

Sistemas de EDOs lineales

PRELIMINARES

Definiciones básicas. Un sistema de EDOs lineales de primer orden (en forma normal) es de la forma

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

donde $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I . Por analogía al caso de las EDOLs, diremos que este sistema lineal (SL) es:

- *homogéneo*, cuando $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$;
- *a coeficientes constantes*, cuando la matriz $A(t)$ no depende del tiempo; y
- *a coeficientes periódicos*, cuando la matriz $A(t)$ es periódica.

Teorema de existencia y unicidad. Si $A = A(t)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ son continuas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces el PVI lineal

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

tiene exactamente una solución global; es decir, una única solución definida en todo el intervalo I .

Derivadas de funciones matriciales. Veamos como derivar las combinaciones lineales, productos, inversas y determinantes de funciones matriciales derivables. Una función matricial es derivable cuando todos sus elementos son funciones derivables.

1. Cualquier combinación lineal de matrices derivables también es derivable:

$$(\alpha A(t) + \beta B(t))' = \alpha A'(t) + \beta B'(t), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. El producto de matrices derivables es derivable: $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$.
3. La inversa de una matriz invertible derivable es derivable: $(A^{-1}(t))' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)$.
4. El determinante de una matriz derivable es una función derivable:

$$(\det[A(t)])' = \sum_{j=1}^n \det[\mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}'_j(t), \dots, \mathbf{a}_n(t)],$$

donde $\mathbf{a}_1(t), \dots, \mathbf{a}_n(t)$ son las n columnas de la matriz $A(t)$.

Conviene recordar al operar con matrices que el producto de matrices no es conmutativo.

SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS A COEFICIENTES VARIABLES

A lo largo de esta sección supondremos que $A(t)$ es una función matricial $n \times n$ continua definida sobre un intervalo arbitrario $I \subset \mathbb{R}$.

Estructura de las soluciones. Las soluciones del sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ forman un subespacio vectorial de dimensión n que podemos parametrizar, una vez fijado un instante $t_0 \in I$ arbitrario, mediante la condición inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Veámoslo.

Lema. Si $\mathbf{x}(t)$ es una solución de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, entonces o bien $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$, o bien $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t .

Demostración. Si existe un instante $t_0 \in I$ tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}(t)$ y la función idénticamente nula son soluciones del PVI $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. Por tanto, $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ por unicidad de soluciones. \square

Definición. La solución $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ se denomina *solución trivial*.

Lema (Principio de superposición). Si $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ son dos soluciones arbitrarias de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, entonces cualquier combinación lineal de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

también es solución de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.

Demostración. $\mathbf{x}' = (c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2)' = c_1\mathbf{x}'_1 + c_2\mathbf{x}'_2 = c_1A(t)\mathbf{x}_1 + c_2A(t)\mathbf{x}_2 = A(t)(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = A(t)\mathbf{x}$. \square

Proposición. Sea \mathcal{F} el conjunto formado por todas las soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Sea $\mathbf{x}(t) = \phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ la solución del PVI

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Entonces:

1. La aplicación $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x}_0 \mapsto \phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal para todo $t, t_0 \in I$.
2. \mathcal{F} es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ de dimensión n .

Demostración. Sean $t, t_0 \in I$ instantes fijados pero arbitrarios. Entonces la aplicación

$$\phi(t; t_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x}_0 \mapsto \phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$$

es lineal (como consecuencia del principio de superposición), inyectiva (como consecuencia del primer lema) y exhaustiva (pues \mathbb{R}^n es un espacio vectorial de dimensión finita).

Sabemos que cualquier solución $\mathbf{x}(t)$ está definida y es continua en I , luego $\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ también es continua en I . Esto prueba que $\mathcal{F} \subset C^1(I; \mathbb{R}^n)$. El principio de superposición implica que \mathcal{F} es un subespacio vectorial. Finalmente, como las soluciones del sistema están en correspondencia biyectiva con las condiciones iniciales, tenemos que $\dim \mathcal{F} = \dim \mathbb{R}^n = n$. \square

Observación. Complexificar la matriz del sistema no produce ningún cambio apreciable. Por ejemplo, si $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces las soluciones de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ forman un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión compleja n . En cambio, complexificar la variable independiente t nos metería de lleno en la variable compleja. Lo evitaremos por falta de tiempo. Escribiremos \mathcal{M}_n para denotar indistintamente el conjunto de matrices $n \times n$ a coeficientes reales o complejas.

Observación. Sean $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ soluciones del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ y sea $w(t) = \det[\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)]$ su determinante, que recibe el nombre de *Wronskiano*. Como la aplicación $\phi(t; t_0, \cdot)$ es un isomorfismo de \mathbb{R}^n para todo $t, t_0 \in I$, deducimos que o bien $w(t) \equiv 0$ o bien $w(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definición. Cualquier base $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$ del subespacio vectorial \mathcal{F} es un *conjunto fundamental (de soluciones)* del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.

Definición. Decimos que la matriz $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ es:

- Una *solución matricial* del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ cuando sus columnas son soluciones del sistema; es decir, cuando $X'(t) = A(t)X(t)$;
- Una *matriz fundamental* del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ cuando sus columnas son soluciones linealmente independientes del sistema; es decir, cuando $X'(t) = A(t)X(t)$ y $\det[X(t)] \neq 0$ para todo $t \in I$;
- La *matriz principal en el instante t_0* del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ cuando sus columnas son soluciones del sistema y $X(t_0) = \text{Id}$.

La proposición y las definiciones anteriores permiten hacer los siguientes comentarios.

- Dado cualquier instante $t_0 \in I$ y cualquier base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de \mathbb{R}^n , las soluciones

$$\mathbf{x}_j(t) = \phi(t; t_0, \mathbf{v}_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema, luego su solución general es

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

- Si $X(t)$ es una matriz fundamental arbitraria del sistema, entonces su solución general es

$$\mathbf{x}_h(t) = X(t)\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

- En el caso complejo deberíamos escribir $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$, respectivamente.

- Como $\phi(t; t_0, \cdot)$ es un isomorfismo de \mathbb{R}^n , sabemos que $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \Phi(t; t_0)\mathbf{x}_0$ para alguna una matriz invertible $\Phi(t; t_0) \in \mathcal{M}_n$. Además, $\Phi(t; t_0)$ es la (única) solución del PVI matricial

$$D_t \Phi(t; t_0) = A(t)\Phi(t; t_0), \quad \Phi(t_0; t_0) = \text{Id}.$$

Es decir, $\Phi(\cdot; t_0)$ es la matriz principal en el instante t_0 .

- Hay infinitas matrices fundamentales, pero una única matriz principal en cada instante $t_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1. Probaremos en el ejemplo 16 que las funciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Además, la matriz obtenida al poner en columnas estas soluciones tiene determinante no nulo:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix} \implies \det[X(t)] = -e^{t^2/2+t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)\}$ es un conjunto fundamental, $X(t)$ es una matriz fundamental y

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = X(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1e^{t^2/2} + 2c_2e^t \\ c_1e^{t^2/2} + c_2e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

es la solución general del sistema.

Proposición (Relación entre matrices fundamentales). *Dadas dos matrices fundamentales arbitrarias $X(t)$ e $Y(t)$ del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, existe una única matriz invertible $S \in \mathcal{M}_n$ tal que*

$$Y(t) = X(t)S.$$

En particular, $\Phi(t; t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ para toda matriz fundamental $X(t)$.

Demostración. Empezamos comprobando que la derivada del producto $X^{-1}Y$ es idénticamente nula:

$$(X^{-1}Y)' = (X^{-1})'Y + X^{-1}Y' = -X^{-1}X'X^{-1}Y + X^{-1}Y' = -X^{-1}A(t)XX^{-1}Y + X^{-1}A(t)Y = \mathbf{0}.$$

Por tanto, existe una matriz constante $S \in \mathcal{M}_n$ tal que $Y(t) = X(t)S$. La unicidad está clara, pues $S = X^{-1}(t_0)Y(t_0)$. Además, $\det[S] = \det[Y(t_0)]/\det[X(t_0)] \neq 0$. Finalmente, si buscamos S tal que $\Phi(t; t_0) = X(t)S$ y evaluamos en $t = t_0$, obtenemos que $S = X^{-1}(t_0)$. \square

La matriz S de la proposición anterior se puede interpretar como la matriz del cambio de base entre las bases de \mathcal{F} asociadas a las columnas de ambas matrices fundamentales.

Proposición (Fórmula de Liouville). *Si $X(t)$ es una solución matricial de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, entonces*

$$\det[X(t)] = \det[X(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t \text{traza}[A(s)] ds\right), \quad \forall t, t_0 \in I.$$

Demostración. Probamos un resultado equivalente. A saber, que el determinante de cualquier solución matricial cumple la EDO lineal homogénea de primer orden

$$(\det[X(t)])' = \text{traza}[A(t)] \cdot \det[X(t)].$$

Distinguiamos dos situaciones diferentes a la hora de probar la validez de la EDO anterior.

