Clase 2: Macedonia de ejemplos sobre existencia y unicidad

Los cruces transversales no son posibles. Seguimos estudiando EDOs de primer orden en forma normal. Es decir, ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(x,y)$$

donde $f : U \to \mathbb{R}$ es una función suficientemente regular (continua, Lipschitz, de clase C^r o analítica) en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

En la primera clase establecimos la equivalencia entre un problema analítico (resolver EDOs) y un problema geométrico (encontrar gráficas tangentes a un campo de direcciones). Como consecuencia, las gráficas de soluciones diferentes de una EDO en forma normal de primer orden no puede cruzarse de forma transversal. (¿Por qué?) Y ahora surge una pregunta natural: ¿Pueden cruzarse de forma tangencial? La respuesta, bajo unas hipotésis bastante generales, es negativa.

Un teorema de existencia y unicidad, por ahora sin demostración. Cuando la expresión que define la EDO es suficientemente regular, sus PVIs asociados siempre tienen (existencia) exactamente una (unicidad) *solución local*. El término local significa que sólo podemos garantizar que la solución está definida en algún intervalo abierto, el cual puede ser muy pequeño, que rodea al punto inicial.

Teorema (Teorema de existencia y unicidad para EDOs de primer orden)**.** *Si la función $f(x,y)$ es continua y localmente Lipschitz respecto la función incógnita y en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in U$, entonces el PVI*

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

tiene exactamente una solución local; es decir, una única solución definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contiene al punto inicial x_0.

No probaremos este resultado ahora, pues su demostración es bastante técnica y usa conceptos que requieren un par de clases propias para ser asimilados. A saber, necesitamos definir y entender qué es la regularidad Lipschitz y probar algunos teoremas de punto fijo en espacios de Banach. Los teoremas de punto fijo (de Banach, de Brouwer, de Lefschetz, de Nielsen, etc.) constituyen una de las familias de resultados más importantes en Matemáticas.

El teorema que demostraremos dentro de unas semanas es más general que el arriba expuesto, ya que cubrirá el caso de sistemas de EDOs de primer orden en forma normal; es decir, sistemas con varias funciones incógnita.

La macedonia prometida. A continuación, listamos ejemplos que muestran diferentes situaciones. Algunos de ellos no cumplen las hipótesis del teorema, luego no nos debe sorprender que tampoco cumplan (alguna de) las tesis del teorema.

Ejemplo 1. (Existencia y unicidad de solución global.)

Consideramos el PVI lineal $y' = ay$, $y(x_0) = y_0$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro arbitrario. La EDO es separable, luego

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay \Rightarrow \int y^{-1}\,\mathrm{d}y = \int a\,\mathrm{d}x + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \log|y| = ax + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \pm \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{ax}, c \in \mathbb{R}.$$

La solución general de la EDO está formada por la familia $y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ con $k \neq 0$ libre y la solución perdida $y(x) \equiv 0$. Es decir, la solución general es $y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, con $k \in \mathbb{R}$.

(Otra forma de comprobar que la solución general tiene esta forma, consiste en suponer que $y(x)$ es una solución arbitraria y comprobar que $(\mathrm{e}^{-ax}y(x))' = -a\mathrm{e}^{-ax}y(x) + \mathrm{e}^{-ax}y'(x) = (a-a)\mathrm{e}^{-ax}y(x) \equiv 0$. Por tanto, $\mathrm{e}^{-ax}y(x) \equiv k$ para alguna constante $k \in \mathbb{R}$. Es decir, $y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, con $k \in \mathbb{R}$.)

A continuación, determinamos el valor de la constante libre $k \in \mathbb{R}$ imponiendo la condición inicial:

$$k\mathrm{e}^{ax_0} = y(x_0) = y_0 \Rightarrow k = y_0\mathrm{e}^{-ax_0}.$$

Por tanto, el PVI tiene una única solución: $y(x) = y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$, que está definida en toda la recta real: $I = \mathbb{R}$. Es decir, es una solución global. ▲

Ejemplo 2. (Existencia y unicidad de solución local, pero no existencia de solución global.)

