** Representacions espinorials. Donat un espai vectorial complex V de dimensió finita dotat d'una mètrica g no degenerada, s'anomenen *representacions espinorials* les representacions lineals irreductibles del grup $\mathrm{Spin}(V,g)$, el recobridor universal del grup ortogonal especial $\mathrm{SO}(V,g)$, que no provenen de les representacions lineals irreductibles de $\mathrm{SO}(V,g)$. Mentre que aquestes es construeixen mitjançant operacions tensorials sobre V, les representacions espinorials es construeixen mitjançant l'*àlgebra de Clifford* (▷ **19**) de (V,g). Referències: CW2[39] (▷ **42**), [9-*c*3], [13].

► **21.** L'*operador de Dirac* d'un espai vectorial real V de dimensió finita n, dotat d'una mètrica no degenerada g, es defineix per la fórmula

$$D = \sum_{j=1}^{n} e_j\partial_j,$$

on $e_1,\dots,e_n$ és una base ortonormal de V (▷ **19**) i $\partial_j = \partial/\partial x_j$, i $x_1,\dots,x_n$ les coordenades de V corresponents a la base $e_1,\dots,e_n$. La propietat bàsica de D és que el seu quadrat (en el sentit de l'àlgebra de Clifford) és la laplaciana de g:

$$D^2 = \Delta_g,$$

on $\Delta_g = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\partial_j^2$, amb $\varepsilon = g(e_j,e_j) = \pm 1$. Referències: [13].

► **22.** Si $x_1,\dots,x_n$ són coordenades locals d'una varietat V, un *operador diferencial* té la forma $P = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, on α denota una seqüència $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ de nombres enters no negatius, $|\alpha| = \sum \alpha_j$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ ($\partial_j = \partial/\partial_{x_j}$) i $a_\alpha(x)$ són funcions diferenciables de $x = (x_1,\dots,x_n)$. Es diu que P és el·líptic d'ordre k si $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ per a tot $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Si P actua sobre funcions vectorials de r components, de manera que aleshores $a_\alpha(x)$ són matrius quadrades $r\times r$ de funcions diferenciables, la condició per dir que P és el·líptic és que el determinant del *símbol*

$$\sigma_P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

sigui no nul per a tot $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Aquestes definicions es poden generalitzar immediatament per definir operadors diferencials (el·líptics) $P : C^\infty(V,E) \to C^\infty(V,F)$, on E i F són fibrats vectorials diferenciables de rang r sobre V i on $C^\infty(V,E)$ ($C^\infty(V,F)$) denota les seccions diferenciables globals de E (de F). En aquestes condicions, resulta que $\ker P$ té dimensió finita, diguem-ne p, i que l'equació $Pu = v$ té solució si i només si v satisfà un nombre finit, diguem-ne p^*, de relacions lineals. La diferència $p - p^*$ s'anomena l'*índex* de P i es denota $\mathrm{index}(P)$. Si hi introduïm mètriques apropiades, podem formar l'operador adjunt P^*, i aleshores p^* és la dimensió de $\ker(P^*)$, és a dir,

$$\mathrm{index}(P) = \dim(\ker P) - \dim(\ker P^*).$$

► **23.** Espais lenticulars. Donats nombres enters positius $p, q_1, \ldots, q_n$, amb p primer i els q_j no divisibles per p, l'*espai lenticular* $L(p; q_1, \ldots, q_n)$ es defineix com el quocient de l'esfera $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ per l'acció del grup $\{1, \xi, \ldots, \xi^{p-1}\}$ ($\xi \in U(1)$, $\xi \neq 1$, $\xi^p = 1$) definida per $\xi \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (\xi^{q_1} z_1, \ldots, \xi^{q_n} z_n)$. Els espais $L(p, q) = L(p; 1, q)$ tenen dimensió 3 i van ser introduïts per Tietze l'any 1908. Van proporcionar els primers exemples de varietats no homeomorfes amb el mateix grup fonamental i la mateixa homologia. També hi ha exemples d'espais lenticulars no homeomorfs que tenen el mateix tipus d'homotopia (i, per tant, amb el mateix grup fonamental i la mateixa homologia).

L'espai lenticular $L(p, q)$ és la 3-varietat obtinguda enganxant les vores de dos tors sòlids per un (p, q)-homeomorfisme, és a dir, un homeomorfisme que transforma un meridià del primer en una corba del segon que té p meridians i q paral·lels.

► **24.** Simetries *gauge*. Considerem primer l'origen de l'expressió *invariància gauge* (*gauge invariance* en anglès, *invariance de jauge* en francès).[44] Prové d'*Eichinvarianz*, la paraula alemanya forjada el 1918 per Hermann Weyl en la seva recerca d'una teoria unificada de la relativitat general d'Einstein i l'electromagnetisme de Maxwell, amb el verb *eichen* ('galgar', 'calibrar', 'contrastar') com a arrel.[45] En termes generals, s'usa per indicar que les lleis d'una teoria romanen inalterades per canvis *locals* d'una determinada espècie efectuats en objectes bàsics de la teoria. D'aquests canvis locals, és costum dir-ne transformacions o simetries *gauge*, i *fixar el gauge* és escollir una determinació concreta dels esmentats objectes.

Una il·lustració típica prové de la indeterminació dels potencials escalar i vector del camp electromagnètic clàssic: si ϕ i A denoten aquests potencials, llavors, per definició, $E = -\nabla\phi - \partial_t A$ (camp elèctric) i $B = \nabla \times A$ (camp magnètic), i la indeterminació en qüestió es pot expressar dient que E i B no canvien si fem les transformacions $\phi \mapsto \phi - \partial_t f$ i $A \mapsto A + \nabla f$, on $f = f(x, y, z, t)$ és una funció arbitrària.[46] Donats E i B, fixar el *gauge* vol dir escollir ϕ i A que compleixin $E = -\nabla\phi - \partial_t A$ i $B = \nabla \times A$. Les transformacions de *gauge* actuen sobre els potencials i tenen la forma $(\phi, A) \mapsto (\phi - \partial_t f, A + \nabla f)$, on f és una funció arbitrària.

Hi ha una altra simetria *gauge* de l'electromagnetisme, precisament la que Yang i Mills van usar com a patró de la seva teoria. Considerem una càrrega elemental e que es mou en un camp electromagnètic. En la teoria quàntica no relativista, e té associada una funció d'ones $\psi = \psi(x, y, z, t)$, amb valors complexos, però les magnituds físicament observables relatives a e només depenen de $|\psi|^2$. En particular, resulta que la transformació $\psi \mapsto \psi' = e^{ief}\psi$,

44 En la parla en català dels físics s'ha adoptat, a més de la grafia anglesa *gauge*, la seva pronúncia *guéitx*. El *jauge* francès es pronuncia *jodx*.

45 H. Weyl «Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsber. Königlich Preuss. Akad. Wiss.*, 26, 465–480.

46 Adonem-nos que $\nabla \times (A + \nabla f) = \nabla \times A = B$, ja que el rotacional d'un gradient és 0, i que $-\nabla(\phi - \partial_t f) - \partial_t(A + \nabla f) = -\nabla\phi - d_t A = E$, atès que $\nabla\partial_t = \partial_t\nabla$.

on $f = f(x, y, z, t)$ és una funció arbitrària, és una simetria *gauge* de la teoria, ja que $|\psi'|^2 = |\psi|^2$. En aquest cas, $g = e^{ief}$ és una funció amb valors en el grup $U(1)$ dels nombres complexos de mòdul unitat, i és per això que $U(1)$ es coneix com el *grup de gauge*.

► **25.** Simetria *gauge* de l'espín isotòpic. En la teoria quàntica de l'espín (moment magnètic intrínsec) d'un electró, proposada per Wolfgang Pauli (1900-1958) el 1924, la funció d'ones ψ pren valors a $\mathbb{C}^2$, l'espai que representa els possibles estats interns de l'electró (la dimensió 2 correspon al fet que en mesurar l'espín d'un electró, només es poden donar dos valors).

La teoria de Yang–Mills de l'espín isotòpic (o *isobàric*, més pròpiament), també dit *isospín*,[47] parteix de la idea que, des del punt de vista de la força nuclear forta, només hi ha un nucleó i que la divisió dels nucleons en protons i neutrons reflecteix el fet que l'espai d'estats interns d'un nucleó, pel que fa a la força nuclear forta, també és $\mathbb{C}^2$. D'aquesta manera, la funció d'ones ψ d'un nucleó també pren valors a $\mathbb{C}^2$.

En l'article de Yang i Mills citat a la nota 47 recorden (p. 192) la invariància *gauge* de l'electromagnetisme per a canvis de fase $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ i hi afegeixen: «Proposem, doncs, que tots els processos físics (en què no intervé l'electromagnetisme) siguin invariants per a *transformacions de gauge isotòpiques* [la cursiva és nostra], $\psi \to \psi'$, $\psi' = S^{-1}\psi$, on S representa una rotació de l'espín isotòpic dependent de l'espaitemps», és a dir, una aplicació diferenciable arbitrària S de la varietat espaitemps M en el grup $\mathrm{SU}(2)$.

Per a l'equació que regeix l'evolució de l'espín isotòpic (equació de Yang–Mills), vegeu l'article que segueix.

► **26.** Teoria de Yang–Mills geomètrica. Considerem una varietat semiriemanniana M, com per exemple l'espai de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, o l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$, que sovint es pensa com la transformació de $\mathbb{R}^{1,3}$ per a la substitució $\tau = it$ (d'això se'n sol dir *rotació de Wick*). Sigui G un *grup de gauge*, és a dir, un grup de Lie compacte (com ara $\mathrm{SU}(2)$, en el cas de la teoria de Yang–Mills original, o, simplement, $U(1)$, en el cas de l'electromagnetisme), i $P \to M$ un G-fibrat principal. Si $\mathfrak{g}$ és l'àlgebra de Lie de G i $v \in \mathfrak{g}$, posarem $\hat{v}$ per denotar el camp vectorial sobre P associat a v (per definició, $\hat{v}_p$ és, per a tot $p \in P$, el vector tangent a la corba $t \mapsto p\exp(tv)$ en el punt p).

En la forma geomètrica de la teoria de Yang–Mills sobre M, es consideren *connexions* $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}) = \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ (o *potencials gauge*, en la terminologia física), és a dir, 1-formes de P a valors $\mathfrak{g}$ tals que $\omega(\hat{v}_p) = v$ per a tot $v \in \mathfrak{g}$, $p \in P$, i $R_g^*\omega = \mathrm{ad}_{g^{-1}}\omega$, on $R_g : P \to P$ és el difeomorfisme $p \mapsto pg$ i $\mathrm{ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ la representació adjunta ($\mathrm{ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ és la diferencial en el punt $e \in G$ (l'element neutre) del difeomorfisme de conjugació $\mathrm{Ad}_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$). Cada connexió té associada una *derivada covariant* d^ω i una forma de *curvatura* $F = d^\omega\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ (*camp gauge*, o de Yang–Mills, associat al potencial *gauge* ω).

47 C. N. Yang i R. L. Mills «Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance», *Phys. Rev.*, 96 (1) (1954), 191–195.

En dimensió 4, l'*equació de Yang–Mills autodual* (antidual) és $*F = F$ ($*F = F$), on $*$ és l'operador de Hodge de M. Les solucions de $*F = \pm F$ s'anomenen *instantons* (i també, en una terminologia ja poc usada, *pseudopartícules*). En termes del potencial, $*F = \pm F$ són equacions en derivades parcials de primer ordre no lineals i el seu sentit físic prové del fet que donen solucions de les *equacions de Yang–Mills*

$$d^{\omega}(*F) = 0$$

obtingudes com a equacions d'Euler–Lagrange corresponents a la densitat lagrangiana $\|F\|^2$ (ja que es compleix la identitat de Bianchi $d^{\omega}F = 0$).

Atès que l'àlgebra de Lie de $U(1)$ és $i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, en el cas de l'electromagnetisme podem prendre

$$\omega = A_0 dx^0 + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 \in \Omega^1(M), \quad A_0 = \phi/c$$

com a potencial *gauge*, on ϕ i $A = (A_1, A_2, A_3)$ són els potencials escalar i vector, respectivament, i on $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$ són coordenades ortonormals de l'espai de Minkowski. El corresponent camp *gauge* $F = d\omega$ resulta

$$dx^0 \wedge (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

on $E = (E_1, E_2, E_3)$ i $B = (B_1, B_2, B_3)$ són el camp elèctric i el camp magnètic, respectivament. Ara, la identitat de Bianchi $d^{\omega}F = 0$ equival a les dues equacions homogènies de Maxwell ($\nabla \cdot B = 0$ i $\nabla \times E + \partial_t B = 0$) i l'equació de Yang–Mills $d^{\omega}(*F) = 0$ equival a les altres dues equacions de Maxwell en el buit ($\mathrm{div}(E) = 0$ i $\nabla \times B = c^{-2}\partial_t E$).