En primer lugar, suponemos que $X(t)$ no es una matriz fundamental, luego su determinante es idénticamente nulo (sus columnas son linealmente dependientes) y es la solución trivial de la EDO.

En segundo lugar, suponemos que $X(t)$ es una matriz fundamental. En tal caso, sus columnas $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ son una base de \mathbb{R}^n para todo $t \in I$, luego existen unas funciones $c_{ij}(t)$ tales que

$$\mathbf{x}'_j(t) = A(t)\mathbf{x}_j(t) = \sum_{i=1}^n c_{ij}(t)\mathbf{x}_i(t), \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall t \in I.$$

Es decir, la matriz $C(t) = (c_{ij}(t))$ es la matriz del endomorfismo lineal $A(t) : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto A(t)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ en la base $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\}$. En otras palabras, $C(t) = X^{-1}(t)A(t)X(t)$. Operando, vemos que

$$\begin{aligned} (\det[X(t)])' &= \sum_{j=1}^n \det[\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}'_j(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)] = \sum_{j=1}^n \det \left[\mathbf{x}_1(t), \dots, \sum_{i=1}^n c_{ij}(t)\mathbf{x}_i(t), \dots, \mathbf{x}_n(t) \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^n c_{ii}(t) \right) \det[\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_j(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)] = \text{traza}[A(t)] \cdot \det[X(t)]. \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad hemos usado que el determinante es una aplicación multilineal alternada. Y en la última hemos usado que la traza de un endomorfismo no depende de la base escogida. \square

La fórmula de Liouville junto a las ecuaciones variacionales respecto la posición permiten estudiar como evoluciona el volumen de una región del espacio bajo la acción del flujo de un sistema de EDOs de primer orden. En el siguiente teorema, $\text{med}(M)$ denota la medida de Lebesgue de un conjunto medible $M \subset \mathbb{R}^n$, mientras que

$$\text{div } \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \text{traza}[D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \mathbf{x})] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, \mathbf{x})$$

denota la *divergencia* de un campo de vectores $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ respecto la posición $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Teorema (Evolución de un volumen por un flujo general). *Sea $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sea $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ el flujo del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, que es de clase C^1 en un abierto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sea M_0 un medible de \mathbb{R}^n y sean $t, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ para todo $\mathbf{x}_0 \in M_0$. Entonces $M = \{\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \in M_0\}$ también es un medible de \mathbb{R}^n y*

$$\text{med}[M] = \int_{M_0} \exp \left(\int_{t_0}^t \text{div } \mathbf{f}(s, \phi(s; t_0, \mathbf{x}_0)) \, ds \right) \, d\mathbf{x}_0.$$

Demostración. El conjunto $M = \phi(t; t_0, M_0)$ es la imagen de un medible por una aplicación de clase C^1 , luego es medible. Consideramos las matrices $A(t) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(t, \phi(t; t_0, \mathbf{x}_0))$ e $Y(t) = D_{\mathbf{x}_0}\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$. La matriz $Y(t)$ cumple la ecuación variacional y la condición inicial

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = \text{Id}.$$

Es decir, $Y(t)$ es la matriz principal en el instante t_0 del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Por tanto, la fórmula de Liouville implica que

$$\det [D_{\mathbf{x}_0}\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)] = \det[Y(t)] = 1 \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \text{traza}[A(s)] \, ds \right) = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{div } \mathbf{f}(s, \phi(s; t_0, \mathbf{x}_0)) \, ds \right).$$

Realizando el cambio de variables $M_0 \ni \mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x} = \phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in M$, resulta que

$$\text{med}[M] = \int_M d\mathbf{x} = \int_{M_0} |\det [D_{\mathbf{x}_0}\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)]| \, d\mathbf{x}_0 = \int_{M_0} \exp \left(\int_{t_0}^t \text{div } \mathbf{f}(s, \phi(s; t_0, \mathbf{x}_0)) \, ds \right) \, d\mathbf{x}_0.$$

En la última igualdad hemos usado la fórmula anterior. \square

Observación. El flujo $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ conserva el volumen de todos los conjuntos medibles si y sólo si la divergencia del campo vectorial $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es idénticamente nula. De hecho, el flujo expande, preserva o contrae volumen localmente (en tiempo y espacio) en función del signo de la divergencia.

Ejemplo 2. Consideramos el *campo central* autónomo 3D

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3.$$

definido en el abierto $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se puede comprobar que $\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv 0$, luego el flujo del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ preserva volumen. Sorprendentemente, el campo apunta siempre hacia el origen, lo cual podría hacernos pensar que contrae volumen.

Corolario (Evolución de un volumen por un flujo lineal). Sea $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ el flujo del sistema lineal $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$. Entonces la fórmula anterior se simplifica bastante. Concretamente,

$$\text{med}[M] = \int_{M_0} \exp \left(\int_{t_0}^t \text{traza } A(s) \right) d\mathbf{x}_0 = \text{med}[M_0] \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \text{traza}[A(s)] ds \right), \quad \forall t, t_0 \in I.$$

Si además el sistema lineal es a coeficientes constantes, entonces

$$\text{med}[M] = \text{med}[M_0] e^{(t-t_0) \text{traza}[A]}, \quad \forall t, t_0 \in I.$$

SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS A COEFICIENTES CONSTANTES

Los sistemas a coeficientes constantes $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $A \in \mathcal{M}_n$, son autónomos, luego sus flujos son de la forma $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \varphi(t - t_0; \mathbf{x}_0)$, con $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Queremos encontrar una fórmula explícita para el flujo $\varphi(t; \mathbf{x}_0)$ en términos de la matriz A . El método es muy simple cuando A es diagonalizable; basta calcular sus VAPs y una base de VEPs. El caso general requiere usar la forma de Jordan y una base de Jordan de la matriz.

El caso diagonalizable (real o complejo). La idea básica para resolver el caso diagonalizable es que las funciones vectoriales que se obtienen al multiplicar un VEP por la función exponencial que tiene el correspondiente VAP por exponente son soluciones.

Proposición. Si \mathbf{v} es un VEP de VAP λ de una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, entonces

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t; \mathbf{v}) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

es la solución del PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$.

Demostración. Como \mathbf{v} es un VEP de VAP λ de la matriz A , sabemos que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Por tanto,

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \lambda \mathbf{v} = e^{\lambda t} A\mathbf{v} = A e^{\lambda t} \mathbf{v} = A\mathbf{x}(t),$$

pues podemos escribir el escalar $e^{\lambda t}$ en la posición que queramos. La propiedad $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ es obvia. \square

Ejercicio. Probar que si \mathbf{v} es un VEP constante de VAP $\lambda(t)$ de una matriz cuadrada $A(t)$, entonces

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t; t_0, \mathbf{v}) = e^{\int_{t_0}^t \lambda(s) ds} \cdot \mathbf{v}$$

es una solución del PVI no autónomo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}$.

Cuando la matriz del sistema es diagonalizable podemos, a partir de una base de VEPs, encontrar un conjunto fundamental formado por soluciones de la forma anterior o dar una fórmula para el flujo.

Teorema. Supongamos que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de VEPs de VAPs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz A . Entonces, la solución general del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Y su flujo viene dado por: $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n \Rightarrow \varphi(t; \mathbf{x}_0) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$.

Demostración. Basta notar que las funciones vectoriales $\mathbf{x}_j(t) = \phi(t; 0, \mathbf{v}_j) = \varphi(t; \mathbf{v}_j) = e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j$, $1 \leq j \leq n$, forman un conjunto fundamental de soluciones, pues $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base. La fórmula del flujo es una consecuencia de la linealidad de la aplicación $\varphi(t; \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. \square

Ejemplo 3. Calcular la solución general y una matriz fundamental del sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4),$$

luego los VAPs son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$, ambos simples. Por tanto, la matriz A diagonaliza y resulta fácil calcular una base de VEPs. Una posible base es $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Así pues,

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} \\ c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general del sistema. Además,

$$X(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \mid e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \right) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental, probablemente la más simple de obtener. \blacktriangle

Ejercicio. Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución del sistema anterior. ¿Qué se puede decir sobre $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t)$?

El caso diagonalizable complejo. Cuando la matriz diagonaliza en los complejos; es decir, cuando diagonaliza pero tiene algunos VAPs complejos conjugados, el método anterior proporciona soluciones complejas que se pueden convertir fácilmente en soluciones reales (es decir, en soluciones que toman valores reales para todo $t \in \mathbb{R}$). Basta substituir cada pareja de soluciones complejas conjugadas por sus partes real e imaginaria.

Proposición. Si $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ son VEPs de VAPs $\lambda_\pm = \alpha \pm \beta i$ de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{u}) = \Re[e^{\lambda_+ t} \mathbf{v}_+] = e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t), \\ \mathbf{z}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{w}) = \Im[e^{\lambda_+ t} \mathbf{v}_+] = e^{\alpha t} (\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t), \end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Además, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}$ y $\mathbf{z}(0) = \mathbf{w}$.

