

1. Considerem l'equació diferencial ordinària $x'' + 2x' + x = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Trobeu una solució del tipus $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, especificant els valors de A , ω i φ .

Resolució: Com que es tracta d'una oscil·lació forçada esmorteïda, aquesta equació diferencial ordinària té una única solució periòdica $u(t)$. Aplicant el mètode dels coeficients indeterminats busquem $u(t)$ de la forma

$$u(t) = a \cos t + b \sin t.$$

Substituint a l'equació diferencial ordinària trobem que $a = -1/2$ i $b = 0$. Aleshores,

$$u(t) = -\frac{1}{2} \cos t = \frac{1}{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \implies A = \frac{1}{2}, \quad \omega = 1 \quad \text{i} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

2. Trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària $y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Resolució:

- equació diferencial ordinària homogènia associada $y'' + y = 0$; llavors un conjunt fonamental de solucions és $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$.
- busquem una solució particular pel mètode de variació de les constants $y_p = u(x) \cos x + v(x) \sin x$, amb

$$\left. \begin{aligned} u'(x) &= \frac{W_1}{W} = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \implies u(x) = x - \tan x \\ v'(x) &= \frac{W_2}{W} = \frac{\sin x}{\cos x} \implies v(x) = -\ln \cos x \end{aligned} \right\}$$

Aleshores,

$$y_G(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos x - \sin x - \ln(\cos x) \sin x.$$

3. Donat un sistema lineal homogeni $X'(t) = A(t)X(t)$, quines són la traça i el determinant de $A(t)$ sabent que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 & 2t^2 \ln t \\ t^2 & t^2(1 + \ln t) \end{pmatrix}$ és una matriu fonamental del sistema?

Resolució: $\Phi(t)$ verifica $\Phi' = A\Phi \implies A = \Phi'\Phi^{-1} \implies A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{2}{t} \\ -\frac{1}{2t} & \frac{3}{t} \end{pmatrix} \implies \det A(t) = \frac{4}{t^2}$ i traça

$$A(t) = \frac{4}{t}.$$

Més fàcil:

- $\det \Phi' = \det A \cdot \det \Phi \implies 8t^2 = \det A \cdot 2t^4 \implies \det A(t) = \frac{4}{t^2}$
- Per la fórmula de Liouville, $\frac{d}{dt}(\det \Phi(t)) = \text{tr } A(t) \det \Phi(t)$; aleshores

$$\frac{d}{dt}(2t^4) = \text{tr } A(t) \cdot 2t^4 \implies \text{tr } A(t) = \frac{4}{t}.$$

4. Calculeu la segona iteració de Picard de la solució del problema de Cauchy $y' = 3x^2 + 5xy$, $y(0) = 0$.

Resolució: Mètode iteratiu de Picard:

$$\begin{cases} y_0(x) = 0 \\ y_{k+1}(x) = 0 + \int_0^x (3s^2 + 5sy_k(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$k = 0 \implies y_1(x) = \int_0^x (3s^2 + 5sy_0(s)) ds = x^3; \quad k = 1 \implies y_2(x) = \int_0^x (3s^2 + 5sy_1(s)) ds = x^3 + x^5.$$