En cas d'haver-hi una densitat de càrrega ρ i, per tant, un camp vectorial de corrent $J = (J_1, J_2, J_3)$ (és el producte de ρ pel camp de velocitats), les dues darreres equacions s'escriuen $\mathrm{div}(E) = \rho/\varepsilon_0$ i $\nabla \times B = \mu_0 J + c^{-2}\partial_t E$, i es pot veure que equivalen a l'equació $\delta^{\omega}F = -j$, on $j = \mu_0(J_0 dx^0 + J_1 dx^1 + J_2 dx^2 + J_3 dx^3)$, $J_0 = -c\rho$ i $\delta^{\omega} = * d^{\omega} *$. Aquesta equació també entra en el marc de la teoria de Yang–Mills geomètrica, estesa amb les nocions de camps de matèria i les formes de corrent associades. Si $\lambda : G \to \mathrm{GL}(V)$ és una representació lineal de G, un camp de matèria de tipus λ és una aplicació $\psi : P \to V$ tal que $\psi(pg) = g^{-1}\psi(p)$. Els *camps de Higgs*, per exemple, s'obtenen quan $V = \mathfrak{g}$ i λ és la representació adjunta. Un altre exemple són els *camps fermiònics* d'espín $1/2$, que s'obtenen en el cas $G = \mathrm{SU}(2)$ i amb λ la representació ordinària a $\mathbb{C}^2$ (se sol denotar $D^{1/2,0}$) o la seva dual, $D^{0,1/2}$. Per a més detalls sobre les qüestions tractades en aquest article, vegeu [9-d1] (l'equació no homogènia general s'estableix en el teorema 5.2.3).

► **27.** Amb les notacions de ▷ **26**, les equacions de Bogomolny a $\mathbb{R}^3$ són $\nabla\phi = *F$, on ϕ és un camp de Higgs, i les seves solucions s'anomenen *monopols*.

► **28.** Una varietat *simplèctica* és una varietat (no necessàriament compacta) de dimensió parell, M_{2n}, dotada d'una 2-forma ω tancada ($d\omega = 0$) i de rang n ($\omega^{\wedge n}$ és no nul·la arreu). Aquestes condicions equivalen a dir que existeix, en l'entorn de qualsevol punt, un sistema de coordenades $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

(*coordenades simplèctiques*) respecte del qual

$$\omega = dy_1 \wedge dx_1 + \cdots + dy_n \wedge dx_n.$$

Donada una funció diferenciable f definida sobre un obert $U \subseteq M$, posarem v_f per denotar el camp vectorial definit per la relació $\omega(v_f, w) = df(w)$, on w és un camp arbitrari definit sobre U. En termes de coordenades simplèctiques,

$$v_f = \partial'_1 f\,\partial_1 + \cdots + \partial'_n f\,\partial_n - \partial_1 f\,\partial'_1 - \cdots - \partial_n f\,\partial'_n,$$

on hem posat, per abreujar notacions, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ i $\partial'_j = \partial/\partial y_j$. Una aplicació diferenciable $f : M \to M'$ entre dues varietats simplèctiques es diu que és *simplèctica* si $f^*\omega' = \omega$, on ω i ω' són les corresponents formes simplèctiques.

Les varietats simplèctiques aporten un llenguatge natural per formular la mecànica hamiltoniana, ja que l'espai de fases T^*X (fibrat cotangent) d'un sistema mecànic hamiltonià amb varietat de configuració X té una estructura natural de varietat simplèctica i *l'evolució del sistema és la del flux associat al camp v_H, on H és el hamiltonià del sistema* (veurem tot seguit que aquest enunciat equival a les equacions de Hamilton). L'estructura simplèctica en qüestió és $\omega = d\lambda$, on λ és la 1-forma de T^*X definida per la relació $\lambda_\xi(v) = \xi(\pi_* v)$ ($\xi \in T^*_q X$, $v \in T_\xi(T^*X)$, $\pi : T^*X \to X$ la projecció natural). Si $q_1, \ldots, q_n$ són coordenades locals de X definides en un obert U i per a tot $\xi \in \pi^{-1}U$ posem $\xi = p_1\partial_1 + \cdots + p_n\partial_n$ ($\partial_j = \partial/\partial q_j$), llavors $q_1, \cdots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ és un sistema de coordenades de T^*X definit sobre $\pi^{-1}U$ i, respecte d'aquestes coordenades,

$$\lambda = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n, \quad \omega = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n.$$

Així doncs,

$$v_H = \partial'_1 H\,\partial_1 + \cdot + \partial'_n H\,\partial_n - \partial_1 H\,\partial'_1 - \cdots - \partial_n H\,\partial'_n$$

($\partial'_j = \partial/\partial p_j$) i les equacions del flux associat a v_H són

$$\dot{q}_j = \partial'_j H \text{ i } \dot{p}_j = -\partial_j H \ (j = 1, \ldots, n),$$

que són precisament les equacions de Hamilton.

Aprofitem per explicar la noció d'*aplicació moment* per una acció simplèctica $G \times M \to M$, $(g, p) \mapsto gp$ d'un grup de Lie G en una varietat simplèctica (M, ω).[48] Donada una aplicació $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ i $\xi \in \mathfrak{g}$, posem $\langle \mu, \xi \rangle$ per denotar la funció $M \to \mathbb{R}$ tal que $p \mapsto \langle \mu(p), \xi \rangle$. D'altra banda, considerem el camp vectorial $\hat{\xi} : p \mapsto \xi \cdot p$ ($p \in M$), on $\xi \cdot p$ és el vector tangent en el punt p a la corba $t \mapsto \exp(t\xi)p$. Aleshores, diem que μ és una *aplicació moment* si $\hat{\xi}$ és el camp associat a la funció $\langle \mu, \xi \rangle$ per a tot $\xi \in \mathfrak{g}$, és a dir, $v_{\langle \mu, \xi \rangle} = \hat{\xi}$.

Comentaris

▶ **29.** CW1 [1]. «A note on the tangents of a twisted cubic». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 48 (1952), 204–205.[49]

48 A cada $g \in G$ li correspon el difeomorfisme $L_g : M \to M$, $p \mapsto gp$. L'acció de G es diu que és *simplèctica* si L_g és simplèctic per a tot g, és a dir, si $L_g^*(\omega) = \omega$.

49 Per als detalls de les publicacions d'Atiyah, emprem les mateixes convencions tipogràfiques que a CW.

► **30.** CW1[2]. «Complex fibre bundles and ruled surfaces». *Proc. Lond. Math. Soc.*, V (1955), 407–434.

CW1[4] (amb W. V. D. Hodge). «Integrals of the second kind on an algebraic variety». *Ann. of Math.*, 62 (1955), 56–91.

Els resultats d'aquest treball van ser anunciats a:

CW1[3] (amb W. V. D. Hodge). «Formes de seconde espèce sur une variété algébrique». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 1333–1335.

► **31.** Els tres treballs en qüestió són els següents:

CW1[5]. «On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves». *Bull. Soc. Math. France*, 84 (1956), 307–317.

Investigació de les condicions sota les quals l'anomenat teorema de Krull–Schmidt per a mòduls és vàlid en una categoria exacta (aquesta noció havia estat introduïda per David Buchsbaum (n. 1929) el 1955).

CW1[6]. «Complex analytic connections in fibre bundles». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), 181–207.

La noció de connexió en fibrats diferenciables era coneguda. En aquest article s'investiga l'adaptació al cas holomorf, que resulta més complicat perquè en general no existeixen connexions analítiques complexes.

CW1[7]. «Vector bundles over an elliptic curve». *Proc. Lond. Math. Soc.*, VII (1957), 414–452.

Alexander Grothendieck (n. 1928) acabava de demostrar que tot fibrat vectorial sobre la recta projectiva (gènere 0) és suma directa de fibrats de línia. Així, doncs, les corbes el·líptiques (gènere 1) són el primer cas no trivial en l'estudi de fibrats vectorials sobre corbes. En aquest article, Atiyah n'obté una classificació completa emprant, i adaptant a les seves necessitats, tècniques desenvolupades per Serre feia molt poc (teoremes A i B de Cartan per a les varietats algebraiques afins).

► **32.** CW1[8]. «On analytic surfaces with double points». *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 247 (1958), 237–244.

En aquest article, Atiyah demostra que «el model no singular d'una superfície algebraica de l'espai projectiu de dimensió 3, amb només punts dobles ordinaris, és difeomorf a qualsevol superfície no singular del mateix grau» i observa que «aquest resultat no val en cap altra dimensió» (CW1.147).

► **33.** CW1[9]. «Some examples of complex manifolds». *Bonner Math. Schriften*, 6 (1958).

Construeix exemples de «varietats diferenciables compactes que admeten estructures complexes kählerianes i ensems no kählerianes». Aquests exemples eren deguts a André Blanchard[50] i a Eugenio Calabi (n. 1923), i Atiyah en

50 D'aquest matemàtic, no n'he sabut trobar cap dada biogràfica, llevat d'uns pocs articles a http://www.numdam.org/, incloent-hi el citat per Atiyah.

tingué notícia durant la seva estada a Princeton, però els presenta amb un «enfocament desenvolupat per Bott i l'autor» (CW1.158).

► **34.** CW2[26] (amb J. A. Todd). «On complex Stiefel manifolds». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 56 (1960), 342–353.

D'aquest article, Atiyah en diu que «millora un resultat de Borel–Serre», i que usa «$K(X)$ i el caràcter [de Chern] ch [...] en lloc de les operacions de Steenrod», la qual cosa representa «una simplificació considerable» (CW2.33).

► **35.** CW2[24] (amb F. Hirzebruch). «Riemann–Roch theorems for differentiable manifolds». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65 (1959), 276–281.

El teorema de HRR (▷ **12**) implica certes propietats de divisibilitat per a les classes de Chern d'una varietat algebraica no singular. Envers el 1958, se sabia que aquestes condicions són satisfetes per les varietats quasi complexes compactes. D'altra banda, el teorema de GRR (▷ **12**) per un morfisme de varietats algebraiques $f : X \to Y$ també implica moltes condicions sobre les classes característiques de X i Y i «és, per tant, natural preguntar-se si aquestes condicions són vàlides per a varietats quasicomplexes o fins i tot diferenciables». L'objecte d'aquesta nota és «enunciar certs anàlegs diferenciables del teorema de Grothendieck». Aquests «"teoremes de RR diferenciables" proporcionen, com a casos especials, les condicions de divisibilitat esmentades i també certes propietats d'invariància homotòpica noves de les classes de Pontrjagin». Els detalls foren exposats per Hirzebruch en el Seminari Bourbaki (1958-1959, núm. 177). En la secció 6 mirarem amb més deteniment aquestes qüestions (HRR, GRR i algunes de les seves conseqüències).

CW2[25] (amb F. Hirzebruch). «Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés differentiables». *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 383–396.

Usen els mètodes de l'article precedent per demostrar que si una varietat compacta orientable de dimensió d es pot submergir diferenciablement en l'esfera de dimensió $2d-q$ (q, un enter positiu) llavors les seves classes característiques satisfan condicions de divisibilitat suplementàries. Aquest article millorava molt substancialment els resultats coneguts fins aquell moment.

► **36.** CW2[28] (amb F. Hirzebruch). «Vector bundles and homogeneous spaces». A: *Proc. Symp. Pure Math.* Vol. 3. Amer. Math. Soc., 1961.

Entre els resultats nous obtinguts pels autors, destaca «la relació entre l'anell de representació $R(G)$ d'un grup de Lie connex i compacte i la teoria K del seu espai classificador B_G» (per a $R(G)$, v. [9-*b*2], i per a B_G, [9-*b*4]). Si T és el tor maximal de G, Atiyah establí l'«existència d'un morfisme imatge directa $K(B_T) \to K(B_G)$» i amb això van poder demostrar «el fet crucial que $K(B_G) \to K(G_T)$ és injectiu, a diferència del que passa amb la cohomologia».

► **37.** CW2[34]. «Bordism and cobordism». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 57 (1961), 200–208.

CW2[29]. «Characters and cohomology of finite groups». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 9 (1961), 247–289.

Escrit com una continuació de CW2[28] (▷ **36**), «[...] estén als grups finits els resultats sobre $R(G)$».

CW2[35]. «Thom complexes». *Proc. Lond. Math. Soc.*, XI (1961), 291–310.

Retorna al problema de James sobre els espais projectius truncats, que fou «l'estímul original de la teoria K», i, després d'obtenir diversos resultats sobre els espais (o complexos) de Thom,[51] obté de nou els teoremes de James.

► **38.** CW2[32]. «Immersions and embeddings of manifolds». *Topology*, 1 (1962), 125–132.

El problema anàleg sobre $\mathbb{C}$ havia estat una de les primeres aplicacions fetes amb Hirzebruch (▷ **35**).

CW2[33] «Vector bundles and the Künneth formula». *Topology*, 1 (1962), 245–248.

► **39.** CW2[37] (amb F. Hirzebruch). «The Riemann–Roch theorem for analytic embeddings». *Topology*, 1 (1962), 151–166.