Demostración. En primer lugar, recordamos que las funciones

$$\mathbf{x}_\pm(t) = \boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{v}_\pm) = e^{\lambda_\pm t} \mathbf{v}_\pm = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t) (\mathbf{u} \pm \mathbf{w}i) = \mathbf{y}(t) \pm \mathbf{z}(t)i$$

son soluciones complejas conjugadas. En la tercera igualdad hemos usado la fórmula de Euler. Como el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial sobre \mathbb{C} , deducimos que las combinaciones lineales

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\mathbf{x}_+(t) + \mathbf{x}_-(t)}{2}, \quad \mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{x}_+(t) - \mathbf{x}_-(t)}{2i}$$

también son soluciones. Para ver que son linealmente independientes, recordamos un resultado clásico de álgebra lineal: VEPs de VAPs diferentes siempre son linealmente independientes. En particular, los VEPs complejos conjugados $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ son independientes, luego sus partes reales e imaginarias \mathbf{u} y \mathbf{w} también lo son. En consecuencia, $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{u})$ y $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{w})$ también lo son, pues $\boldsymbol{\varphi}(t, \cdot)$ es un isomorfismo de \mathbb{R}^n . Las propiedades $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}$ y $\mathbf{z}(0) = \mathbf{w}$ son triviales. \square

Ejemplo 4. Calcular la solución general y una matriz fundamental del sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar (¡comprobadlo!) que el polinomio característico de esta matriz es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \dots = -\lambda^3 + \lambda^2 - 25\lambda + 25 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 25).$$

Los VAPs son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_{2,3} = \pm 5i$, todos simples. Por tanto, la matriz diagonaliza en los complejos. Pasamos a calcular un conjunto fundamental de soluciones reales.

Empezamos por el caso más fácil, el VAP real $\lambda_1 = 1$.

$$\text{Nuc}(A - \text{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -12y - 14z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 25z/6 \\ -7z/6 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 25 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right].$$

Por tanto, $\mathbf{v}_1 = (25, -7, 6)$ es un VEP de VAP $\lambda_1 = 1$, luego obtenemos la solución

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 25e^t \\ -7e^t \\ 6e^t \end{pmatrix}.$$

El caso de los VAPs complejos conjugados es más complicado, aunque aprovecharemos que si dos VAPs son conjugados, sus VEPs también lo son. Es decir, basta realizar la mitad de los cálculos. Por tanto, para calcular la parte de la base asociada a los VAPs $\lambda_{2,3} = \pm 5i$, basta calcular el núcleo

$$\text{Nuc}(A - 5i\text{Id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (1 - 5i)x - 12y - 14z = 0 \\ x + (2 - 5i)y - 3z = 0 \\ x + y - (2 + 5i)z = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 + 5i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Por tanto, $\mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ son VEPs complejos conjugados de VAPs $\lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i$, siendo $\alpha = 0$, $\beta = 5$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{w} = (5, 0, 0)$. Usando la proposición anterior, obtenemos dos soluciones reales linealmente independientes:

$$\mathbf{y}(t) = \Re[e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} \cos 5t - 5 \sin 5t \\ \cos 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}(t) = \Im[e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} \sin 5t + 5 \cos 5t \\ \sin 5t \\ \sin 5t \end{pmatrix}.$$

En particular, $\mathbf{x}_h(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{y}(t) + c_3 \mathbf{z}(t) = X(t)\mathbf{c}$ es la solución general real del sistema, donde el vector de constantes $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ queda libre y

$$X(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \mid \Re[e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2] \mid \Im[e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2] \right) = \begin{pmatrix} 25e^t & \cos 5t - 5 \sin 5t & \sin 5t + 5 \cos 5t \\ -7e^t & \cos 5t & \sin 5t \\ 6e^t & \cos 5t & \sin 5t \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental real. \blacktriangle

El caso general: Exponencial de una matriz. Cuando la matriz del sistema no diagonaliza se necesitan algunos resultados más elaborados del álgebra lineal. A saber, la forma (reducida) de Jordan y las bases de Jordan. Damos un rápido repaso a las notaciones clásicas y los resultados básicos.

Dado un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ y un natural $r \in \mathbb{N}$, $J_r(\lambda)$ denotará la matriz $r \times r$ cuyos elementos diagonales son igual al escalar λ , cuyos elementos subdiagonales son igual a uno y el resto son nulos. Por ejemplo,

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Las matrices de la forma $J_r(\lambda)$ son *bloques de Jordan*. Las matrices diagonales por bloques, cuyos bloques diagonales son bloques de Jordan, son *matrices de Jordan*.

Teorema (Forma de Jordan). *Dada cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n$, existe una matriz de Jordan*

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_l) \in \mathcal{M}_n,$$

con bloques de Jordan $J_k = J_{r_k}(\lambda_k)$, $1 \leq k \leq l$, y una matriz invertible $S \in \mathcal{M}_n$ tales que

$$J = S^{-1}AS.$$

La matriz de Jordan es única salvo permutaciones de sus bloques.

Definición. La matriz J es la *forma (reducida) de Jordan* de A . Las columnas de la matriz S forman una *base de Jordan* de A . El conjunto formado por todos los VAPs de A se denomina *espectro* y se denota $\text{Spec}(A)$. Un VAP es *semi-simple* cuando su bloque de Jordan es diagonal.

Una matriz es diagonalizable si y sólo si su forma de Jordan es diagonal o, equivalentemente, cuando todos sus VAPs son semi-simples. Por tanto, es diagonalizable en los complejos si y sólo si todos sus VAPs tienen *multiplicidades algebraicas y geométricas* iguales: $\text{mg}(\lambda) = \text{ma}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Y diagonaliza en los reales cuando, además, todos sus VAPs son reales. Finalmente, recordamos que $1 \leq \text{mg}(\lambda) \leq \text{ma}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Fin del repaso.

Ejemplo 5. Si $\lambda \in \text{Spec}(A)$ no es semi-simple, en cada base de Jordan existen dos vectores consecutivos \mathbf{u} y \mathbf{v} tales que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. En la sección anterior vimos que $\varphi(t; \mathbf{v}) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Ahora veremos que $\varphi(t; \mathbf{u}) = e^{\lambda t}(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$. Efectivamente, si notamos $\mathbf{q}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$, entonces $\mathbf{q}(0) = \mathbf{u}$ y

$$\mathbf{q}'(t) = e^{\lambda t}\lambda(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) + e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}(\lambda\mathbf{u} + t\lambda\mathbf{v} + \mathbf{v}) = e^{\lambda t}(A\mathbf{u} + tA\mathbf{v}) = Ae^{\lambda t}(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = A\mathbf{q}(t).$$

Sabemos que dado cualquier escalar $a \in \mathbb{R}$, $x(t) = \varphi(t; x_0) = e^{at}x_0$ es el flujo de la EDO $x' = ax$. Por analogía, conjeturamos que dada cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n$, $\mathbf{x}(t) = \varphi(t; \mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0$ es el flujo del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Sin embargo, necesitamos dar un significado preciso al símbolo e^{At} .

Ejercicio. Probar por inducción que las iteraciones de Picard correspondientes al PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ vienen dadas por

$$\mathbf{x}_j(t) = \left(\sum_{k=0}^j \frac{A^k t^k}{k!} \right) \mathbf{x}_0, \quad \forall j \geq 0.$$

Definición. El ejercicio anterior sugiere definir la matriz exponencial e^{At} como la serie de potencias

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Ejemplo 6. La exponencial de una matriz diagonal es diagonal. Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, entonces

$$e^{Dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \frac{t^k}{k!} = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \right) = \text{diag} (e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

En particular, esto prueba que la exponencial de una matriz no se obtiene calculando la exponencial elemento a elemento de la matriz inicial. \blacktriangle

A continuación comprobamos que nuestras intuiciones son correctas y listamos las propiedades más importantes de la matriz exponencial e^{At} .

Proposición. Dada una matriz arbitraria $A \in \mathcal{M}_n$, la función matricial $e^{At} : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{At} \in \mathcal{M}_n$ cumple las siguientes propiedades:

1. e^{At} es absolutamente convergente en \mathbb{R} y uniformemente convergente sobre compactos de \mathbb{R} ;
2. $e^{At} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n)$ y $D_t(e^{At}) = Ae^{At}$;
3. La matriz e^{At} es igual a la matriz identidad $n \times n$ cuando $t = 0$;
4. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$;
5. Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ conmutan (es decir, si $AB = BA$), entonces $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$;
6. $\det [e^{At}] = e^{\text{traza}[A]t}$;
7. La matriz e^{At} es invertible para todo $t \in \mathbb{R}$ y su inversa es la matriz e^{-At} ;
8. El flujo del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \varphi(t - t_0; \mathbf{x}_0) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0$; y
9. Si S es invertible y $J = S^{-1}AS$, entonces $e^{Jt} = S^{-1}e^{At}S$.

Demostración. 1. Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial sub-multiplicativa arbitraria. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k t^k}{k!} = e^{\|A\|t} < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, aplicando el criterio M de Weierstrass vemos que la serie de potencias $\sum_{k \geq 0} A^k t^k / k!$ es absolutamente convergente en \mathbb{R} y uniformemente convergente sobre compactos de \mathbb{R} .

