1. Donat el problema de Cauchy $y''+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, trobeu les aproximacions de la solució $y(x)$ i de la seva derivada $y'(x)$, que s'obtenen després d'aplicar 2 iteracions de Picard.

Resolució:
$$\left.\begin{array}{r} y''+xy=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{array}\right\} \underset{Y=\binom{y}{z}}{\overset{}{\underset{z=y'}{\longleftrightarrow}}} \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = Y' = F(x,Y) = \begin{pmatrix} z \\ -xy \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Y_0 \end{array}\right.$$

Picard: $Y_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_n(x) = Y_0 + \int_0^x F(s, Y_{n-1}(s))ds, \quad \forall n \geq 1.$

Per components: $y_0(x)=1,\ y_n(x) = 1 + \int_0^x z_{n-1}(s)ds, \quad \forall n \geq 1.$

$$z_0(x)=0,\ z_n(x) = 1 + \int_0^x (-sy_{n-1}(s))ds, \quad \forall n \geq 1.$$

1a iteració: $y_1(x) = 1 + \int_0^x z_0(s)ds = 1, \qquad z_1(x) = -\int_0^x sy_0(s)ds = -\int_0^x sds = -\frac{x^2}{2}.$

2a iteració: $y_2(x) = 1 + \int_0^x z_1(s)ds = 1 - \int_0^x \frac{s^2}{2}dx = 1 - \frac{x^3}{6}, \qquad z_2(x) = -\int_0^x sy_1(s)ds = -\frac{x^2}{2}$

$\Longrightarrow$ la 2a iteració de $y(x)$ és $1-\frac{x^3}{6}$, i la 2a iteració de $y'(x)$ és $-\frac{x^2}{2}$.

---

2. Un problema mecànic es representa amb l'equació $mx'' = -k_1 x - k_2 x' + mg$. Si sabem que $x'(0) = 1/2$, quina condició ha de satisfer la constant de fricció k_2 per tal que l'energia total $E = \frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \frac{1}{2}k_1(x(t))^2$ compleixi que $E'(0) < 0$?

Resolució: Al derivar l'energia $E(t) = \frac{m}{2}(x'(t))^2 + \frac{k_1}{2}(x(t))^2$, i fent servir l'equació diferencial ordinària , queda:

$$E'(t) \quad = \quad m\,x'(t)\,x''(t) + k_1\,x(t)\,x'(t) = x'(t)[m\,x''(t) + k_1\,x(t)] = x'(t)[-k_2\,x'(t) + mg]$$

Per tant, $E'(0) = x'(0)[mg - k_2\,x'(0)] = \frac{1}{2}\left(mg - \frac{k_2}{2}\right) < 0$ si, i només si, $k_2 > 2mg$.

3. Resoleu, fent el canvi $t = \ln x$, el problema de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2 \end{array} \right.$.

Resolució: Considerem la funció $Y(t) = y(x)$, on $t = \ln y$ o bé $x = e^x$.

(Notació: $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $Y' = \dfrac{dy}{dt}$, $Y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$.)

Aleshores, derivant respecte d'x, tenim que $xy' = Y'$, $x^2y'' = Y'' - Y'$.

Substituint en l'equació diferencial ordinària original ens queda l'equació diferencial ordinària transformada:

$$Y'' - 2Y' + y = 0 \Longrightarrow P(D) = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$$
$$\Longrightarrow y_h(t) = c_1e^t + c_2te^t, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ i desfent el canvi:}$$
$$\Longrightarrow y_h(x) = c_1x + c_2x\ln x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

Finalment, determinem el valor de c_1 i c_2 imposant les condicions inicials:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = y(1) = c_1 \\ 2 = y'(1) = c_1 + c_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array} \Longrightarrow y(x) = x(1 + \ln x)\,.$$

---

4. Calculeu, si existeix, una funció no nul·la $X(t)$ que sigui simultàniament solució dels sistemes $X' = AX$ i $X' = BX$, on $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Resolució:

- $Q_A(t) = \begin{vmatrix} -t & -2 \\ -2 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 4 \Longrightarrow$ VAPs de A: $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$;

  VEPs de A: $\text{Nuc}(A - \lambda_1 I) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \Longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $\text{Nuc}(A - \lambda_2 I) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Solució general de $X' = AX$: $x_{h_A}(t) = c_1\vec{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} \\ -c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} \end{pmatrix}$.

- $Q_B(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$ VAPs de B: $\mu_1 = 3$ i $\mu_2 = -2 = \lambda_2$;

  VEPs de B: $\text{Nuc}(B - \mu_1 I) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \Longrightarrow \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\text{Nuc}(B - \mu_2 I) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \Longrightarrow \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2$

  Solució general de $X' = BX$: $x_{h_B}(t) = c_1\vec{w}_1e^{\mu_1 t} + c_2\vec{w}_2e^{\mu_2 t}$, $c_1\, c_2 \in \mathbb{R}$.

  Per tant, com $\mu_2 = \lambda_2$ i $\vec{w}_2 = \vec{v}_2$, $X(t) = \vec{v}_2e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$ és una solució comú de $X' = AX$ i $X` = BX$.