Consideramos el PVI $y' = y^2$, $y(x_0) = y_0$. La EDO es separable, luego

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \Rightarrow \int y^{-2}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow -1/y = x + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = -1/(x+c),\ c \in \mathbb{R}.$$

La solución general de la EDO está formada por la familia $y(x) = -1/(x+c)$ con $c \in \mathbb{R}$ libre y la solución perdida $y(x) \equiv 0$. Por tanto, el PVI tiene una única solución:

$$y(x) = \frac{y_0}{1 + (x_0 - x)y_0}.$$

Esta solución sólo está definida en el *intervalo maximal* $I = \begin{cases} (x_0 + 1/y_0, +\infty) & \text{si } y_0 < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } y_0 = 0 \\ (-\infty, x_0 + 1/y_0) & \text{si } y_0 > 0. \end{cases}$

No se puede extender, pues explota a infinito al tender al extremo $x_0 + 1/y_0$ del intervalo. El motivo de este comportamiento es que la ecuación $y' = y^2$ implica que la pendiente y' de las soluciones aumenta enormemente cuando aumenta $|y|$, y contra más aumenta la pendiente, más aumenta $|y|$.

Si estuvieramos tratando un problema dinámico consistente en buscar la posición $x = x(t)$ de una partícula en función del tiempo t, expresariamos el PVI como $x' = x^2$, $x(t_0) = x_0$. En tal caso, diríamos que la partícula *escapa a infinito en un tiempo finito*. Concretamente, la posición de la partícula *explota* en el instante $t = t_* = t_0 + 1/x_0$. ▲

Ejemplo 3. (Existencia con unicidad, existencia sin unicidad y no existencia de soluciones.)

Consideramos el PVI $xy' = y$, $y(x_0) = y_0$. Esta EDO es separable, luego

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y/x \Rightarrow \int y^{-1}\,\mathrm{d}y = \int x^{-1}\,\mathrm{d}x + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \log|y| = \log|x| + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \pm \mathrm{e}^c x,\ c \in \mathbb{R}.$$

La solución general de la EDO está formada por la familia $y(x) = kx$ con $k = \pm\mathrm{e}^c \neq 0$ libre y la solución perdida $y(x) \equiv 0$. Es decir, la solución general es

$$y(x) = kx, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, debemos distinguir tres casos:

- Si $x_0 \neq 0$, entonces existe una única solución: $y(x) = y_0 x/x_0$.
- Si $(x_0, y_0) = (0,0)$, entonces existen infinitas soluciones: $y(x) = kx$, con $k \in \mathbb{R}$ libre.
- Si $x_0 = 0$ pero $y_0 \neq 0$, entonces no existe solución. (Supongamos que $y(x)$ es una solución tal que $y(0) \neq 0$ y evaluamos la EDO en $x = 0$. Entonces $0 \neq y(0) = 0 \cdot y'(0) = 0$. Contradicción.)

Ninguno de estos resultados contradice al teorema de existencia y unicidad pues la ecuación $xy' = y$ no está normalizada y es singular cuando $x = 0$. ▲

Ejemplo 4. (Existencia y unicidad de solución local, pero existencia sin unicidad de solución global.)

Consideramos el PVI $y' = f(x,y) = 3y^{2/3}$, $y(x_0) = y_0$. Esta EDO es separable, luego

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y^{2/3} \Rightarrow \int y^{-2/3}/3\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y^{1/3} = x + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = (x+c)^3,\ c \in \mathbb{R}.$$

Así pues, ya tenemos una familia de soluciones "cúbicas". Además, $y(x) \equiv 0$ es una solución perdida por el método de separación de variables que empalma de forma "suave" con las soluciones cúbicas anteriores. Por tanto, podemos obtener muchas soluciones globales nuevas simplemente empalmando una o dos cúbicas con segmentos de la recta $y = 0$. En particular:

- Si $y_0 \neq 0$, entonces el PVI tiene una única solución local, pero infinitas soluciones globales.
- Si $y_0 = 0$, entonces el PVI tiene cuatro soluciones locales.

La explicación de este comportamiento es que aunque $f(x,y) = 3y^{2/3}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, no es Lipschitz respecto y cuando $y = 0$. (La derivada $(3y^{2/3})' = 2y^{-1/3}$ "explota" en $y = 0$.) ▲

Referencias. Esta clase no es original. De hecho, casi todos los libros de Ecuaciones Diferenciales presentan la misma macedonia de ejemplos. Por tanto, podeis mirar cualquier libro de la bibliografía.