2. Toda serie de potencias uniformemente convergente sobre compactos es C^∞ y puede ser derivada término a término. Por tanto, $e^{At} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{M}_n)$ y

$$D_t(e^{At}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}.$$

3. El término $A^0 t^0 / 0! = \text{Id}$ es el único que no se anula al evaluar la serie de potencias en $t = 0$.

4. Fijado $s \in \mathbb{R}$, consideramos las funciones $X_1(t) = e^{A(t+s)}$ y $X_2(t) = e^{At}e^{As}$. Entonces

$$X_1' = Ae^{A(t+s)} = AX_1, \quad X_2' = Ae^{At}e^{As} = AX_2, \quad X_1(0) = e^{As} = X_2(0).$$

Por tanto, $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son soluciones del mismo PVI matricial, luego $X_1(t) = X_2(t)$ por unicidad de soluciones.

5. Consideramos las funciones matriciales $Y_1(t) = e^{(A+B)t}$ e $Y_2(t) = e^{At}e^{Bt}$. Entonces

$$Y_1' = (A+B)e^{(A+B)t} = (A+B)Y_1, \quad Y_2' = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = (A+B)Y_2.$$

Las matrices e^{At} y B conmutan, pues A y B conmutan. Además, $Y_1(0) = \text{Id} = Y_2(0)$. Por tanto, $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ son soluciones del mismo PVI matricial, luego $Y_1(t) = Y_2(t)$.

6. Es una consecuencia directa de la fórmula de Liouville, pues e^{At} es una solución matricial del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

7. El punto anterior implica que la matriz e^{At} es invertible para todo $t \in \mathbb{R}$, pues su determinante no es nulo. Además,

$$e^{At}e^{(-A)t} = e^{(A+(-A))t} = e^{0t} = \text{Id},$$

pues las matrices A y $B = -A$ conmutan.

8. Hemos visto que e^{At} es una matriz fundamental de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, luego $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \Phi(t; t_0)\mathbf{x}_0$ con

$$\Phi(t; t_0) = e^{At}(e^{At_0})^{-1} = e^{At}e^{-At_0} = e^{A(t-t_0)}.$$

9. Aplicamos la definición de exponencial de una matriz:

$$e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{-1}A^k S t^k}{k!} = S^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) S = S^{-1}e^{At}S,$$

ya que $(S^{-1}AS)^k = S^{-1}ASS^{-1}AS \dots S^{-1}ASS^{-1}AS = S^{-1}A^kS$. □

El cálculo de la matriz exponencial e^{At} se realiza mediante un cambio de base a forma de Jordan.

Proposición. Sea $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_l) \in \mathcal{M}_n$, $J_k = J_{r_k}(\lambda_k)$, $1 \leq k \leq l$, la forma reducida de Jordan de $A \in \mathcal{M}_n$ y sea $S \in \mathcal{M}_n$ una matriz invertible tal que $J = S^{-1}AS$. Entonces:

- $X(t) = e^{At}S = Se^{Jt}$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
- $\Phi(t; t_0) = e^{A(t-t_0)} = Se^{J(t-t_0)}S^{-1}$ es la matriz principal en el instante t_0 del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
- $e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_l t})$.
- Dado un bloque de Jordan $J_r(\lambda)$ de orden r y VAP λ , se cumple que

$$e^{J_r(\lambda)t} = \exp(J_r(\lambda)t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ t & 1 & & & & \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \dots & \frac{t^2}{2} & t & 1 & \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

- Sea $P_A(\lambda) = \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ el polinomio mínimo de A . Entonces cada elemento de la matriz e^{At} es una combinación lineal de las funciones

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{r_2-1}e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \dots, t^{r_m-1}e^{\lambda_m t}.$$

Para calcular la solución general de un sistema, basta tener una matriz fundamental arbitraria. Por tanto, como espabilados perezosos que somos, nos limitaremos a calcular la matriz fundamental dada por la fórmula $X(t) = Se^{Jt}$, evitando a toda costa invertir la matriz S .

Ejemplo 7. Calcular la solución general y una matriz fundamental del sistema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2,$$

luego tiene un único VAP doble: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Además, la matriz no diagonaliza, pues

$$\text{mg}(-1) = \dim[\text{Nuc}(A + \text{Id})] = 1 < 2 = \text{ma}(-1).$$

La forma de Jordan J y una matriz de cambio de base (de base de Jordan a base natural) S son

$$J = J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, podemos calcular una matriz fundamental con la fórmula

$$X(t) = S e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Finalmente, la solución general del sistema es

$$\mathbf{x}_h(t) = X(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_1 t \\ c_1 t + c_2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio. Sea $\mathbf{x}(t)$ una solución del sistema anterior. ¿Qué se puede decir sobre $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t)$?

Ejercicio. ¿Cuáles de las siguientes funciones vectoriales son soluciones de un sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con $A \in \mathcal{M}_2$? Dar una matriz A cuando sea posible.

$$\begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3e^t \\ t^2 e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^t + 2e^{-2t} \\ e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Observación. Si la función $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \mathbf{x}_0$ es el flujo de la EDO lineal homogénea de primer orden $x' = a(t)x$. Por contra, si la función matricial $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es continua, entonces $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) \mathbf{x}_0$ no es, en general, el flujo del sistema a coeficientes variables $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.

Ejercicio. Probar que si la función matricial $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es continua y $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ para todo $t, s \in I$, entonces $\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) \mathbf{x}_0$ es el flujo de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.

Estabilidad. Queremos describir cualitativamente las soluciones del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, con $A \in \mathcal{M}_n$.

Definición. Diremos que un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando la velocidad del sistema en ese punto sea cero. Es decir, cuando $\mathbf{x}_0 \in \text{Nuc } A$. Diremos que el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es *degenerado* cuando tenga infinitos puntos de equilibrio. Es decir, cuando $\det[A] = 0$.

Observación. Si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, entonces el cambio de variable dependiente $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ transforma el sistema original en el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (¡es el mismo!), pues

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' = \mathbf{x}' = A\mathbf{x} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A\mathbf{y}.$$

Por tanto, todos los puntos de equilibrio son “iguales” y basta estudiar el origen.

Dado un sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes, la primera cuestión cualitativa que planteamos consiste en determinar si sus trayectorias escapan a infinito o tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$. En realidad, estos dos comportamientos no cubren todas las posibilidades. Por ejemplo, existen sistemas cuyas trayectorias giran eternamente sin escapar a infinito ni tender al origen.

Definición. Diremos que el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es:

- *Repulsor* cuando todas sus soluciones no triviales escapan a infinito;
- *Inestable (I)* cuando alguna de sus soluciones escapa a infinito;
- *Estable (E)* cuando todas sus soluciones son acotadas; y
- *Atractor o asintóticamente estable (AE)* cuando todas sus soluciones tienden al origen.

Observación. Si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio, entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ es la única solución que cumple $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Un sistema degenerado tiene soluciones no triviales que ni escapan a infinito ni tienden al origen al ser constantes, luego no es ni repulsor ni atractor,

Ejemplo 8. La aplicación $\varphi(t; x_0) = e^{\lambda t} x_0$ es el flujo de la EDO lineal homogénea $x' = \lambda x$. Por tanto, esta EDO es: repulsora o I $\Leftrightarrow \lambda > 0$, atractora o AE $\Leftrightarrow \lambda < 0$ y E pero no AE $\Leftrightarrow \lambda = 0$. \blacktriangle

Definición. Sea \mathbf{v} un VEP de VAP $\lambda \in \mathbb{R}$ de la matriz A . Sea $r = [\mathbf{v}]$ la recta que pasa por el origen con dirección \mathbf{v} . Entonces, diremos que r es una

- *Recta invariante inestable* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando $\lambda > 0$.
- *Recta invariante estable* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando $\lambda < 0$.
- *Recta invariante de puntos de equilibrio* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando $\lambda = 0$.

Análogamente, sean $\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}$ i VEPs complejos conjugados de VAPs $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$ de la matriz A . Sea $\Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ el plano que pasa por el origen con direcciones \mathbf{u} y \mathbf{w} . Entonces, diremos que Π es un

- *Plano invariante inestable* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando $\alpha > 0$.
- *Plano invariante estable* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando $\alpha < 0$.
- *Plano invariante de giros cerrados* del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando $\alpha = 0$.

Pasamos a interpretar estas definiciones. Sea $\mathbf{x}(t) = \varphi(t; \mathbf{x}_0) = e^{At} \mathbf{x}_0$ el flujo del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Si $\mathbf{x}_0 \in r$, entonces $A\mathbf{x}_0 = \lambda \mathbf{x}_0$, luego $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{x}_0$. Por tanto, cualquier trayectoria que empieza en un punto de la recta r se mantiene dentro de la recta (por eso decimos que la recta es *invariante*) y para decidir si escapa hacia infinito, tiende al origen o se queda fija basta mirar el signo del VAP λ .