Estableixen que el teorema de GRR val per a immersions analítiques complexes. La clau és la definició d'imatges directes compatibles en teoria K per a fibrats analítics i topològics.

CW2[36] (amb F. Hirzebruch). «Analytic cycles on complex manifolds». *Topology*, 1 (1962), 25–45.

Les mateixes idees que a CW2[37] però amb èmfasi en les varietats singulars. En aquest article, es refuta la conjectura de Hodge *entera*: usant una construcció de Serre, que produeix varietats algebraiques a partir de grups finits, en va resultar que no tota la torsió de la cohomologia de grau parell podia ser algebraica.[52]

► **40.** CW2[38]. «The Grothendieck ring in geometry and topology». A: *Proc. Internat. Congress of Mathematicians* (Stockholm, 1962). Uppsala: Almquist & Wiksells: Boktryckeri Aktiebolag, 1962, 442–446.

► **41.** CW2[45]. *K-theory*. Nova York: Benjamin, 1967.

«El llibre ja recull la demostració elemental del teorema de periodicitat i les operacions d'Adams.» «El contingut és teoria K pura, i no s'usa ni es menciona res de cohomologia.» A més de les notes de Harvard, el llibre conté un apèndix en què s'explica «el paper de l'espai d'operadors de Fredholm com a espai classificant per a la teoria K, un resultat obtingut independentment per Klaus Jänich [n. 1940] i que fa de pont natural amb la teoria dels operadors el·líptics». També, s'hi van annexar dos articles publicats el 1966:

CW2[43]. «K-theory and reality». *Quart. J. Math. Oxford*, 17 (2), (1966), 367–386.

51 S'obtenen per compactificació per un punt de l'espai total d'un fibrat vectorial. Van ser introduïts per Thom en l'article «Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod», *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 69 (1952), 109–182.

52 Una reformulació de la conjectura de Hodge és un dels set que se n'han dit «problemes del mil·lenni».

«[...] una nova versió de la teoria K real per a espais amb involució.» «[...] aquesta teoria, de la qual en vaig dir teoria KR, va resultar un millor enfocament fins i tot per a fins purament topològics.» «La nostra definició està motivada en part per l'analogia amb la geometria algebraica real i en part per la teoria d'operadors reals el·líptics. De fet, per a un tractament a fons del problema de l'índex per a operadors reals el·líptics, la nostra teoria KR és essencial» (CW2.379).

CW2[44]. «Power operations in K-theory». *Quart. J. Math. Oxford*, 17 (2), (1966), 165–193.

«Adams havia provat (1961) un resultat que relacionava les classes de Chern i les potències de Steenrod. Aquest resultat l'havíem usat amb Hirzebruch en el nostre treball sobre el gènere de Todd (CW1[30]), però encara estava perplex per la significació real del resultat d'Adams. La cerca d'una resposta em va portar finalment a aquest treball, en el qual vaig estudiar des dels primers principis les operacions de potència i la seva interrelació amb el grup simètric.»

► **42.** CW2[39] (amb R. Bott i A. Shapiro). «Clifford modules». *Topology*, 3 (Suppl. 1) (1964), 3–38.

L'article té tres parts. La primera és purament algebraica i està destinada a fer una presentació autocontinguda de les àlgebres de Clifford. La segona, que és independent de la primera, conté diversos desenvolupaments sobre teoria K, incloent-hi la construcció del «fibrat diferència» i la definició del grup relatiu $K(X, Y)$. La tercera part, en què es combinen els resultats de les parts anteriors, està enfocada a la teoria K real (KO).

► **43.** Per a tot nombre enter $n \geq 1$, existeix un homomorfisme $h : \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbb{Z}$ (homomorfisme de Hopf), on π_j denota el grup d'homotopia d'ordre j (els elements de $\pi_j(X)$, on X és un espai topològic, són les classes d'homotopia de les aplicacions contínues $S^n \to X$). L'*invariant de Hopf* de S^n és el nombre enter positiu d tal que $d\mathbb{Z}$ és la imatge de h. L'invariant de Hopf és 2 per a tot n parell i 1 per a $n = 1, 2, 4, 8$. El problema que va resoldre Adams és que aquests quatre valors són els únics per als quals l'invariant de Hopf és 1 («On the non-existence of elements of Hopf invariant one», *Ann. of Math.*, 72 (1960), 20–104).

► **44.** CW2[42] (amb J. F. Adams). «K-theory and the Hopf invariant». *Quart. J. Math. Oxford*, 17 (2), (1966), 31–38.

► **45.** CW2[41]. «On the K-theory of compact Lie groups». *Topology*, 4 (1965), 95–99.

Proporciona «una demostració alternativa d'un teorema recent de L. Hodkin relatiu a l'estructura de $K^*(G)$, on [...] G és un grup de Lie compacte i simplement connex» (CW2.361).

CW2[43]. «K-theory and reality». *Quart. J. Math. Oxford*, 17 (2), (1966), 367–386.

CW2[44]. «Power operations in K-theory». *Quart. J. Math. Oxford*, 17 (2), (1966), 165–193.

Aquests dos darrers articles van ser inclosos al llibre K-theory com a annexos.

► **46.** Primer article sobre teoria de l'índex. CW3[56] (amb I. M. Singer). «The index of elliptic operators on compact manifolds». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 422–423.

El teorema de l'índex estableix, per a l'operador el·líptic $P : C^\infty(V, E) \to C^\infty(V, F)$ sobre una varietat diferenciable de dimensió n (▷ **22**), que index(P) es pot expressar mitjançant invariants topològics de V, E i F. Concretament,

$$\mathrm{index}(P) = \int_V \mathrm{ch}(P) \cdot \mathrm{Td}(V),$$

on $\mathrm{ch}(P)$ es defineix de la manera següent. Sigui $p : B(V) \to V$ el fibrat que té com a fibra en cada punt la bola de radi unitat del fibrat cotangent de V (respecte d'una mètrica riemanniana qualsevol), i $S(V)$ el subfibrat de les formes de mòdul 1. Llavors, el símbol $\sigma = \sigma(V, P)$ de P dóna un isomorfisme $p^*E|S(V) \simeq p^*F|S(V)$, i en aquestes condicions existeix l'anomenat «fibrat diferència» $\Delta = \Delta(p^*E, p^*F, \sigma) \in K(B(V)/S(V))$. Llavors,

$$\mathrm{ch}(P) = \tau^{-1}(\mathrm{ch}(\Delta)) \in H^*(V, \mathbb{Q}),$$

on, per a cada j, $\varphi : H^j(X, \mathbb{Q}) \simeq H^{j+n}(B(V)/S(V), \mathbb{Q})$ és l'isomorfisme de Thom (v. [9-*b*4]).

► **47.** CW2[40] (amb R. Bott). «On the periodicity theorem for complex vector bundles». *Acta Math.*, 112 (1964), 229–247.

Una demostració elemental del teorema de periodicitat de Bott complex obtinguda estudiant quina forma havien de tenir les condicions de contorn ben posades per a sistemes el·líptics, que és la qüestió central dels dos articles que segueixen:

CW3[57] (amb R. Bott). «The index problem for manifolds with boundary». *Differential analysis*. Oxford University Press, 175–186. [Articles presentats al Bombay Colloquium 1964]

CW3[58]. «The index theorem for manifolds with boundary». A: *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*. Princeton University Press, 1965, 337–351. (Annals of Mathematics Studies; 57) [Apèndix I]

► **48.** Fórmula dels punts fixos. CW3[61] (amb R. Bott). «A Lefschetz fixed-point formula for elliptic differential operators». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 245–250.

«En la conferència de Woods Hole de l'estiu del 1964, Bott i jo ens vam assabentar d'una conjectura de Shimura relativa a la generalització de la fórmula de Lefschetz dels punts fixos a aplicacions holomorfes. Després d'un esforç considerable, ens vam convèncer que havia d'existir una fórmula general d'aquesta mena per a aplicacions que conserven un operador el·líptic (o, més generalment, per a qualsevol complex el·líptic). Com a primer test, la vam aplicar a corbes el·líptiques amb multiplicació complexa, i estant els experts de primera fila amb nosaltres a Woods Hole (Cassels, Tate, etc.), els vam preguntar si podien comprovar-la per a nosaltres. Malauradament, la fórmula no va passar el test. Afortunadament, però, no vam creure els experts: la fórmula semblava massa bella per ser incorrecta, com així va ser. La nostra convicció va quedar especialment reforçada quan un dia vam adonar-nos sobtadament que la famosa fórmula de Weyl sobre els caràcters era un cas particular de la nostra fórmula general. Amb el temps, vam trobar la necessària demostració i el resultat el vam presentar breument a CW3[61].»

► **49.** Conferències a Moscou (1966):

CW3[59]. «Algebraic topology and elliptic operators». *Comm. Pure Appl. Math.*, XX (1967), 237–249.

CW3[60]. «Global aspects of the theory of elliptic differential operators». A: *Proc. Internat. Congress of Mathematicians* (*Moscow, 1966*), 57–64.

► **50.** Els altres guardonats amb la Medalla Fields a l'ICM de Moscou, amb les corresponents citacions, són, com segueix:

- Paul Joseph Cohen (Universitat de Stanford): «Ha usat la tècnica del *forcing* per demostrar, en teoria de conjunts, la independència de l'axioma de l'elecció i la hipòtesi del continu generalitzada. Aquest darrer problema era el primer de la llista de problemes de Hilbert presentada en el congrés del 1900».
- Alexander Grothendieck (Universitat de París): «Ha desenvolupat idees de Weil i Zariski i ha aconseguit progressos fonamentals en geometria algebraica. Ha introduït la idea de teoria K (grups i anells de Grothendieck). Ha revolucionat l'àlgebra homològica amb el seu celebrat *Tohoku paper*».[53]
- Stephen Smale (Universitat de Califòrnia a Berkeley): «Ha treballat en topologia diferencial, on ha demostrat la conjectura de Poincaré generalitzada en dimensió $n \geq 5$: tota varietat compacta de dimensió n homotòpicament equivalent a l'esfera de dimensió n és homeomorfa a aquesta esfera. Va introduir el mètode de les *nances* per resoldre aquest problema i altres de relacionats.»

► **51.** CW3[62] (amb R. Bott). «A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes I». *Ann. of Math.*, 86 (1967), 374–407.

CW3[63] (amb R. Bott). «A Lefschetz fixed-point formula for elliptic complexes II: Applications». *Ann. of Math.*, 88 (1968), 451–491.

L'objecte d'aquests articles és detallar les idees de la demostració presentada resumidament en l'article CW3[61], que ja hem considerat (▷ **48**). «L'aplicació més interessant de la fórmula general de Lefschetz és la relativa a l'acció d'un grup finit en la cohomologia de dimensió intermèdia d'una varietat. Això proporcionava teoremes sorprenentment forts, que, amb l'ajut de Milnor, ens van

53 «Sur quelques points d'algèbre homologique», *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119–221.

permetre demostrar que dos espais lenticulars h-cobordants són necessàriament isomètrics» (▷ **23**).

► **52.** CW3[64] (amb I. M. Singer). «The index of elliptic operators: I». *Ann. of Math.*, 87 (1968), 484–530.

«La primera demostració del teorema de l'índex per a operadors el·líptics, tal com la vam presentar a CW3[56] (▷ **46**), es basava en el cobordisme i patia certes limitacions. Durant alguns anys, Singer i jo vam estar cercant una demostració millor, més d'acord amb la generalització de Grothendieck del teorema HRR.» Amb el temps, van aconseguir la demostració que cercaven i la van publicar en aquest article. Aquesta demostració «funcionava purament en el context de la teoria K i no usava cohomologia racional», de manera que se'n podien fer «diverses generalitzacions significatives».

CW3[65] (amb G. B. Segal). «The index of elliptic operators: II». *Ann. of Math.*, 87 (1968), 531–545.

CW3[66] (amb I. M. Singer). «The index of elliptic operators: III». *Ann. of Math.*, 87 (1968), 546–604.

CW3[69]. «Global theory of elliptic operators». A: *Proc. Int. Symp. on Functional Analysis (Tokyo).* University of Tokyo Press, 1969, 21–30.

En aquest darrer article, Atiyah explora la possibilitat de definir una teoria K covariant, a l'estil del K_0 de Grothendieck de la geometria algebraica, usant una noció abstracta d'operador el·líptic (operadors de Fredholm). «Em va satisfer saber, anys més tard, que aquestes idees van ser desenvolupades en teories molt satisfactòries per Brown, Douglas i Fillmore i per Kasparov.»

► **53.** CW2[46]. «Bott periodicity and the index of elliptic operators». *Quart. J. Math. Oxford*, 19 (2), (1968), 113–140.

CW2[48]. «Algebraic topology of operators in Hilbert space». A: *Lectures in modern analysis and applications I.* Springer, 1969, 101–122. (Lecture Notes in Math.; 103)

«En aquell moment, la interrelació entre la teoria de l'índex i la teoria K era molt extensa. Aquests dos articles contenen el tractament d'aquesta relació que considerava definitiu.» Desenvolupen idees presentades d'una manera magistralment discursiva, el març del 1966, en una conferència al Courant Institute of Mathematical Sciences i publicades en l'article:

CW3[59]. «Algebraic topology and elliptic operators». *Comm. Pure Appl. Math.*, XX (1967), 237–249.