Si $\mathbf{x}_0 \in \Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$, entonces existen unos coeficientes $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{x}_0 = a_0 \mathbf{u} + b_0 \mathbf{w}$, luego

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t; \mathbf{x}_0) = \varphi(t; a_0 \mathbf{u} + b_0 \mathbf{w}) = a_0 \varphi(t; \mathbf{u}) + b_0 \varphi(t; \mathbf{w}) = a_0 \mathbf{y}(t) + b_0 \mathbf{z}(t) = a(t) \mathbf{u} + b(t) \mathbf{w},$$

donde $\mathbf{y}(t) = \varphi(t; \mathbf{u}) = e^{\alpha t} (\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t)$, $\mathbf{z}(t) = \varphi(t; \mathbf{w}) = e^{\alpha t} (\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t)$ y

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, cualquier trayectoria que empieza en un punto del plano Π se mantiene dentro del plano (por eso decimos que el plano es *invariante*) girando sin parar y para decidir si escapa hacia infinito, tiende al origen o los giros son cerrados basta mirar el signo de la parte real α . Si la parte real es igual a cero, entonces todas las trayectorias contenidas en el plano son periódicas de periodo $T = 2\pi/\beta$. Podemos escribir la fórmula anterior en "polares". Notando $a_0 + ib_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ y $a(t) + ib(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$, resulta que $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$ y $\theta(t) = \theta_0 - \beta t$, lo cual muestra que el ángulo avanza a velocidad constante.

Ejercicio. En una recta o plano invariante estable, ¿cuánto tarda la trayectoria en llegar al origen?

Hemos visto que los VAPs reales positivos y los VAPs complejos de parte real positiva se asocian a rectas y planos invariantes inestables, luego dan lugar a sistemas inestables. No son los únicos VAPs con esta propiedad. Vimos en el ejemplo 5 que si λ es un VAP no semi-simple, existe una solución de la forma $\mathbf{q}(t) = e^{\lambda t} (\mathbf{u} + t\mathbf{v})$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Por tanto, si la parte real del VAP es igual a cero, resulta que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{q}(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{\lambda t} (\mathbf{u} + t\mathbf{v})| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\Re \lambda t} |\mathbf{u} + t\mathbf{v}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{u} + t\mathbf{v}| = +\infty.$$

Por contra, cuando todos los VAPs tienen parte real negativa la siguiente cota nos permitirá deducir que el sistema es asintóticamente estable.

Lema. Sea $\|\cdot\|$ una norma en el espacio \mathcal{M}_n . Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz tal que $\Re \lambda < -\mu < 0$ para todo $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Entonces existe una constante $C = C(A, \mu, \|\cdot\|) > 0$ tal que

$$\|e^{At}\| \leq C e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0.$$

Demostración. Basta probarlo para la norma $\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, pues todas las normas de \mathcal{M}_n son equivalentes. Sea $P_A(\lambda) = \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ el polinomio mínimo de A . Sabemos que cada elemento de la matriz exponencial $e^{At} = (e_{ij}(t))$ es una combinación lineal de las funciones

$$e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{r_1-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, t e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{r_2-1} e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_m t}, t e^{\lambda_m t}, \dots, t^{r_m-1} e^{\lambda_m t}.$$

Es un ejercicio de cálculo de una variable el comprobar que si $\Re\lambda < -\mu < 0$ y $r \in \mathbb{N}$, entonces existe una constante $c = c(\mu + \Re\lambda, r) > 0$ tal que

$$|t^s e^{\lambda t}| = t^s e^{\Re\lambda t} = \left(t^s e^{(\mu + \Re\lambda)t}\right) e^{-\mu t} \leq c e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall s = 0, \dots, r-1.$$

Por tanto, existen unas constantes $c_{ij} = c_{ij}(A, \mu) > 0$ tales que

$$|e_{ij}(t)| \leq c_{ij} e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Finalmente, $\|e^{At}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |e_{ij}(t)| \leq C e^{-\mu t}$ si tomamos $C = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$. \square

Podemos cristalizar todos los argumentos anteriores en un teorema general.

Teorema (Estabilidad de SLs homogéneos a coeficientes constantes). *El sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es:*

- *Inestable si y sólo si tiene algún VAP de parte real positiva o no semi-simple de parte real nula.*
- *Atractor/repulsor si y sólo si todos sus VAPs tienen parte real negativa/positiva.*

Demostración. Sólo probaremos las implicaciones en el sentido “si”; es decir, en el sentido $[\Leftarrow]$.

Si la matriz A tiene algún VAP de parte real positiva, entonces existe una recta o plano invariante inestable, luego el sistema es inestable. Si la matriz A tiene algún VAP no semi-simple de parte real nula, entonces existe una solución $\mathbf{y}(t)$ que escapa a infinito y el sistema es inestable. Si todos los VAPs de la matriz A tienen parte real negativa, entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\Re\lambda < -\mu < 0$ para todo $\lambda \in \text{Spec}(A)$ y podemos acotar cualquier solución $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ aplicando el lema anterior:

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \|e^{At}\| \|\mathbf{x}_0\| \leq C \|\mathbf{x}_0\| e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0.$$

Por tanto, todas las soluciones tienden al origen y el sistema es asintóticamente estable (o atractor). Finalmente, si todos los VAPs de la matriz A tienen parte real positiva, entonces todos los VAPs de la matriz $-A$ tienen parte real negativa y el sistema $\mathbf{x}' = -A\mathbf{x}$ es atractor. Pero las trayectorias del sistema $\mathbf{x}' = -A\mathbf{x}$ son las trayectorias del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ recorridas en sentido contrario, luego $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es un repulsor. \square

Ejemplo 9. Estudiar la estabilidad del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}$. Este sistema, ¿expande, preserva o contrae área?

Las raíces del polinomio característico $Q_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$ son $\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{7}i)/2$, luego este sistema lineal es atractor. La traza es $T = -1 < 0$, luego contrae área. \blacktriangle

Ejercicio. Probar que si la traza de A es positiva, entonces el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es inestable.

Clasificación en el caso 2D. En esta sección nos limitamos a clasificar los sistemas lineales $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Es decir, es una sección de terminología.

Cuando el sistema no es degenerado, sus dos VAPS son no nulos y clasificaremos el sistema como:

- Una *silla*, si los VAPs son reales y de signos diferentes,
- Un *nodo*, si los VAPs son reales pero del mismo signo, en cuyo caso diremos que el nodo es:
 - *atractor/repulsor* cuando ambos VAPs sean negativos/positivos; y
 - *propio/impropio* si la matriz diagonaliza/no diagonaliza;
- Un *centro*, si los VAPs son imaginarios puros; y
- Un *foco*, si los VAPs son complejos conjugados de parte real no nula, en cuyo caso diremos que el foco es *atractor/repulsor* cuando la parte real sea negativa/positiva.

Sólo hay tres tipos de sistemas 2D a coeficientes constantes que preservan área: los centros, un tipo especial de sillas y los sistemas degenerados con VAP cero doble.

Proposición (Criterio traza-determinante para SLs 2D a coeficientes constantes). *Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notamos $T = \text{traza } A$, $D = \det A$ y $\Delta = T^2 - 4D$. Entonces el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es:*

- Una *silla (I)* si y sólo si $D < 0$.
- Un *centro (E, pero no AE)* si y sólo si $T = 0$ y $D > 0$.
- Un *foco* si y sólo si $T \neq 0$ y $\Delta < 0$. El foco es repulsor cuando $T > 0$ y atractor cuando $T < 0$.

- Un nodo si y sólo si $D > 0$ y $\Delta \geq 0$. El nodo es repulsor cuando $T > 0$ y atractor cuando $T < 0$. Además, el nodo es impropio si y sólo si $\Delta = 0$ y la matriz A no es diagonal.
- Degenerado cuando $D = 0$. Un sistema degenerado es I cuando $T > 0$, E pero no AE cuando $T < 0$, y puede ser E o I cuando $T = 0$.

Demostración. Sean λ_+ y λ_- las raíces del polinomio característico $Q_A(t) = t^2 - Tt + D$. Entonces

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Además, $T = \lambda_+ + \lambda_-$ y $D = \lambda_+ \lambda_-$. Ahora distinguimos cinco casos:

- $D = \lambda_+ \lambda_- < 0 \implies \Delta = T^2 - 4D \geq 0 \implies \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R} \implies \text{signo } \lambda_+ \neq \text{signo } \lambda_- \implies \text{Silla (I)}$.
- $T = 0$ y $D > 0 \implies \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-D}$ son imaginarios puros $\implies \text{Centro (E, pero no AE)}$.
- $T \neq 0$ y $\Delta < 0 \implies \lambda_{\pm} = \frac{T}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i$ son complejos conjugados y $\text{Re } \lambda_{\pm} = T/2 \neq 0 \implies \text{Foco}$.
Además, el signo de la parte real de los VAPs coincide con el signo de la traza.
- $D = \lambda_+ \lambda_- > 0$ y $\Delta \geq 0 \implies \text{VAPs reales del mismo signo} \implies \text{Nodo}$.
Además, el signo de la traza $T = \lambda_+ + \lambda_-$ coincide con el signo de ambos VAPs. Finalmente, el nodo es impropio, por definición, si y sólo si A no diagonaliza. Las únicas matrices 2×2 no diagonalizables son las matrices no diagonales con un VAP doble.
- El sistema es degenerado, por definición, si y sólo si $D = 0$. Las relaciones $D = \lambda_+ \lambda_- = 0$ y $T = \lambda_+ + \lambda_-$ implican que uno de los VAPs es igual a cero y el otro es igual a la traza. \square

Este criterio simplifica la clasificación de sistemas 2D con parámetros. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 10. Clasificar el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -2\mu & 2\mu - 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

La traza $T = -2\mu$ sólo cambia de signo en $\mu = 0$. El determinante $D = 2\mu - 1$ sólo cambia de signo en $\mu = 1/2$. El discriminante $\Delta = T^2 - 4D = 4\mu^2 - 8\mu + 4 = 4(\mu - 1)^2$ es positivo si $\mu \neq 1$ y nulo si $\mu = 1$. Además, la matriz A no es diagonal cuando $\mu = 1$. Por tanto, aplicando el criterio traza-determinante vemos que el sistema es:

- Una silla (I) cuando $\mu < 1/2$;
- Degenerado (E pero no AE) cuando $\mu = 1/2$; y
- Un nodo atractor (AE) cuando $\mu > 1/2$, siendo propio para $\mu \neq 1$ e impropio para $\mu = 1$.