El tema de fons de tots aquests treballs és la profunda connexió entre el teorema de periodicitat de Bott (relatiu a l'homotopia dels grups unitaris) i l'índex dels operadors el·líptics. Cal remarcar, en particular, una meravellosa demostració del teorema de periodicitat: «Em va sorprendre moltíssim trobar, en el curs d'aquestes recerques, una demostració del teorema de periodicitat que quedava resolta en les formalitats. Tot el treball dur amb Bott per obtenir

CW2[40] (▷ **47**) resultava innecessari! En aquest sentit recordava el tractament miraculós de Quillen del cobordisme complex».

► **54.** CW2[47] (amb D. O. Tall). «Group representations, λ-rings and the J-homomorphism». *Topology*, 8 (1969), 253–297.

«Un altre tema recurrent era l'estreta relació entre el grup de representacions i la teoria K, que, amb el temps, portaria a l'híbrid de la teoria K equivariant. Serre fou qui em va introduir en aquestes idees, a les quals ell havia arribat en el context de la geometria algebraica o de la teoria de nombres. A CW2[29] (▷ **37**), jo havia establert el teorema $R(G) = K(B_G)$, que identifica l'anell de representacions completat d'un grup finit G amb el grup K de l'espai classificant. Després de la sèrie d'articles d'Adams sobre l'homomorfisme J, en els quals determinava la classificació homotòpica fibrada dels fibrats d'esferes, era natural de considerar la qüestió anàloga per a les representacions de grups. Això ho vam dur a terme en aquest article conjunt amb David Tall. Calgué incorporar un tractament formal dels λ-anells de Grothendieck i, en essència, és una versió algebraica del treball d'Adams»

CW2[49] (amb G. B. Segal). «Equivariant K-theory and completion». *J. Diff. Geom.*, 3 (1969), 1–18.

«El teorema principal de CW2[29] (▷ **37**) per a grups finits G ja s'havia establert abans per a grups de Lie connexos i compactes (CW2[28] ▷ **36**), i era natural conjecturar que hi havia d'haver un tractament uniforme que valgués per a tots els grups de Lie compactes. Durant molt de temps, vaig mirar la demostració de CW2[29] amb recel: era llarga, molt tècnica i depenia massa vegades de la bona sort. No n'estava satisfet i constantment cercava un enfocament més natural. A la fi, treballant sistemàticament amb teoria K equivariant, fou el camí apropiat. Exposar-ne el resultat és l'objecte d'aquest article, elaborat conjuntament amb Segal.»

► **55.** CW4[84]. «Hyperbolic differential equations and algebraic geometry». A: *Séminaire Bourbaki 19e année 1966/67, núm. 319*. Nova York; Amsterdam: Benjamin, 1–12.

CW4[85] (amb R. Bott i L. Gårding). «Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I». *Acta Math.*, 124 (1970), 109–189.

CW4[86] (amb R. Bott i L. Gårding). «Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients II». *Acta Math.*, 131 (1973), 145–206.

«Encara que les equacions diferencials el·líptiques foren el centre del meu interès matemàtic durant molts anys, es va produir una col·laboració interessant amb Bott i Gårding sobre equacions diferencials hiperbòliques que va conduir a aquests tres articles. La nostra col·laboració va començar d'una manera inusual. Bott era a Oxford i Gårding va venir de Lund a passar-hi unes setmanes. Ens digué que tenia un problema per a nosaltres, i esmentà un article important però obscur de Petrovsky que usava l'homologia de varietats algebraiques. Essencialment, Bott i jo vam ser contractats per entendre i explicar l'article de

Petrovsky. En aquell moment, érem molt ignorants en relació amb les equacions hiperbòliques, però Lars Gårding n'era un expert mundial i un tutor excel·lent. A canvi, nosaltres el vam instruir en topologia, i així la col·laboració s'inicià amb una formació recíproca. Vam aconseguir entendre Petrovsky i, després, modernitzar-lo i generalitzar-lo, i van arribar, amb el temps, a escriure un llarg article conjunt. Fet i fet, fou un episodi agradable i instructiu.»

► **56.** CW2[52] (amb J. L. Dupont). «Vector fields with finite singularities». *Acta Math.*, 128 (1972), 1–40.

Les línies mestres d'aquest treball havien estat indicades per Atiyah a:

CW2[50]. «Vector fields on manifolds». *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein Wesrfallen (Düsseldorf, 1969)*, 200 (1970), 7–24.

El treball presentat a l'ICM de Niça (1970) és el següent:

CW2[53]. «Elliptic operators and singularities of vector fields». A: *Actes Congr. Internat. Math., 2*. Gauthier-Villars, 1970, 207–209.

Les condicions necessàries que obtenen s'expressen com condicions de divisibilitat de certs invariants numèrics. Per exemple, en el cas que la dimensió sigui $4q$, s'ha de complir la condició que la signatura de X sigui divisible per una potència de 2 explícitament determinada en termes de r. «Aquests treballs interconnecten la teoria K i la teoria de l'índex d'una manera fonamental. En particular, usen variants refinades del teorema de l'índex per a operadors reals en les quals els índexs són nombres enters mòdul una potència de 2 elevada. Aquests lligams entre l'anàlisi i la teoria d'homotopia em van semblar especialment atraients. Gairebé sempre l'anàlisi es relaciona amb la cohomologia real, via formes diferencials, i fou una novetat sorprenent relacionar-la amb subtils efectes de torsió».

► **57.** CW2[51] (amb G. B. Segal). «Exponential isomorphisms for λ-rings». *Quart. J. Math. Oxford*, 22 (2), (1971), 371–378.

Aquest article pressuposa l'article CW2[47] ($\triangleright$ **54**), incloent-hi la definició i propietats bàsiques dels λ-anells.

► **58.** CW3[67] (amb I. M. Singer). «The index of elliptic operators: IV». *Ann. of Math.*, 93 (1971), 119–138.

CW3[68] (amb I. M. Singer). «The index of elliptic operators: V». *Ann. of Math.*, 93 (1971), 139–149.

«El teorema de l'índex per a famílies d'operadors el·líptics, CW3[67], era una conseqüència fàcil de la nova demostració [la de CW3[64], $\triangleright$ **52**] i es podia mirar com un primer intent de generalitzar el teorema de GRR. En la seva forma real, CW3[68], inclou diversos teoremes de l'índex mod 2, com ara el càlcul de la dimensió (mod 2) del nucli d'un operador el·líptic antiadjunt. Malgrat les moltes demostracions noves interessants del teorema de l'índex que s'han obtingut en els darrers anys (equació de la calor, supersimetria, etc.), no n'hi ha cap que cobreixi aquests teoremes de l'índex refinats mod 2.»

► **59.** CW3[70] (amb I. M. Singer). «Index theory for skew-adjoint Fredholm operators». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 37 (1969), 305–326.

En la nova demostració del teorema de periodicitat real, usen la contractibilitat del grup unitari de l'espai de Hilbert establerta per Nikolaas H. Kuiper (1920-1994). «La connexió d'aquesta demostració amb altres demostracions segueix essent fins avui una mica misteriosa i no sembla que fins ara s'hagi explorat, però entenc, pel que em diu Quillen, que pot trobar una ubicació natural en relació a la teoria de l'homologia cíclica de Connes.»

► **60.** CW3[74] (amb F. Hirzebruch). «Spin-manifolds and group actions». A: Haefliger, A.; Narasimhan, R. [ed.]. *Essays on topology and related topics. Mémoires dédiés a George de Rham*. Springer, 1970, 18–28.

El resultat principal d'aquest article, basat en el teorema de l'índex equivariant, és que si una varietat espinorial V admet una acció no trivial d'un grup de Lie compacte i connex (com per exemple $S^1 = U(1)$), llavors $\hat{A}(V) = 0$. Aquesta recerca «s'originà pels resultats demostrats pel meu estudiant C. Kosniowski per al cas holomorf. També recorda el teorema de Lichnerowicz segons el qual $\hat{A} \neq 0$ implica que no existeixen mètriques de curvatura escalar positiva. Aquestes qüestions han estat desenvolupades considerablement per M. L. Gromov [n. 1943] i H. B. Lawson [n. 1943], i, molt recentment, Landweber i Stong han obtingut resultats nous relacionats que han promogut que Witten desenvolupés una remarcable connexió entre teoria quàntica de camps, varietats i formes modulars».

► **61.** CW3[71]. «The signature of fibre bundles». A: *Global analysis: Papers in honour of K. Kodaira*. University of Tokyo Press: Princeton University Press, 1969, 73–84.

D'acord amb els resultats de Chern, Hirzebruch i Serre, la signatura d'una fibració és el producte de la signatura de la base per la de la fibra si l'acció del grup fonamental de la base en la cohomologia de la fibra és trivial. Altrament aquesta propietat multiplicativa no té per què ser certa, com ho mostren casos que es donen de manera natural en geometria algebraica. En aquest article, Atiyah aplica el teorema de l'índex per a famílies d'operadors el·líptics per aclarir el paper del grup fonamental en la relació entre les tres signatures.

«Molt més tard, Witten em va assabentar que aquestes qüestions estan relacionades amb les anomalies gravitatòries, i [aquest treball] proporciona els exemples més senzills d'aquestes anomalies.»

CW3[72]. «Topology of elliptic operators». *Global analysis*. Amer. Math. Soc., 1970, 101–119. (Proc. Symp. Pure Math.; 16)

És un resum (divuit pàgines), basat en les notes preses per U. Koschorke, de cinc conferències sobre aspectes topològics del teorema de l'índex i les seves aplicacions. És recomanable com a preparació per a l'estudi dels articles dels AM dedicats a la teoria de l'índex (quatre amb Singer i un amb Segal, com hem vist anteriorment).

CW3[73]. «Resolution of singularities and division of distributions». *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970), 145–150. [Rebut el juliol del 1969]

Per a una funció analítica no negativa $f \neq 0$ definida sobre una varietat analítica real, el problema considerat és el de la prolongació analítica de f^s com a funció de $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 0$, a tot el pla. La solució és afirmativa i és una conseqüència d'un teorema general que estableix mitjançant el teorema de resolució de singularitats d'Hironaka. Com a corol·lari, obté «una demostració senzilla del teorema de Hörmander–Lojasiewicz sobre la divisió de distribucions».

CW3[75]. «Riemann surfaces and spin structures». *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4 (1971), 47–62.

«En ocasió de la meva visita a Harvard el 1970, Mumford em va preguntar si certs resultats clàssics sobre superfícies de Riemann, relatius a arrels quadrades L del fibrat de línia canònic K, es podrien encaixar en el marc de la teoria de l'índex. Va resultar que encaixaven perfectament bé en les fórmules de l'índex mod 2 per a varietats espinorials que havíem explorat amb Singer. Normalment, la nostra mirada es dirigia a dimensions superiors (> 4) i em va sorprendre que fenòmens no trivials d'aquesta mena es donessin ja en dimensió 2. Aquest article és un report sobre els resultats obtinguts, que va ocasionar, de retruc, que Mumford trobés una demostració algebraica alternativa. Més recentment, aquestes qüestions 2-dimensionals apareixen d'una manera destacada en la teoria de supercordes.»

CW3[78]. «Elliptic operators and compact groups». Springer, 1974, 1–93. (Lecture Notes in Math., 401)

Basat en les notes preses per John Hinrichsen d'un curs que Atiyah impartí el 1971 a l'IAS, i amb unes motivacions més aviat tècniques, explora la noció d'«operador transversalment el·líptic a les òrbites d'una acció d'un grup de Lie compacte G» amb la idea de donar una construcció topològica per a l'índex (que, en aquest cas, és una distribució sobre G). D'aquest article, Atiyah en comenta que no tingué gaire impacte, «potser perquè en realitat no hi ha exemples naturals d'operadors transversalment el·líptics (llevat dels ordinaris). A més, l'àlgebra commutativa usada era probablement desconeguda i difícil d'assimilar per als usuaris potencials (és a dir, topòlegs i analistes)».

► **62.** CW2[54] (amb L. Smith). «Compact Lie groups and the stable homotopy of spheres». *Topology*, 13 (1974), 135–142.

Atiyah troba que la teoria d'homotopia convencional és «lletja i feixuga», i per això «estava sempre a l'aguait d'algun enfocament geomètric o analític indirecte». En aquest article, la via que s'explora és la de «representar els grups d'homotopia estable de les esferes» mitjançant «varietats paral·lelitzables naturals, com ara els grups de Lie». D'aquesta tècnica, Atiyah n'esperava que «pogués aportar una innovació fonamental», però «tot i que hi ha hagut progressos, les meves expectatives encara no s'han satisfet [1988]».

CW2[55]. «A survey of K-theory». *Proc. Conf. on K-theory and operator algebras, Athens, Georgia.* Spriger, 1977, 1–9. (Lecture Notes in Math., 575)

En aquest article, es repassa breument l'ús de la teoria K en geometria algebraica, topologia i equacions diferencials.