En particular, la única *bifurcación*¹ del sistema tiene lugar al cruzar el valor $\mu_* = 1/2$, momento en el cual el sistema pasa de inestable a asintóticamente estable. (Al cruzar el valor $\mu = 1$ no se produce ningún cambio importante.) Es usual representar toda la información en un diagrama a color² llamado *diagrama de bifurcación*, ver figura 1. \blacktriangle



FIGURA 1. Diagrama de bifurcación del ejemplo 10 en la recta $\mu \in \mathbb{R}$. Aquí, $\mu_* = 1/2$.

¹Una bifurcación se define como un cambio en el aspecto cualitativo de las trayectorias de sistema.

²En esta asignatura seguimos la convención rojo para I, azul para AE y verde para E pero no AE.

Croquis. Una vez conocemos la estabilidad del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, podemos dibujar una representación geométrica de sus *órbitas*; es decir, de las curvas de \mathbb{R}^n recorridas por sus soluciones. En esta representación, denominada *croquis* o *retrato de fases* del sistema, se resaltan las rectas y planos invariantes. Seguiremos un código de colores para distinguir los objetos inestables (rojo), los estables (azul), los planos de giros cerrados (verde) y las rectas de puntos de equilibrio (amarillo). Y un código de flechas para distinguir direcciones rápidas y lentas o visualizar sentidos de giro.

La interpretación geométrica de las rectas y los planos invariantes dada en la página 11 nos ayuda a dibujar croquis precisos de cualquier sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando la matriz A diagonaliza.

Por ejemplo, sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ los VEPs y supongamos que todos los VAPs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son reales. Los signos de los VAPs determinan el comportamiento de las trayectorias contenidas en las rectas invariantes $r_j = [\mathbf{v}_j]$. Luego la pregunta es: ¿Qué aspecto tienen las otras trayectorias? Para responder a esta pregunta basta recordar que el flujo $\varphi(t; \mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0$ es lineal en la condición inicial \mathbf{x}_0 . Como los VEPs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ forman una base de \mathbb{R}^n , sabemos que cualquier punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tiene unas únicas proyecciones $\mathbf{x}_j^0 \in r_j$ tales que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1^0 + \dots + \mathbf{x}_n^0$. Además, $\varphi(t, \mathbf{x}_j^0) = e^{\lambda_j t} \mathbf{x}_j^0$. Por tanto,

$$\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \varphi(t, \mathbf{x}_1^0 + \dots + \mathbf{x}_n^0) = \varphi(t, \mathbf{x}_1^0) + \dots + \varphi(t, \mathbf{x}_n^0) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1^0 + \dots + e^{\lambda_n t} \mathbf{x}_n^0.$$

Esto permite describir la forma de cualquier órbita del sistema. Veamos un ejemplo 2D y otro 3D.

Ejemplo 11. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matriz del ejemplo 3. Sabemos que tiene VEPs $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$ de VAPs $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. Por tanto, hay dos rectas invariantes estables:

$$r_1 = [\mathbf{v}_1] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}, \quad r_2 = [\mathbf{v}_2] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}.$$

Además, r_1 corresponde a la recta estable lenta y r_2 a la rápida, pues $e^{\lambda_1 t} = e^{-2t}$ tiende a cero más lentamente que $e^{\lambda_2 t} = e^{-4t}$. El sistema es atractor. Concretamente, las soluciones situadas sobre una recta invariante no abandonan la recta, mientras que las demás soluciones trazan órbitas con aspecto de parábolas tangentes en el origen a la recta lenta y que lejos del origen tienden a adquirir la dirección de la recta rápida. Con esos datos ya podemos dibujar el croquis del sistema. ▲

Ejemplo 12. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz del ejemplo 4. Sabemos que tiene VEPs $\mathbf{v}_1 = (25, -7, 6)$ y $\mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$, con $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{w} = (5, 0, 0)$, de VAPs $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_{2,3} = \pm 5i$. Por tanto,

$$r = [\mathbf{v}_1] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1/25 = -x_2/7 = x_3/6\}$$

es una recta invariante inestable y

$$\Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3\}$$

es un plano invariante de giros cerrados. Todas las trayectorias son periódicas de periodo $T = 2\pi/5$. El truco de proyectar una condición inicial arbitraria sobre r y Π para ver la forma de su trayectoria funciona igual que antes. En este caso, obtenemos que todas las órbitas del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ no contenidas ni en r ni en Π son hélices que escapan a infinito. ▲

En estos apuntes, por pereza, no vamos a incluir dibujos. El lector interesado los puede realizar por su cuenta y compararlos después con los dibujos de la referencia *Notes on Differential Equations* de Bob Terrell que se puede obtener del enlace <http://www.math.cornell.edu/~bterrell/dn.pdf>. O mejor aún, puede realizar el siguiente ejercicio.

Ejercicio. Conectarse al enlace <http://www-math.mit.edu/daimp/> y entender los dos applets de JAVA sobre *Linear Phase Portraits*.

Los siguientes comentarios proporcionan algunas claves para dibujar un croquis:

- Dos órbitas diferentes no pueden tocarse, pues el sistema es autónomo;
- Los VAPs reales dan lugar a rectas invariantes estables, inestables o de puntos de equilibrio;
- Los VAPs complejos conjugados dan lugar a planos invariantes estables, inestables o de giros;
- Una silla tiene una recta invariante estable y otra inestable, el resto de sus órbitas tienen el aspecto de hipérbolas cuyas asíntotas son las rectas invariantes;

- Un nodo propio con VAPs simples tiene dos rectas invariantes (lenta y rápida) y el resto de sus órbitas tienen el aspecto de parábolas tangentes en el origen a la recta lenta;
- Un nodo impropio tiene una única recta invariante y todas sus otras órbitas son tangentes en el origen a esa recta;
- Todas las órbitas de un nodo propio con un VAP doble son rectas que pasan por el origen;
- En un sistema degenerado 2D el campo de vectores $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ apunta siempre en la misma dirección, luego sus órbitas forman un “haz” de rectas paralelas;
- Todas las órbitas de un centro son elipses;
- Todas las órbitas de un foco son espirales; y
- En estos dos últimos casos, que corresponden a VAPs complejos conjugados $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$, el sentido de giro se determina calculando la velocidad en algún punto del plano. La velocidad de giro depende de la parte imaginaria β y la expansión/contracción depende de la parte real α .

Ejemplo 13. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz con VAPs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de VEPs. Entonces existen tres rectas invariantes: $r_1 = [\mathbf{v}_1]$ (inestable), $r_2 = [\mathbf{v}_2]$ (estable lenta) y $r_3 = [\mathbf{v}_3]$ (estable rápida). En el plano generado por los VEPs de VAPs negativos el sistema tiene el aspecto de un nodo propio atractor. En los planos generados por \mathbf{v}_1 y un VEP de VAP negativo, el sistema es una silla. El resto del croquis 3D se deduce de ese “esqueleto”.

Ejercicio. Dibujar el croquis en los casos: $\lambda_3 < \lambda_2 = 0 < \lambda_1$; $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Ejemplo 14. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz con VAPs $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{2,3} = \alpha \pm \beta i$ tales que

$$\alpha < 0 < \lambda_1.$$

Sea \mathbf{v}_1 un VEP de VAP λ_1 y sean $\mathbf{v}_{2,3} = \mathbf{u} \pm \mathbf{w}i$ VEPs de VAP $\lambda_{2,3}$. Entonces $r_1 = [\mathbf{v}_1]$ es una recta invariante inestable y $\Pi = [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$ es un plano invariante estable. En el plano Π el sistema es un foco atractor. Las trayectorias 3D trazan espirales que se escapan al infinito en la dirección \mathbf{v}_1 , pero cuyas amplitudes se hacen cada vez más pequeñas.

Ejercicio. Dibujar el croquis en los casos: $\alpha = 0 < \lambda_1$; $0 < \alpha < \lambda_1$; $0 < \alpha = \lambda_1$ y $0 < \lambda_1 < \alpha$. ¿Qué diferencia hay entre los casos segundo y cuarto?

Ejercicio. Dibujar los croquis de los sistemas degenerados $\mathbf{x}' = A_{\pm}\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}' = A_0\mathbf{x}$ dados por

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS A COEFICIENTES PERIÓDICOS

El objetivo de esta sección es probar que los sistemas a coeficientes periódicos tienen, esencialmente, las mismas propiedades que los sistemas a coeficientes constantes. El resultado básico es que cualquier sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, con $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ función matricial continua T -periódica, se puede transformar en un sistema a coeficientes constantes mediante un cambio de variables lineal en \mathbf{x} y periódico en t .

El logaritmo de una matriz. Empezamos por una cuestión técnica.

Definición. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, diremos que una matriz $B \in \mathcal{M}_n$ es un logaritmo de A si y sólo si $e^B = A$. Escribiremos $B = \ln A$.

Las matrices con determinante nulo no tienen logaritmos, pues sabemos que todas las matrices exponenciales son invertibles. Una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos positivos tiene infinitos logaritmos diagonales, pero sólo uno de ellos es real. Efectivamente, si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_n)$, entonces

$$e^L = D \iff e^{l_j} = \lambda_j \quad \forall j = 1, \dots, n \iff l_j \in \{\ln \lambda_j + 2\pi k_j : k_j \in \mathbb{Z}\} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

El único logaritmo real se obtiene tomando $k_1 = \dots = k_n = 0$. Ninguno de estos logaritmos diagonales es real cuando alguno de los elementos diagonales es negativo. Efectivamente, pues

$$e^l = \lambda < 0 \iff l \in \{\ln |\lambda| + (2k + 1)i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Y ninguna elección de $k \in \mathbb{Z}$ proporciona un valor $l \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si D es una matriz real diagonal invertible, entonces D^2 es diagonal con elementos diagonales positivos, luego tiene un logaritmo real. Estos resultados son válidos para matrices generales, aunque no lo probaremos. La demostración más elegante usa variable compleja.

Teorema (Logaritmo de una matriz). *Toda matriz invertible compleja tiene logaritmo complejo. El cuadrado de toda matriz invertible real tiene logaritmo real.*

Ejercicio. Calcular un logaritmo (real o complejo) de las siguientes matrices reales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cuando no es posible encontrar un logaritmo real, encontrar un logaritmo real de la matriz al cuadrado.

Matrices de monodromía y teorema de Floquet.

Definición. Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ una función matricial continua y T -periódica. Dada una matriz fundamental $X(t)$ del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, diremos que

$$M_X := X^{-1}(t)X(t+T)$$

es la *matriz de monodromía* del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ asociada a $X(t)$.

Proposición (Propiedades de la matriz de monodromía). *La matriz de monodromía es invertible y constante. En particular, $M_X = X^{-1}(0)X(T)$. Un sistema periódico tiene infinitas matrices de monodromía, pero todas son conjugadas; es decir, están relacionadas mediante cambios de base.*

Demostración. La matriz $\tilde{X}(t) = X(t+T)$ también es una matriz fundamental de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, pues

$$\tilde{X}'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)\tilde{X}(t)$$

y $\det[\tilde{X}(t)] = \det[X(t+T)] \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, existe una matriz invertible $M_X \in \mathcal{M}_n$ tal que $\tilde{X}(t) = X(t)M_X$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego $M_X = X^{-1}(t)X(t+T)$ es constante.

Supongamos que $X(t)$ e $Y(t)$ son dos matrices fundamentales del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Sabemos que existe una matriz invertible $S \in \mathcal{M}_n$ tal que $Y(t) = X(t)S$. Por tanto,

$$M_Y = Y^{-1}(t)Y(t+T) = S^{-1}X^{-1}(t)X(t+T)S = S^{-1}M_X S,$$

lo cual demuestra que las matrices de monodromía M_X y M_Y son conjugadas. \square

El resultado más importante de esta sección sirve para reducir el estudio de los sistemas a coeficientes periódicos al estudio de los sistemas a coeficientes constantes.

Teorema (Teorema de Floquet). *Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n$ una función matricial continua y T -periódica. Sea M una matriz de monodromía del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Sea $B \in \mathcal{M}_n$ tal que $e^{BT} = M$. Entonces el sistema a coeficientes T -periódicos $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ se puede transformar en el sistema a coeficientes constantes $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ mediante un cambio de variables lineal $\mathbf{x} = P(t)\mathbf{y}$, siendo $P(t)$ una matriz T -periódica. Además, $P(t)$ viene determinada por la ecuación diferencial $P'(t) = A(t)P(t) - P(t)B$.*

En general B y $P(t)$ son complejas, aunque $A(t)$ sea real. Pero si $A(t)$ es real y escogemos M real, entonces existe $\tilde{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $e^{2\tilde{B}T} = M^2$, en cuyo caso el sistema a coeficientes T -periódicos $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ se puede transformar en el sistema a coeficientes constantes $\mathbf{y}' = \tilde{B}\mathbf{y}$ mediante un cambio de variables lineal $\mathbf{x} = \tilde{P}(t)\mathbf{y}$, siendo $\tilde{P}(t)$ una matriz $2T$ -periódica. Además, $\tilde{P}(t)$ viene determinada por la ecuación diferencial $\tilde{P}'(t) = A(t)\tilde{P}(t) - \tilde{P}(t)\tilde{B}$.

Corolario. *Con las notaciones anteriores resulta que $X(t) = P(t)e^{Bt}$ y $\tilde{X}(t) = \tilde{P}(t)e^{\tilde{B}t}$ son matrices fundamentales del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.*

Demostración. Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ y sea $M = M_X$ su matriz de monodromía. Sabemos que existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $e^{BT} = M$. Definimos $P(t) = X(t)e^{-Bt}$ (comparar con el corolario anterior) y comprobamos que el cambio de variables $\mathbf{x} = P(t)\mathbf{y}$ se comporta con afirma el teorema.

- Ecuación diferencial del cambio: Basta derivar la definición de $P(t)$ para obtener que

$$P'(t) = (X(t)e^{-Bt})' = X'(t)e^{-Bt} - X(t)Be^{-Bt} = A(t)X(t)e^{-Bt} - X(t)e^{-Bt}B = A(t)P(t) - P(t)B;$$

- Es un cambio de variables: $\det[P(t)] = \det[X(t)] \det[e^{-Bt}] \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- Periodicidad: $P(t+T) = X(t+T)e^{-B(t+T)} = X(t)Me^{-BT}e^{-Bt} = X(t)e^{-Bt} = P(t)$; y
- Reducción a coeficientes constantes: Vemos que $P(t)\mathbf{y}' = P(t)B\mathbf{y}$, pues

$$(A(t)P(t) - P(t)B)\mathbf{y} + P(t)\mathbf{y}' = P'(t)\mathbf{y} + P(t)\mathbf{y}' = (P(t)\mathbf{y})' = \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} = A(t)P(t)\mathbf{y}.$$

Pero la matriz $P(t)$ es invertible, luego $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$.

La segunda parte del teorema se prueba de forma similar. Empezamos observando que, como la matriz de monodromía es real, existe $\tilde{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $e^{2\tilde{B}T} = M^2$. A continuación definimos $\tilde{P}(t) = X(t)e^{-\tilde{B}t}$ y comprobamos que el cambio de variables $\mathbf{x} = \tilde{P}(t)\mathbf{y}$ se comporta con afirma el teorema. Dejamos los detalles para el lector, pero advertimos que para probar la $2T$ -periodicidad del cambio se debe usar que $A(t+2T) = A(t+T) = A(t)$ y $X(t+2T) = X(t+T)M = X(t)M^2$. \square

No es verdad que cualquier sistema a coeficientes T -periódicos tiene alguna solución periódica no trivial³ de periodo T . Ni siquiera es cierto que tenga soluciones periódicas no triviales de periodo nT para algún $n \in \mathbb{N}$. Pero no es difícil caracterizar los sistemas que poseen tales soluciones.

Proposición (Existencia de soluciones periódicas en SLs a coeficientes periódicos). *Fijado $n \in \mathbb{N}$, el sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ tiene alguna solución nT -periódica no trivial si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\frac{2\pi k i}{nT} \in \text{Spec}(B).$$

Demostración. [\Leftarrow] Si $\lambda = 2\pi k i/nT \in \text{Spec}(B)$ y $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es una solución de $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$, luego $\mathbf{x}(t) = P(t)\mathbf{y}(t) = P(t)e^{\lambda t}\mathbf{v}$ es una solución de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Además,

$$\mathbf{x}(t+nT) = P(t+nT)e^{\lambda(t+nT)}\mathbf{v} = P(t)e^{\lambda t}e^{nT\lambda}\mathbf{v} = P(t)e^{\lambda t}e^{2\pi k i}\mathbf{v} = P(t)e^{\lambda t}\mathbf{v} = \mathbf{x}(t),$$

luego la solución $\mathbf{x}(t)$ es nT -periódica.