► **63.** CW3[77]. «The index of elliptic operators». A: *Colloquium Lectures, Amer. Math. Soc., Dallas (1973)*.

D'aquest treball, Atiyah comenta: «Ara s'hauria de posar al dia, ja que han passat moltes coses des que es va escriure, fa més d'una dècada, especialment en relació amb la física teòrica, però això haurà d'esperar a un altre dia i potser a una altra ploma».

► **64.** CW3[76] (amb E. Rees). «Vector bundles on projective 3-space». *Invent. Math.*, 35 (1976), 131–153.

Pel que se sabia en aquell moment, per estudiar el problema de saber si un fibrat vectorial complex E de rang r sobre una varietat holomorfa V_n admet una estructura holomorfa, es podia suposar que $1 < r < n$, de manera que el primer cas obert era per a $r = 2$ sobre una V_3, i en particular sobre $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, que és la situació principal que consideren. Primer, s'ocupen de classificar els fibrats vectorials complexos E de rang 2 sobre $\mathbb{P}_3$ i obtenen que les classes de Chern $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ de E (▷ **8**) són suficients quan c_1 és senar i que cal afegir-hi un invariant $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ quan c_1 és parell. Tot seguit, obtenen α en el cas que E sigui holomorf: $\alpha = \dim H^0(\mathbb{P}_3, E \otimes H^n) + \dim H^2(\mathbb{P}_3, E \otimes H^n) \bmod 2$, on $n = c_1/2 + 2$ i H és el fibrat de línia dual del tautològic de $\mathbb{P}_3$ (aquesta fórmula es dedueix com un cas especial del teorema de l'índex). Amb això, no és difícil calcular α per als fibrats construïts per Horrocks el 1968 (*Topology*, 7, 117–120) i mostrar que amb aquests fibrats s'obtenen tots els valors possibles de c_1, c_2 i α. Per tant, com a corol·lari, tot fibrat de rang 2 sobre $\mathbb{P}_3$ admet una estructura holomorfa. L'article acaba mostrant que dels dos possibles fibrats amb c_1 i c_2 fixats, c_1 parell, com a molt un és restricció d'un fibrat de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$. Cal remarcar que l'article també estableix alguns resultats generals auxiliars que tenen interès per ells mateixos.

► **65.** CW4[79] (amb R. Bott i V. K. Patodi). «On the heat equation and the index theorem». *Invent. Math.*, 19 (1973), 279–330. [Correccions: «On the heat equation and the index theorem». *Invent. Math.*, 28 (1975), 277–280]

D'aquest material, i d'algunes idees dels treballs amb Patodi i Singer que consignem tot seguit, Atiyah en féu una presentació al Seminari Bourbaki 1973-1974, amb el títol «The heat equation in Riemannian geometry (after Patodi, Gilkey, etc.)», que es pot trobar a http://www.numdam.org/. Conté quatre seccions: 1) l'aproximació al teorema de l'índex mitjançant l'equació de la calor; 2) el teorema de Hirzebruch de la signatura; 3) el teorema de l'índex general; i 4) altres desenvolupaments. Encara que tenen molts punts de coincidència, és aconsellable llegir aquest treball conjuntament amb CW4[80], CW4[87] i CW4[88] (▷ **66**).

CW4[80] (amb V. K. Patodi i I. M. Singer). «Spectral asymmetry and Riemannian geometry». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 5 (1973), 229–234.

Aquesta breu nota, igual que l'exposició en el Seminari Bourbaki que hem comentat, és bàsicament un anunci dels resultats dels tres articles que segueixen. El concepte fonamental que usen, donat un operador diferencial lineal el·líptic A sobre una varietat, és la funció $\eta_A(s) = \sum_{\lambda\neq 0}(\text{signe }\lambda)\lambda^{-s}$, on la suma s'estén a tots els valors propis no nuls de l'operador A i s és un nombre complex (en el cas que $\lambda > 0$ per a tot $\lambda \neq 0$, aquesta funció era coneguda i, per analogia amb la funció ζ de Riemann, denotada $\zeta_A(s)$). La funció $\eta_A(s)$ és holomorfa per a $\Re s \gg 0$ i admet una prolongació meromorfa a tot el pla complex, la qual *resulta finita a* $s = 0$. Per la manera com s'ha definit η, el valor $\eta(A) = \eta_A(0)$, anomenat η-invariant de A, és una mesura de l'*asimetria* del conjunt $\{\lambda\}$ (l'espectre de A) respecte de l'origen. Aquesta *asimetria espectral* té un paper essencial en l'extensió del teorema de l'índex (i, en particular, el teorema de Hirzebruch de la signatura) a varietats amb vora.

CW4[81, 82, 83] (amb V. K. Patodi i I. M. Singer). «Spectral asymmetry and Riemannian geometry: I, II, III». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77, 78, 79 (1975, 1975, 1976), 43–69, 405–432, 71–99.

«Per diverses raons, els articles sobre asimetria espectral han estat potser els més satisfactoris de la meva recerca. Per a mi, tenia un gran atractiu la manera com s'hi interrelacionen la geometria diferencial, la topologia, l'anàlisi i, fins i tot, la teoria de nombres. En aquell moment aquests articles van tenir un impacte modest, però, uns anys més tard, quan es van relacionar amb la física teòrica, van esdevenir molt populars. En particular, el treball de Witten sobre anomalies globals va donar un relleu al nostre η-invariant que mai haguéssim pogut preveure.»

► **66.** CW4[87]. «Eingenvalues and Riemannian geometry». A: *Proc. Int. Conf. on Manifolds and Related Topics in Topology*. University of Tokyo Press, 1975, 5–9.

Aquest breu article dóna una visió panoràmica dels problemes de valors propis en geometria riemanniana: desenvolupaments asimptòtics, fórmula integral del teorema de l'índex i fórmula per a l'invariant η (vegeu el comentari a CW4[80], ▷ **65**).

CW4[88] «Classical groups and classical differential operators on manifolds». A: *Differential operators on manifolds*. Varenna: CIME, 1975, 6–48.

L'esquema de les conferències és el següent: 1) àlgebra exterior, representacions de grups, caràcters; 2) àlgebra de Clifford, grup Spin; 3) la teoria de Hodge – De Rham, la característica d'Euler i la signatura; 4) operador de Dirac i la seva relació amb $\bar{\partial}$, 5) teorema de periodicitat de Bott i teoria K; 6) estrucutura de la demostració del teorema de periodicitat; 7) l'aproximació mitjançant l'equació de la calor, 8) l'operador signatura generalitzat i la fórmula de Lefschetz.

«Ara generalitzarem el tractament de l'operador signatura a fi de cobrir tots els operadors clàssics, i d'això en seguirà el teorema general de l'índex» (introducció a la darrera conferència).

► **67.** CW4[89]. «Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras». A: *Colloque «Analyse et Topologie» en l'honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*. Soc. Math. de France, 1976, 43–72. (*Astérisque*, 32-3)

«Com que no era un expert en àlgebres de Von Neumann, en aquesta presentació vaig intentar donar un tractament simple, elemental i essencialment autocontingut dels resultats. Posteriorment, en mans d'Alain Connes, l'expert mundial en el tema, aquestes simples idees van ser enormement esteses i desenvolupades en una teoria completa d'anàlisi lineal per a foliacions.»

► **68.** CW4[90]. (amb W. Schmid). «A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups». *Invent. Math.*, 42 (1977), 1–62. [Correcció: «A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups». *Invent. Math.*, 54 (1979), 189–192]

Aquesta és l'única publicació derivada de la col·laboració amb Schmid, però Atiyah també li dóna crèdit de coautor en el treball següent:

CW4[91]. «Characters of semisimple Lie groups». [Unpublished Lecture Notes. Oxford, primavera del 1976]

«Durant molts anys, vaig tenir un interès general per la teoria de grups semisimples no compactes. De fet, era una activitat tan important a Princeton, i tenia tantes ramificacions, que era impossible ignorar-la. D'altra banda, el treball de Harish i Chandra era prohibitivament tècnic i constantment esperava que mètodes més geomètrics poguessin portar a una simplificació conceptual. En particular, m'atreia la idea de realitzar les representacions de la sèrie discreta com a solucions de l'equació de Dirac. Això semblava una generalització natural del cas dels grups compactes, per als quals sabia que el teorema de Borel-Weil podia ser interpretat en termes de l'operador de Dirac. En diverses ocasions, vaig discutir aquests temes amb Wilfred Schmid, i això em va fer adonar que l'article CW4[89] (▷ **67**) es podia usar com un teorema d'existència per a espinors harmònics de quadrat integrable sobre espais homogenis adequats. Vaig escriure a Schmid per explicar-li la idea i ell aviat va veure com es podia desenvolupar una bona part de la teoria en detall a partir d'aquest punt de partida. Tanmateix, per evitar dependre del treball de Harish i Chandra fou necessari trobar una demostració directa alternativa del teorema fonamental relatiu a la integrabilitat local dels caràcters irreductibles. El 1975, Schmid i jo vam passar un curs a l'IAS, durant el qual vam elaborar una demostració raonablement satisfactòria de la integrabilitat local basada en un estudi curós d'operadors diferencials invariants i classes de conjugació. Vam pensar d'escriure-ho en un article conjunt, però primer vam decidir escriure ràpidament el treball sobre la sèrie discreta. Malauradament, això va ocupar molt més temps del que ens havíem pensat. L'altre projecte, sobre la integrabilitat local, es va anar posposant indefinidament, per bé que les idees essencials es van explicar en aquesta sèrie de conferències que vaig fer a Oxford la primavera de 1976.»

► **69.** CW4[92] (amb H. Donnelly i I. M. Singer). «Geometry and analysis of Shimizu L-functions». *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 79 (1982), 5751.

Aquesta nota d'una pàgina resumeix els resultats que es poden trobar detallats en l'article següent:

CW4[93] (amb H. Donnelly i I. M. Singer). «Eta invariants, signature defects of cusps and values of L-functions». *Ann. of Math.*, 118 (1983), 131–177. [*Addendum* a «Eta invariants, signature defects of cusps and values of L-functions: Signature defects of cusps and values of L-functions: the nonsplit case». *Ann. of Math.*, 119 (1984), 635–637]

► **70.** CW5[97] (amb N. J. Hitchin i I. M. Singer). «Self-duality in four dimensional Riemannian geometry». *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 362 (1978), 425–461.
Consignem també els dos principals articles que van originar aquesta memòria i l'article ADHM:

CW5[94] (amb N. J. Hitchin i I. M. Singer). «Deformations of instantons». *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 74 (1977), 2262–2263.

CW5[95] (amb R. S. Ward). «Instantons and algebraic geometry». *Commun. Math. Phys.*, 55 (1977), 117–124.

CW5[96] (amb N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld i Y. I. Manin). «Construction of instantons». *Phys. Lett.*, 65A (1978), 185–187.

► **71.** CW5[99]. *Geometry of Yang-Mills fields.* Pisa: Academia Nazionale dei Lincei: Scuola Normale Superiore, 1979. (Lezioni Fermiane)
Aquesta memòria també inclou una versió més completa de la construcció dels instantons de l'article ADHM. A més del material exposat a Pisa, també conté idees presentades a la primavera del 1978 a Harvard («Loeb Lectures») i a Yale («Whittemore Lectures»). L'estil de la presentació, més aviat discursiu, va estar influït pel fet que l'assistència a totes aquestes conferències estava formada per matemàtics i físics. Consignem els títols dels capítols: 1) «La lagrangiana de Yang–Mills»; 2) «Descripció dels instantons»; 3) «L'espai de *twistors* de Penrose»; 4) «Fibrats holomorfs»; 5) «La construcció de Horrocks»; 6) «Equacions lineals del camp en un ambient de Yang–Mills»; 7) «Teoremes sobre fibrats algebraics», 8) «Problemes oberts».

«Per aquell temps, de fet, estava fent conferències a molts llocs del món sobre la geometria de les teories *gauge* i penso que és just dir que els articles CW5[95] i CW5[96] (▷ **70**) havien causat un remolí d'interès en la interfície matemàtiques-física. Es digué que Polyakov va descriure CW5[96] com la primera ocasió en què la matemàtica moderna abstracta havia tingut alguna utilitat!»

Alguns aspectes d'aquest material van ser exposats en altres conferències, i van donar lloc a articles expositius que tenen interès per si mateixos:

CW5[98]. «Geometric aspects of gauge theories». A: *Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978).* Vol. 2, 881–885.

CW5[100]. «Real and complex geometry in four dimensions». A: *The Chern Symposium 1979, Berkeley.* Springer, 1980, 1–10.

CW5[111]. «Gauge theory and algebraic geometry». A: *Proc. of Beijing Symposium on Differential Geometry and Partial Differential Equations.* China: Science Press, 1982, 1–20. [Es pot considerar una versió resumida de la memòria «Geometry of Yang–Mills fields»]

► **72.** CW5[105] (amb R. Bott). «The Yang–Mills equations over Riemann surfaces». *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 308 1982, 523–615.
Una de les afirmacions que els autors fan en la introducció d'aquesta memòria és que «l'interès principal rau no tant en les aplicacions concretes com en els *mètodes usats i la interacció entre els diferents enfocaments*» (la cursiva és nostra). Per a una versió condensada i preliminar, vegeu:

CW5[104] (amb R. Bott). «The Yang–Mills equations over algebraic curves». A: *Geometry and analysis—Patodi memorial* (1980), *Proc. Indian Acad. Sci.* (Math. Sci.), 90 (1) (1981), 11–20.

En la introducció d'aquest segon article, llegim: «Si treballem sobre l'esfera de dimensió 2, resulta que la teoria de Yang–Mills esdevé essencialment idèntica a la teoria de Morse per a les geodèsiques d'un grup de Lie compacte [Bott, 1956]. Si, en lloc de l'esfera, usem una superfície compacta orientable de gènere g, trobem noves i sorprenents connexions amb la teoria dels fibrats estables sobre corbes algebraiques de Narasimhan i Seshadri [1965] i Seshadri [1967]. Usant una forma apropiada de la teoria de Morse, s'obté una informació molt precisa sobre la cohomologia de l'espai de moduli dels fibrats estables. D'aquesta manera, s'obtenen de nou, en una forma reforçada, els resultats de Harder–Narasimhan [1970, 1975] i Newstead [1967].

»Posteriorment, en mans de la meva estudiant Frances Kirwan (n. 1959), se'n van fer moltes aplicacions». La tesi de Kirwan és del 1984 i tenia per títol *The cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry.*

Esmentem finalment un article del 1980 en què Atiyah exposa «les seves idees generals, i les seves especulacions, sobre la teoria de Morse», que, posteriorment, van ser desenvolupades considerablement per Clifford Taubes (n. 1954), entre d'altres:

CW5[103]. «Remarks on Morse theory». A: *Recent developments in gauge theories.* Plenum, 1980, 1–5.

► **73.** CW5[112]. «The Yang-Mills equations and the structure of 4-manifolds». *Durham Symposium on Global Riemannian Geometry.* Ellis Horwood, 1984, 11–17.

Al final d'aquest article, Atiyah diu que sembla versemblant que el teorema de Donaldson sigui només «la primera de moltes aplicacions geomètriques de les equacions de Yang–Mills» i dóna indicacions d'algunes idees sobre la qüestió.

CW6[128]. «On the work of Simon Donaldson». A: *Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Berkeley, CA, 1986)*, 3–6.

És oportú assenyalar que Atiyah també aportà resultats als punts de vista de Donaldson, com per exemple en l'article següent, on demostrà que «els instantons en dimensió 4 es poden identificar de manera natural amb els instantons d'una teoria en dimensió 2 amb valors en el grup de llaços».

CW5[117]. «Instantons in two and three dimensions». *Comm. Math. Phys.*, 93 (1984), 437–451.

► **74.** Esmentem primer dos treballs expositius que inclouen una presentació de les adaptacions de la transformada de Penrose a l'estudi dels monopols:

CW5[113]. «Geometry of monopoles». A: *Monopoles in quantum field theory*. World Scientific Publishing. 1982, 3–20.

CW5[114]. «Solutions of classical equations in gauge theories: Fundamental interactions and rigorous results». Conferències impartides en la «1981 International Summer School of Theoretical Physics». Poiana Brasov, Romania: Birkhäuser, 1982, 207–219.

Mentre que l'estudi dels instantons de $\mathbb{R}^4$ es converteix, via la transformada de Penrose, en l'estudi de fibrats holomorfs sobre $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, en el cas dels monopols de $\mathbb{R}^3$, es converteix, via una modificació d'aquella transformada, en l'estudi de fibrats holomorfs sobre $T\mathbb{P}_1\mathbb{C}$ (el fibrat tangent de la recta projectiva complexa). En el treball que segueix, Atiyah desenvolupa idees similars per a l'espai hiperbòlic de dimensió 3, que resulta més senzill i té el cas de $\mathbb{R}^3$ com un límit quan la curvatura de l'espai hiperbòlic tendeix a zero:

CW5[118]. «Magnetic monopoles in hyperbolic space». A: *Proc. of Bombay Colloquium 1984 on Vector Bundles and Algebraic Varieties*. Oxford University Press, 1987, 1–34.

Del resultat de l'article que segueix, basat en el treball de Michael Murray,[54] Atiyah en comenta que «és intrigant, però encara misteriós, i fins ara no s'ha estudiat més»:

CW6[140]. «Magnetic monopoles and the Yang-Baxter equations». *Int. J. Mod. Phys. A*, 6 (16) (1991), 2761–2774.

Tot seguit, cal considerar els treballs en què l'objectiu és esbrinar l'evolució temporal dels monopols relatius a un grup no abelià, com ara SU(2), en termes de la geometria d'espai de solucions de les equacions de Bogomolny. Per a baixes velocitats, resulta, com havia predit Nicholas Manton, l'evolució geodèsica sobre aquest espai.

CW5[115] (amb N. J. Hitchin). «Low energy scattering of non-Abelian monopoles». *Phys. Lett.*, 107A, 1 (1985), 21–25.

CW5[116] (amb N. J. Hitchin). «Low-energy scattering of non-Abelian magnetic monopoles». *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 315 (1985), 459–469.

Finalment, hi ha una extensa memòria que culmina els esforços d'Atiyah i Hitchin en la recerca dels monopols, el resultat principal de la qual és «la determinació explícita de la mètrica natural sobre l'espai de moduli dels SU(2)-monopols de càrrega 2». La memòria és una versió ampliada de les conferències que Atiyah impartí el gener del 1987 a la Universitat Rice com a «Porter Lectures».

54 Doctorat el 1983, sota la direcció d'Atiyah, amb la tesi *Non-Abelian magnetic monopoles.*

CW6[126] (amb N. J. Hitchin). *Geometry and dynamics of magnetic monopoles.* Princeton University Press, 1988. 131 p.

Hi ha un interessant vídeo, produït per IBM el 1988, que mostra el comportament desconcertant de la interacció de monopols magnètics per a baixes energies (s'hi pot accedir des de la pàgina web de Hitchin).

► **75.** CW5[106]. «Convexity and commuting Hamiltonians». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 14 (1981), 1–15.

En l'intent d'entendre la significació d'algunes qüestions de convexitat aparegudes en l'article amb Bott sobre les equacions de Yang–Mills en superfícies de Riemann, aquí es formulen «resultats coneguts de Schur, Horn, Kostant i altres, en un context més general de geometria simplèctica» (Guillemin i Sternberg van arribar gairebé simultàniament a les mateixes conclusions).

CW5[107]. «Angular momentum, convex polyhedra and algebraic geometry». *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 26 (1983), 121–138.

«Després d'aparèixer CW5[106] vaig rebre una carta d'Arnold en què m'explicava com el meu treball es podia aplicar per simplificar un resultat de Koushnirenko que expressa el nombre de zeros d'un conjunt de polinomis en termes del volum del «poliedre de Newton» associat. Arnold també plantejava la qüestió d'obtenir la generalització de Bernstein, una «forma polaritzada» d'aquest resultat en termes dels volums mixtos de Minkowski. Vaig trobar que aquests resultats eren molt bells i fascinants. També estaven relacionats amb la demostració de Teissier de les desigualtats d'Alexandroff-Frenchel basades en el teorema de la signatura de Hodge. Després d'haver entès com demostrar el resultat de Bernstein, em va semblar que aquest material mereixia alguna publicitat i que era apropiat per a una conferència que se'm va demanar en ocasió del centenari de la Societat Matemàtica d'Edimburg.»

CW5[108] (amb A. N. Pressley). «Convexity and loop groups». *Progr. Math.*, 36 (1983), 33–64. [Volum dedicat a I. R. Shafarevich en ocasió del seu seixantè aniversari]

Estenen els resultats sobre convexitat de CW5[106] a un context de dimensió infinita (ús del grup de llaços ΩG en lloc del grup de Lie G). «En aquell temps els grups de llaços (i les seves corresponents àlgebres de Lie) havien estat estudiats intensament per matemàtics i físics. Hi estava familiaritzat des de feia algun temps per la seva aparició en la demostració de Bott del teorema de periodicitat, però la meva comprensió molt més detallada de la seva geometria va ser el resultat d'extenses discussions amb Graeme Segal. Ell i Pressley, que havia estat el seu estudiant, estaven escrivint el seu llibre sobre el tema [*Loop groups*, Clarendon Press, 1987].»

Acabem aquest número amb dos articles de caràcter expositiu, però molt interessants. En el primer, es presenta una versió de Rham de la cohomologia equivariant que els serveix per relligar diversos punts de vista (s'indica, per exemple, com aplicar-la a dos resultats independents, un de Johannes J. Duistermaat (n. 1942) i Gert Heckman (n. 1953) sobre l'aplicació moment relativa a l'acció d'un tor sobre una varietat simplèctica compacta, i l'altre, de Witten, sobre supersimetria i teoria de Morse). El segon article, molt més breu, explica el paper de l'aplicació moment en diversos contextos i, en particular, a la teoria dels espais de moduli de la geometria algebraica obtinguts via la teoria geomètrica d'invariants de David Mumford (n. 1937, Medalla Fields 1974).

CW5[109] (amb R. Bott). «The momentum map and equivariant cohomology». *Topology*, 23, 1 (1984), 1–28.

CW5[110]. «The moment map in symplectic geometry». A: *Durham Symposium on Global Riemannian Geometry*. Ellis Horwood, 1984, 43–51.

► **76.** El 1982, Atiyah fou invitat a la Conferència Solvay (Austin, Texas), en la qual Witten va parlar de l'«anomalia mod 2». «Discussions amb ell, i anteriorment amb Quillen a Oxford, em van obrir els ulls pel que fa al significat de les anomalies i la seva relació amb el teorema de l'índex per a famílies.» Els dos primers articles que segueixen són «conferències en què l'audiència estava formada per físics als quals intentava explicar les matemàtiques rellevants» i el tercer, «una nota breu amb Singer en què resumim el nostre punt de vista».

CW5[119]. «Anomalies and index theory». Springer, 1984, 313–322. (Lecture Notes in Phys., 208)

CW5[121]. «Topological aspects of anomalies». A: *Symposium on Anomalies, Geometry, Topology*. World Scientific Press, 1984, 22–32.

CW5[120] (amb I. M. Singer). «Dirac operators coupled to vector potentials». *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 81, 8 (1984), 2597–2600.

► **77.** L'*Arbeitstagung* del 1984 a Bonn celebrà la vint-i-cinquena edició i, per primera vegada, se'n van publicar els *proceedings*. L'article que següent correspon a la conferència d'Atiyah, en què presentà «els bells resultats de Witten i Vafa [...] que demostren *desigualtats* per a valors propis [de l'operador de Dirac] mitjançant mètodes topològics»:

CW5[123]. «Eigenvalues of the Dirac operator». A: *Proceedings of the 25th Mathematics Arbeitstagung, Bonn, 1984*. Springer, 1985, 251–260. (Lecture Notes in Math.; 1111)

L'objecte del treball presentat en homenatge a Schwartz era explicar l'argument heurístic que Witten comunicà a Atiyah durant la Conferència Solvay per obtenir el teorema de l'índex per a l'operador de Dirac a partir de la fórmula de Duistermaat–Heckman (fórmula que Atiyah i Bott havien demostrat a partir del seu teorema de localització de la cohomologia equivariant de De Rham):

CW5[124]. «Circular symmetry and stationary-phase approximation». *Colloquium in honour of Laurent Schwartz*. Vol. 2. *Astérisque* (1985), 43–60.

«[...] les meves paraules van caure en terra fèrtil, perquè [Jean-Michel] Bismut [n. 1948] era a l'audiència i immediatament va començar a fornir demostracions rigoroses de les idees de Witten.»[55]

55 Podeu trobar una versió actualitzada d'aquestes i altres qüestions en el *preprint*

► **78.** Examinem primer el naixement de les teories quàntiques de camps topològiques. L'any 1987, es va celebrar a la Universitat de Duke un simposi organitzat per l'AMS sobre el llegat matemàtic de Hermann Weyl (1885-1955). Entre els conferenciants, hi havia Atiyah, Bott, Langlands, Penrose, Singer, Witten,etc. Trobem la conferència d'Atiyah en el volum publicat un any després:

CW6[131]. «New invariants of 3- and 4-dimensional manifolds». A: *The mathematical heritage of Hermann Weyl.* AMS, 1988, 285–299. (*Proc. of Symposia in Pure Maths.*; 48)

«Les noves perspectives en geometria obertes per Donaldson i Witten van transformar la disciplina a la darrera part del segle XX [...]. La teoria de Donaldson i els nous invariants polinòmics de nusos de Vaughan Jones [n. 1952][56] [em van incitar a] especular sobre la possible significació física d'aquests resultats geomètrics. El repte fou pres seriosament per Witten en els anys següents i [això] va portar a l'emergència de les teories quàntiques de camps topològiques (TQFT).»