[\Rightarrow] Ejercicio para el lector. \square

Estabilidad. La estabilidad de un sistema a coeficientes periódicos viene dada por la estabilidad del sistema a coeficientes constantes en que se transforma. Eso nos lleva a introducir los siguientes conceptos. Seguimos suponiendo que $A(t)$ es una función matricial continua T -periódica.

Definición. Los *multiplicadores característicos* (o *de Floquet*) de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ son los VAPs de cualquier matriz de monodromía del sistema. Los exponentes característicos (o *de Floquet*) de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ son los VAPs de cualquier matriz B tal que $e^{TB} = M$ es una matriz de monodromía del sistema.

Es importante entender que la definición anterior es correcta pues todas las matrices de monodromía son conjugadas. La relación entre los multiplicadores m_1, \dots, m_n y los exponentes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ es

$$m_j = e^{\lambda_j T}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

En particular, los exponentes característicos están determinados salvo múltiplos enteros de $2\pi i/T$.

Corolario (Estabilidad de SLs homogéneos a coeficientes periódicos). *El sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ es:*

- *Inestable si y sólo si tiene algún exponente de Floquet de parte real positiva o no semi-simple de parte real nula.*
- *Atractor/repulsor si y sólo si todos sus exponentes de Floquet tienen parte real negativa/positiva.*

³La solución trivial $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es constante y, por tanto, periódica de cualquier periodo.

Demostración. Sabemos que el sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ se transforma en el sistema $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ mediante un cambio de variables $\mathbf{x} = P(t)\mathbf{y}$ periódico en t . Por tanto, el sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ hereda la estabilidad del sistema $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$. \square

Proposición (Multiplicadores, exponentes y traza). *Con las notaciones anteriores,*

$$\prod_{j=1}^n m_j = \exp\left(\int_0^T \text{traza}[A(s)] ds\right), \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = \frac{1}{T} \int_0^T \text{traza}[A(s)] ds.$$

Demostración. Sea $X(t)$ una matriz fundamental arbitraria del sistema $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Su matriz de monodromía es $M = M_X = X^{-1}(0)X(T)$. Por tanto, aplicando la fórmula de Liouville obtenemos que

$$\prod_{j=1}^n m_j = \det[M] = \det[X(T)]/\det[X(0)] = \exp\left(\int_0^T \text{traza}[A(s)] ds\right).$$

La segunda fórmula es una consecuencia de las relaciones $m_j = e^{\lambda_j T}$. \square

Ejemplo 15. Resolver el sistema a coeficientes 2π -periódicos $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular sus multiplicadores y exponentes característicos. Describir el comportamiento cualitativo de sus trayectorias: estabilidad y existencia de trayectorias periódicas. Finalmente, comprobar que se cumple la fórmula de la suma de los exponentes de Floquet.

Los sistemas a coeficientes periódicos son, en general, irresolubles. Sin embargo, este sistema es resoluble pues es triangular. Si notamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, el sistema anterior es equivalente a las ecuaciones

$$x_1' = (-1 + \cos t)x_1, \quad x_2' = (\cos t)x_1 - x_2.$$

La primera ecuación es una EDO lineal homogénea de primer orden, cuya solución general es

$$x_1(t) = c_1 e^{\int (-1 + \cos t) dt} = c_1 e^{-t + \sin t}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Una vez resuelta la primera ecuación, la segunda es una EDO lineal no homogénea de primer orden, cuya solución general es

$$x_2(t) = e^{-t} \left(c_2 + \int e^t (\cos t) x_1(t) dt \right) = c_1 e^{-t + \sin t} + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la solución general del sistema original es

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t + \sin t} & 0 \\ e^{-t + \sin t} & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sin t} & 0 \\ e^{\sin t} & 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

y el sistema es asintóticamente estable pues todas sus soluciones tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$. Además, la solución trivial $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ es la única solución periódica. Queremos obtener estos resultados a partir de los exponentes (o multiplicadores) característicos.

Empezamos notando que $X(t)$ es una matriz fundamental, ya que sus columnas son soluciones del sistema y $\det[X(t)] = e^{-2t + \sin t} \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Su matriz de monodromía es

$$M = M_X = X^{-1}(0)X(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-2\pi} = e^{-2\pi} \text{Id} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

A continuación, buscamos una matriz $B \in \mathcal{M}_2$ tal que $e^{2\pi B} = M$. Recordando los comentarios sobre logaritmos de matrices diagonales obtenemos que $B = -\text{Id}$ es un logaritmo real. Por tanto, la matriz del cambio de base es igual a

$$P(t) = X(t)e^{-Bt} = \begin{pmatrix} e^{\sin t} & 0 \\ e^{\sin t} & 1 \end{pmatrix} e^{-t} e^{\text{Id}t} = \begin{pmatrix} e^{\sin t} & 0 \\ e^{\sin t} & 1 \end{pmatrix},$$

ya que $e^{\text{Id}t} = e^t \text{Id}$. En particular, resulta que:

- Los multiplicadores característicos del sistema son $m_1 = m_2 = e^{-2\pi}$ (multiplicador doble); y

- Los exponentes característicos del sistema son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (exponente doble); luego
- El sistema es asintóticamente estable, pues $\Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 = -1 < 0$; y
- El sistema no tiene soluciones periódicas no triviales, pues $\text{Spec}(B) = \{-1\} \subset \mathbb{R}$.

Finalmente, observamos que $\lambda_1 + \lambda_2 = -2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2 + \cos s) ds$.

SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

Finalmente, acabamos el tema estudiando los sistemas lineales no homogéneos de la forma $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, con $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Estructura de las soluciones. Las soluciones de un sistema no homogéneo forman una variedad lineal afín de dimensión n dentro del espacio vectorial $C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Proposición. Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Sea $\mathbf{x}_p(t)$ una solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$. Entonces

$$\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t), \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

es la solución general del sistema no homogéneo.

Demostración. El cambio de variable dependiente $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)$ transforma el sistema no homogéneo en el sistema homogéneo. Efectivamente,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \mathbf{x}'_p(t) = (A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)) - (A(t)\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}(t)) = A(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) = A(t)\mathbf{y}.$$

Por tanto, las soluciones de ambos sistemas están en correspondencia mediante el cambio de variables. Es decir, $\mathbf{y}(t)$ es una solución del homogéneo si y sólo si $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}_p(t)$ lo es del no homogéneo. \square

Una consecuencia interesante de la estructura de las soluciones es que todas las soluciones de un sistema lineal a coeficientes constantes o periódicos atractor/repulsor (homogéneo o no) se acercan/alejan.

Proposición. Sean $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ dos soluciones diferentes de un sistema lineal no homogéneo a coeficientes constantes o periódicos.

1. Si el sistema homogéneo asociado es atractor, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| = 0$.
2. Si el sistema homogéneo asociado es repulsor, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| = \infty$.

Demostración. Si $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ son soluciones diferentes del sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, la diferencia $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ es una solución no trivial del sistema homogéneo asociado, pues

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'_1(t) - \mathbf{x}'_2(t) = (A\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}(t)) - (A\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}(t)) = A(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) = A\mathbf{x}(t).$$

Si este sistema homogéneo es atractor/repulsor, entonces, por definición, todas sus soluciones tienden a cero/infinito cuando $t \rightarrow +\infty$, luego $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|$ será cero o infinito según el caso. \square

Ejercicio. Probar que un sistema lineal no homogéneo a coeficientes constantes tal que su sistema homogéneo asociado es atractor o repulsor no puede tener dos soluciones periódicas diferentes.

Fórmula de variación de las constantes. Sirve para calcular una solución particular de un sistema lineal no homogéneo a partir de una matriz fundamental de su sistema homogéneo asociado.

Teorema. Si $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ y la derivada de la función vectorial $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema $X(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{b}(t)$, entonces

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{u}(t)$$

es una solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$.

Demostración. HUECO. \square

Ejemplo 16. Resolver el sistema lineal no homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

(Indicación: Los VEPs de la matriz $A(t)$ no dependen de t .)

La matriz $A(t)$ es diagonalizable con VEPs $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, 1)$ de VAPs $\lambda_1(t) = t$ y $\lambda_2(t) = 1$. Por tanto, usando el ejercicio de la página 5 obtenemos que las funciones

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\int \lambda_1(t) dt} \cdot \mathbf{v}_1 = e^{t^2/2} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\int \lambda_2(t) dt} \cdot \mathbf{v}_2 = e^t \mathbf{v}_2$$

son soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Poniéndolas por columnas, obtenemos la matriz

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es fundamental, pues su Wronskiano es no nulo: $w(t) = \det[X(t)] = -e^{t+t^2/2}$. Por tanto,

$$\mathbf{x}_h(t) = X(t)\mathbf{c} = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t^2/2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general del sistema homogéneo. Ahora resolvemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = X(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e^{t^2/2} u_1'(t) = t \\ u_2'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $\mathbf{x}_p(t) = X(t)\mathbf{u}(t)$ es una solución particular y

$$\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = X(t)[\mathbf{c} + \mathbf{u}(t)] = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t^2/2} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general del sistema no homogéneo. ▲