Les idees del treball anterior van ser presentades en forma axiomàtica, «que em va semblar més del grat dels matemàtics», en el simposi d'homenatge a René Thom en ocasió del seu seixanta-cinquè aniversari:

CW6[132]. «Topological quantum field theories». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 68 (1989), 175–186. (René Thom Symposium)

Finalment, el novembre del 1988, Atiyah imparteix una sèrie de conferències a la Universitat de Florència, per invitació de l'Accademia Nazionale dei Lincei, que acaben en una altra memòria magistral:

CW6[136]. *The geometry and physics of knots.* Cambridge University Press, 1990. [Lincei lectures]

Aquesta obra, publicada l'any que Atiyah compleix seixanta anys, clou la dècada iniciada amb l'aparició de *The geometry of Yang–Mills fields.* Tot i la seva brevetat, és un compendi de les idees sobre teories quàntiques de camps topològiques desenvolupades fins aleshores i una font d'idees per al futur.

Tanmateix, encara cal esmentar, per cloure aquest comentari, dos articles més. El primer aporta un tractament elemental d'un treball de Witten en què estén a varietats arbitràries de dimensió 3 la teoria de Jones d'invariants de nusos sobre l'esfera de dimensió 3, el qual té relació amb la qüestió de les anomalies, i el segon és la citació sobre l'obra de Witten en ocasió de ser-li atorgada la Medalla Fields a l'ICM de Kyoto:

CW6[137]. «On framings of 3-manifolds». *Topology*, 29 (1), (1990), 1–7.

CW6[129]. «On the work of Edward Witten». A: *Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Kyoto, Japan, 1990)*, 31–35.

► **79.** CW1[12]. «How research is carried out». *Bull. IMA*, 10 (1974), 232–234.

«Duistermaat–Heckman formulas and index theory»: http://www.math.u-psud.fr/~bismut/.

56 Doctorat el 1979 amb la tesi *Actions of finite groups on the hyperfinite II1 factor*, dirigida per André Haefliger, fou guardonat amb la Medalla Fields a l'ICM del 1990 (Kyoto).

CW1[14]. «William Vallance Douglas Hodge 1903-1975». *Biog. Mem. Fellows R. Soc. Lond.*, 22 (1976), 169–192.

CW1[16]. «Trends in pure mathematics». A: *Proc. 3rd Int. Congress on Math. Education (Karlsruhe, 1976). 3rd ICME Proc.* 1977, 71–74.

CW1[17]. «The unity of mathematics». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 10 (1978), 69–76.

CW1[21]. *Geometry and analysis in the nineteen eighties.* Coll. for the 25th anniversary, IHES (1984).

CW1[23]. «Identifying progress in mathematics». A: *ESF Conference in Colmar*. Cambridge University Press, 1985, 24–41.

CW5[122]. «Commentary of Manin's manuscript *New dimensions in geometry*». A: *Proceedings of the 25th Mathematics Arbeitstagung, Bonn, 1984.* Springer, 1985, 103–109. (Lecture Notes in Math.; 1111)

Aquest comentari és «un rar cas en què vaig posar sobre paper la mena d'especulació desbridada que usualment només em permeto verbalment. Això és arriscat, però potser pot tenir un propòsit útil per mostrar que els matemàtics no som els formalistes rigorosos que les nostres publicacions suggereixen i que ens permetem fer volar la imaginació sense limitacions».

► **80.** CW5[102]. (amb J. D. S. Jones). «Topological aspects of Yang-Mills theory». *Commun. Math. Phys.*, 61 (1978), 97–118.

CW5[101] «Green's functions for self-dual four-manifolds». *Advances in Mathematics Supplementary Studies*, vol. 7A (1981), 129–158.

Mostra com deduir la funció de Green de les varietats de dimensió 4 amb els mètodes de *twistors* (transformada de Penrose).

CW5[103]. «Remarks on Morse theory». A: *Recent developments in gauge theories.* Plenum, 1980, 1–5.

CW6[127] «The logarithm of the Dedekind η-function». *Math. Ann.*, 278 (1987), 335–380.

Aquest llarg treball, dedicat a Hirzebruch, fou el tema de les «Rademacher lectures» que Atiyah impartí a la Universitat de Pennsilvània el 1987 i està «centrat en els aspectes cohomològics i aritmètics de la funció η de Dedekind, interpretada de diverses maneres en termes del teorema de l'índex».

CW6[130]. «Hyper-Kähler manifolds». A: *Proc. of Complex Geometry and Analysis, Pisa, 1988.* Springer, 1990, 1–14. (Lecture Notes in Math.; 1422)

Article expositiu sobre les varietats hiperkählerianes. Les varietats kählerianes es poden definir com a varietats riemannianes X dotades d'una transformació ortogonal I de TX covariantment constant i tals que $I^2 = -1$. Anàlogament, les varietats hiperkählerianes es poden definir com a varietats riemannianes X dotades de tres transformacions ortogonals I, J i K de TX covariantment constants i tals que $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ (identitats de les unitats quaternióniques). Dit d'una altra manera, els espais tangents de X tenen una estructura de $\mathbb{H}$-espai vectorial que és covariantment constant. L'interès d'aquestes varietats està en què apareixen «en una diversitat de contextos» i són objecte d'«una puixant teoria» (CW6.217). Per exemple, els espais de moduli de Yang–Mills, i en particular els dels monopols, són hiperkählerians.

CW6[145]. «Topology and differential equations». A: *Proc. of the First International Conf. on Industrial and Appl. Math. SIAM Philadelphia 1988.*

CW6[134]. «Geometry, topology and physics» *Quart. J. Astrophysics Soc.*, 29 (1988), 287–299. (Eleventh Arthur Milne Lecture, Oxford University).

Dóna una concisa visió panoràmica de molts dels temes de la memòria *The geometry and physics of knots.*

CW6[138] (amb G. B. Segal). «On equivariant Euler characteristics». *J. Geom. Phys.*, 6 (4) (1989), 671–677.

«[...] possiblement la primera indicació que la teoria K podria ser rellevant en la teoria de cordes (més enllà de la teoria de l'índex).»

CW6[139] (amb L. Jeffrey). «Topological Lagrangians and cohomology». *J. Geom. Phys.*, 7 (1) (1990), 119–136.

Lisa Jeffrey es doctorà el 1991, sota la direcció d'Atiyah, amb la tesi *On some aspects of Chern-Simons gauge theory.*

► **81.** El treball CW6[126] (▷ **74**) sobre monopols «havia estat molt influït per Nick Manton, a qui havia conegut com a estudiant graduat a Cambridge», ja que fou qui li va dir que «la mètrica en l'espai de moduli dels monopols hauria de determinar la dinàmica a baixes energies». Posteriorment, «em va fer interessar pels *skyrmions*», i d'això en van derivar els dos articles següents:

CW6[141] (amb N. S. Manton). «Skyrmions from instantons». *Phys. Lett. B*, 222 (3,4) (1989), 438–442.

CW6[142] (amb N. S. Manton). «Geometry and kinematics of two skyrmions». *Comm. in Math. Phys.*, 152 (1993), 391–422.

Els *skyrmions* són «un model clàssic de solitó no lineal del nucli atòmic que havia estat introduït molt abans per Tony Skyrme [...]. Nick estava convençut que els *skyrmions* tenien alguna cosa en comú amb els monopols. Després de molt de debat, finalment, vam trobar una connexió (de fet, via instantons)».

► **82.** CW6[151]. «The Dirac equation and geometry». A: *Paul Dirac: The man and his work.* Cambridge University Press, 1998, 108–124.

El 1995, la RS va col·locar una placa a l'abadia de Westminster en memòria d'un dels físics més eminents, Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), i va organitzar una conferència per glossar la seva vida i obra. Vista la profunda importància de l'operador de Dirac en l'obra d'Atiyah, és molt natural que fos un dels invitats, com també ho és que el tema que escollí fos, com ho indica el títol, una visió de conjunt del «paper de l'operador de Dirac en les matemàtiques». Els textos corresponents es van aplegar en un petit volum, editat per Peter Goddard, que hi contribueix amb un prefaci. A més d'Atiyah, hi trobem Abraham Pais, amb un article de caràcter biogràfic; Maurice Jacob, que s'ocupa de l'antimatèria, i David I. Olive, que tracta sobre monopols. El volum també recull, després del prefaci, una exquisida al·locució de Stepen Hawking (n. 1942) en què se subratllen els principals mèrits científics de Dirac. A més del nom i la professió (físic), l'elegant placa de Westminster immortalitza l'equació de Dirac en la forma

$$i\gamma \cdot \partial\psi = m\psi.$$

► **83.** Comencem amb quatre peces sobre «la relació general entre geometria i física»:

CW6[143]. «Responses to "Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of Mathematics and Theoretical Physics" per A. Jaffe i F. Quinn» *Bull. Amer. Math. Soc.*, 30 (2) (1994), 178–179.

Una resposta a «un article deliberadament provocatiu de Jaffe i Quinn».

CW6[144]. «Reflections on Geometry and Physics». *Surv. Differ. Geom.*, 2 (1995), 1–6.

CW6[145]. «Topology and differential equations». A: *Proc. of the First International Conf. on Industrial and Appl. Math. SIAM Philadelphia, 1988.*

CW6[146]. «Mathematics and the real world». *Quart. Appl. Math.*, 56 (4) (1998), 807–812.

Aquest darrer article és el discurs que pronuncià a la Universitat Brown el 1997 quan fou investit DHC.

CW6[147]. «Mathematics: Queen and servant of the Sciences». *Proc. Amer. Philosophical Soc.*, 137 (4) (1993), 527–531.

CW6[148]. «American Philosophical Society Dinner Address, 30 April 1993». *Proc. APS*, 137 (4) (1993), 704–707.

CW6[149]. «Anniversary address by the president». *Supplement of the Royal Society News* 7 desembre 1994, I-IV.

CW6[150]. Ressenya a *The Times Higher Education Supplement* de *Conversations on mind, matter and mathematics* de Jean-Pierre Changeux i Alain Connes. (Princeton University Press; 1995).

CW6[152]. «Friedrich Hirzebruch—an Appreciation». *Israel Math. Conf. Proc.*, 9 (1996), 1–5.

CW6[154]. *Contribution to the Collected Works of Raoul Bott.* Vol. 2. Birkhäuser, 1994.

CW6[155]. «Roger Penrose: A personal appreciation». A: HUGGETT, S. A. *et al.* [ed.]. *The geometric universe: Science, geometry and the work of Roger Penrose.* Oxford University Press, 1998, 3–7.

El volum on apareix aquest article aplega les contribucions presentades al simposi «Geometric issues in the foundations of science», organitzat el 1996 a Oxford per celebrar el seixanta-cinquè aniversari de Penrose. Per a Atiyah, fou «l'oportunitat de reconèixer la influència del col·lega acadèmic a Oxford i antany company d'estudis».

► **84.** CW6[163]. «The geometry of classical particles». A: *Surveys in differential geometry*. Vol. 7. International Press, 2001, 1–15.

CW6[164]. «Equivariant cohomology and representations of the symmetric group». *Chinese Ann. Math.*, 22B (2001), 23–50.

CW6[165]. «Configurations of points». *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 359 (2001), 1375–1387.

En aquest treball, defineix un determinant associat a n punts diferents de $\mathbb{R}^3$ (en direm *determinant d'Atiyah*) i reformula la seva conjectura afirmant que aquest determinant no s'anul·la mai. El treball que segueix conté, entre altres coses, extenses evidències numèriques a favor de la conjectura.

CW6[166] (amb P. Sutcliffe) «The geometry of point particles». *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 458 (2002), 1089–1115.

CW6[167] (amb P. Sutcliffe). «Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry». *Milan J. Math.*, 7 (2003), 33–58.

Aquest segon article és la versió escrita de la Conferència Leonardo impartida per Atiyah a Milà l'octubre del 2001. Els resultats que s'hi exposen es van originar per l'estudi de les configuracions de punts que maximitzen el valor absolut del determinant d'Atiyah, les quals resulten «remarcablement simètriques i similars a les que apareixen en una diversitat de problemes físics».

CW6[168] (amb R. Bielawski). «Nahm's equations, configuration spaces and flag manifolds». *Bull. Braz. Math. Soc. New Series*, 33 (2) (2002), 157–176.

Conté una altra solució del problema de Berry–Robbins, obtinguda en un estudi de l'equació de Nahm motivat per algunes qüestions de física.

► **85.** CW6[169] (amb J. Maldacena i C. Vafa). «An M-theory flop as a large N duality». *J. Math. Phys.*, 42 (7) (2001), 3209–3220.

CW6[170] (amb E. Witten). «M-theory dynamics on a manifold of G_2-holonomy». *Adv. Theor. Math. Phys.*, 6 (2001), 1–106.

Aquesta llarga memòria és el fruit de les discussions amb Witten al California Institute of of Technology (Caltech), quan Atiyah visità aquesta institució durant dos mesos. «Vaig aprendre-hi molta més física i vaig contribuir-hi amb una modesta porció de topologia», diu com a valoració d'aquesta iniciativa.

CW6[171] (amb J. Berndt). «Projective planes, Severi varieties and spheres». *Surveys in Differential Geometry: Papers in honor of Calabi, Lawson, Siu and Uhlenbeck*. Vol. 8. International Press, 2003, 1–28.

En una conferència a Durham, Atiyah va parlar d'alguns aspectes del seu article amb Witten i, aleshores, Jürgen Brendt, un dels assistents, li va suggerir que «els resultats sobre el pla projectiu quaterniònic s'haurien d'estendre al pla de Cayley i, fins a tot, a un cert espai homogeni del grup excepcional E_6». Això va portar a aquest article conjunt i al que en diu «la meva formació en els grups de Lie excepcionals».

Els tres darrers articles s'ocupen de generalitzacions de la teoria K motivades per la física:

CW6[172] (amb M. Hopkins). «A variant of K-theory: $K_{\pm}$». *Topology, geometry and quantum field theory: Proceedins of the 2002 Oxford Symposium in honour of the 60th birthday of Graeme Segal*. Cambridge Univ. Press, 2004. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.)

CW6[173] (amb G. Segal). «Twisted K-theory». *Ukr. Mat. Visn.*, 1 (3) (2004), 287–330.

(amb G. Segal) «Twisted K-theory and cohomology». A: *Inspired by S. S. Chern: A memorial volume in honor of a great mathematician*. World Scientific; 2006, 5–43. (Nakai Tracts Math. 11)

Aquest darrer article no apareix a CW6, però certament s'ha de considerar conjuntament amb l'últim del volum, CW6[173].

► **86.** «Riemann's influence in geometry, analysis and number theory». *Conferències FME. Vol. 5: Curs Riemann, 2007-2008*, 55–68.

«Duality in mathematics and physics». *Conferències FME. Vol. 5: Curs Riemann, 2007-2008*, 69–91. «La dualitat és una de les idees més velles i fructíferes de les matemàtiques. Donaré una visió panoràmica de la seva història, en què mostraré com s'ha anat generalitzant constantment i com ha guiat el desenvolupament de les matemàtiques. Finalment, considerarem algunes de les idees i conjectures més recents tant en matemàtiques com en física» (del resum al principi de l'article).

La versió digital d'aquests treballs es pot trobar al web de la FME.

► **87.** CW6[153]. «K-theory past and present: (In honour of Friedrich Hirzebruch)». *Sitzungsberichte Berliner Math. Gesellschaft 1997-2000* [Berlín] (2001).

CW6[156]. «John Arthur Todd (1908-1994)». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 30 (1998), 305–316.

CW6[157]. «Kunihiko Kodaira (Obituary)». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 31 (1999), 489–493.

CW6[158]. *Hermann Weyl*. Nat. Acad. Sci. USA, 2002, 3–17. (Biographical Memoirs; 82)

«Weyl va morir l'any 1955, però, per alguna raó, la National Academy of Sciences no n'havia publicat un obituari en els anys següents a la seva mort. Vaig sorprendre'm molt, després de tants anys, quan se'm va demanar d'escriure'n un. Vista l'amplitud i la importància del treball de Weyl, produir un obituari realment exhaustiu hauria estat una tasca hercúlia, i potser per això el projecte es va endarrerir. Però Weyl ha estat un dels meus herois, i l'actual interacció entre geometria i física està tant en l'esperit del treball de Weyl que vaig jutjar que no podia renunciar-hi. Vaig aprofitar l'ocasió per valorar les contribucions de Weyl considerant restrospectivament el progrés dels darrers cinquanta anys, amb èmfasi en la relació amb la física.»

CW6[125]. «A personal history». A: Yau, S. T. [ed.]. *The founders of index theory: Reminiscences of Atiyah, Bott, Hirzebruch and Singer*. International Press, 2004.

► **88.** CW6[146]. «Mathematics and the real world». *Quart. Appl. Math.*, 56 (4) (1998), 807–812.

Discurs en ocasió de ser investit DHC per la Universitat Brown.

CW6[159]. «Geometry and physics in the 20th century». A: *Proc. Internat. Conf. «The Mathematical Sciences after the year 2000» (Beirut, 1999)*. Singapur: World Scientific, 2000.

És l'escrit d'una conferència pronunciada en l'obertura del centre matemàtic Michael Atiyah de la Universitat Nord-americana de Beirut, al Líban.

CW6[160]. «Mathematics in the 20th Century». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 34 (2002), 1–15.

Text d'una conferència impartida a molts indrets arreu del món i reproduïda en moltes revistes en diversos idiomes, que dóna «una visió panoràmica retrospectiva, feta a grans pinzellades, de les matemàtiques del segle XX».

CW6[161]. Prefaci a *Mathematics: Frontiers and perspectives*, IMU, 2000.

La IMU va encarregar un volum especial per a l'any 2000, del qual Atiyah fou un dels editors. Fou un contrapunt col·lectiu a la tasca individual de Hilbert que va dur a la llista de problemes presentada a l'ICM del 1900 (París). «No vaig poder contribuir-hi amb cap article, però els meus coeditors em van permetre amablement d'escriure un llarg prefaci.»

CW6[162]. «The interaction of geometry and physics». A: *The unity of mathematics: In honour of the ninetieth birthday of I. M. Gel'fand*. Birkhäuser, 2004.

En ocasió del norantè aniversari de Gel'fand, el 2003, es va organitzar una conferència a Harvard per celebrar-lo. El treball presentat per Atiyah es pot considerar la seva versió més actualitzada de la interacció entre geometria i física. «Conclou amb algunes especulacions sobre la significació futura d'aquests desenvolupaments tant per a les matemàtiques com per a la física.»

Referències

[1] «Atiyah80: Geometry and Physics». Conferència organitzada per l'International Center for Mathematical Sciences de la Universitat d'Edimburg i la Royal Society of Edinburg (20-22 abril 2009): http://www.icms.org.uk/workshops/atiyah80. Per a l'actualització de la informació després de la conferència, v. [2].

[2] Ranicki, A.: http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/atiyah80.htm. Conté materials molt diversos en relació a, [1]. En particular, s'hi poden trobar vídeos de les conferències i els corresponents jocs de transparències.

[3] Tercer Congrés Europeu de Mathemàtiques (Barcelona, 10-14 juliol 2000). Organitzat per la Societat Catalana de Matemàtiques per encàrrec de la Societat Matemàtica Europea.

[4] XAMBÓ, S. *Laudatio de Sir Michael Atiyah.* Inclosa en l'opuscle publicat per la Universitat Politècnica de Catalunya en commemoració de l'acte d'investidura d'Atiyah com a doctor *honoris causa*. Conté, en l'annex, el text inclòs en la invitació a l'acte d'investidura, i la podeu trobar a http://www-ma2.upc.edu/sxd/Atiyah/Laudatio-Atiyah.pdf. Aquest material, junt amb el discurs de recepció d'Atiyah (també inclòs en l'opuscle esmentat), fou publicat en el núm. 25 de *SCM/Notícies*, 7–14, amb el títol «Sir Michael Atiyah, doctor *honoris causa*».

[5] XAMBÓ, S. *The life and work of professor Sir Michael Atiyah*: http://www-ma2.upc.edu/sxd/Atiyah/Atiyah's Life & work.html

[6] HOLDEN, H.; PIENE, R. [ed.]. *The Abel Prize 2003-2007: The first five years.* Springer, 2010.

[7] HITCHIN, N. *The Atiyah–Singer index theorem.* Inclòs a [6], p. 115–150.

[8] ATIYAH, M. «Autobiography». Text lliurat a l'«Abel Prize Committee». 2004. Inclòs a [6], p. 99–107.

[9] Referències generals: (*a*1) WARNER, F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Co., 1971: (*a*2) KAHN, D. W. *Introduction to global analysis.* Academic Press, 1980; (*a*3) FRANKEL, T. *The geometry of physics: An introduction.* Cambridge University Press, 1997; (*a*4) WELLS, R. O. JR. *Differential analysis on complex manifolds.* Prentice Hall, 1973; (*a*5) GRIPHITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of algebraic geometry.* Wiley, 1978.

(*b*1) ADAMS, J. F. *Algebraic topology: A: student's guide.* Cambridge University Press, 1972; (*b*2) HUSEMOLLER, D. *Fibre bundles.* 2a ed. Springer, 1974; (*b*3) MAY, J. P. *A concise course in algebraic topology* (v. http://www.math.uchicago.edu/ may/); (*b*4) MILNOR, J.; STASHEFF, J. *Characteristic classes.* Princeton University Press: University of Tokio Press, 1974; (*b*5) MILNOR, J. *Morse theory.* Princeton University Press, 1969. (Annals of Mathematic Studies; 51) [3a impr. amb correccions; la 1a impr.: 1963]

(*c*1) CARTER, R.; SEGAL, G.; MACDONALD, I. *Lectures on Lie groups and Lie algebras.* Cambridge University Press, 1995. (LMS Student Texts; 32); (*c*2) ADAMS, F. *Lectures on Lie groups.* Benjamin, 1969; (*c*3) FULTON, W.; HARRIS, J. *Representations theory: A first course.* Springer, 2004. (GTM; 129)

(*d*1) BLEECKER, D. *Gauge theory and variational principles.* Addison-Wesley, 1981; (*d*2) NABER, G. L. *Topology, geometry and gauge fields: Foundations.* Springer, 1997. (Applied Mathematics; 25); *Interactions.* Springer; 2000. (Applied Mathematics; 141); (*d*3) GIRARD, P. R. *Quaternions, Clifford algebras and relativistic physics.* Birkhäuser, 2007.

(*e*1) Maggiore, M. *A modern introduction to quantum field theory.* Oxford University Press, 2005. (*e*2) Folland, G. B. *Quantum field theory. A tourist guide for mathematicians.* AMS, 2008. (Mathematical Surveys and Monographs; 149); (*e*3) Cottingham, W. N.; Greenwood, D. A. *An introduction to the standard model of particle physics.* Cambridge University Press, 1998.

[10] Hirzebruch, F. *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Springer, 1956. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 9)

[11] Hirzebruch, F. *Topological methods in algebraic geometry.* Springer, 1966. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 131) És la traducció a l'anglès de [10], a càrrec de Rolph Schwarzenberger, augmentada amb dos apèndixs, un de Schwarzenberger, emfocat a exposar diverses extensions dels resultats de la primera versió, i un altre d'Armand Borel, que estableix una successió espectral per a fibrats holomorfs.

[12] Bott, R. *Lectures on $K(X)$.* Benjamin, 1969. Inclou l'article CW2[40] (v. p. 184) com a apèndix i, en un annex, l'article «The stable homotopy of the classical groups», publicat per l'autor als AM (vol. 70, núm. 2, 1959).

[13] Lawson, H. B. Jr.; Michelson, M.-L. *Spin Geometry.* Princeton University Press, 1989. (Princeton Mathematical Series; 38)

[14] Palais, R. S. [ed.]. *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem.* Princeton University Press, 1965. (Annals of Mathematics Studies; 57). L'apèndix 1 d'aquest volum, un treball d'Atiyah fet conjuntament amb Bott, es titula «The index theorem for manifolds with boundary».

[15] Friedlander, S.; Goresky, M. «The IAS School of Mathematics at 75». *Notices of the AMS*, 52, 8 (2005), 859–863.

[16] Atiyah, M. Conferències FME. Vol. V Curs Riemann, 2007-2008: *a)* «Riemann's iInfluence in geometry, analysis and number theory», 55–68. *b)* «Duality in mathematics and physics», 69–91. Barcelona: Facultat de Matemàtiques i Estadística, 2008.

[17] Atiyah, M. *What is mathematics?* Discurs de recepció del doctorat *honoris causa* per la Universitat Politècnica de Catalunya (25 abril 2008).

Sigles

AM	*Annals of Mathematics*
AMS	American Mathematical Society
Caltech	California Institute of Technology
CIME	Centro Internazionale Matematico Estivo
CRM	Centre de Recerca Matemàtica

DHC	Doctor *honoris causa*
EMS	Societat Matemàtica Europea
FME	Facultat de Matemàtiques i Estadística (UPC)
GRR	Grothendieck–Riemann–Roch
HRR	Hirzebruch–Riemann–Roch
IAS	Institute for Advanced Study (Princeton)
ICM	International Congress of Mathematicians
IEC	Institut d'Estudis Catalans
IMU	International Mathematical Union
LMS	London Mathematical Society
MA	Mathematical Association
MGS	Manchester Grammar School
MIT	Massachusetts Institute of Technology
MPIM	Max Planck Institut für Mathematik
OM	Ordre del Mèrit
RR	Riemann-Roch
RS	Royal Society
RSE	Royal Society of Edinburgh
SCM	Societat Catalana de Matemàtiques (IEC)
UPC	Universitat Politècnica de Catalunya

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
C/ Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona
sebastia.xambo@upc.edu