**Equacions Diferencials** **Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora **Test** 26 d'Octubre de 2005

**NOM:** ..............................................
**COGNOMS:** ..............................................
**DNI:** ..............................................

**NOTA:** $\square$

**Marqueu amb $\boxed{\text{X}}$ la resposta correcta i indiqueu com heu arribat a aquest resultat.**

1. Sabent que l'equació diferencial ordinària $y'' + 2y' + cy = 4x$ té per solució particular $y_p = x^2 - x$, la seva solució general és:

   (a) $c_1 + c_2e^{x+c} + x^2 - x$. $\square$ (b) $c_1x^2 - c_2x$. $\square$
   (c) $c_1 + c_2e^{2x} + x^2 - x$. $\square$ (d) $c_1 + c_2e^{-2x} + x^2 - x$. $\square$

   **Solució:** (d)

   **Resolució:** Busquem quant val $c$: $\left.\begin{array}{l} y_p = x^2 - x \\ y_p' = 2x - 1 \\ y_p'' = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = y_p'' + 2y_p' + cy_p = 2 + 4x - 2 + cx^2 - cx \Rightarrow c = 0$

   Edo homogènia: $y''' + 2y' = 0 \longrightarrow p(m) = m^2 + 2m = m(m+2) \left\{ \begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow y_1(x) = 1 \\ m = -2 \Rightarrow y_2(x) = e^{-2x} \end{array}\right.$

   $\Rightarrow$ Sol. general: $y_g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + x^2 - x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

---

2. Si $Y(x)$ és la solució del problema de valors inicials $\left\{ \begin{array}{l} Y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y \\ \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right.$, aleshores $Y(1)$ val:

   (a) $\begin{pmatrix} e - e^3 \\ e + e^3 \end{pmatrix}$. $\square$ (b) $\begin{pmatrix} e + e^3 \\ e - e^3 \end{pmatrix}$. $\square$ (c) $\begin{pmatrix} 2e \\ 2e \end{pmatrix}$. $\square$ (d) $\begin{pmatrix} e + e^{-3} \\ e - e^{-3} \end{pmatrix}$. $\square$

   **Solució:** (b)

   **Resolució:** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q_A(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) \Rightarrow Y(t) = c_1\vec{v}_1e^t + c_2\vec{v}_2e^{3t}$
   VAPS: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.
   VEPS: $\mathrm{Nuc}(A.\lambda_1 I) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\mathrm{Nuc}(A.\lambda_2 I) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = y(0) = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^t - e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow Y(1) = \begin{pmatrix} e + e^3 \\ e - e^3 \end{pmatrix}$.

---

3. Un conjunt fonamental de solucions del sistema $X' = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ e^{2t} & 1 \end{pmatrix} X$, per a $t > 0$, és:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$. ☐
   (b) No es pot resoldre aquest sistema ja que és de coeficients variables. ☐
   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$. ☐
   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} \ln t \\ (1/t)e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right\}$. ☐

   **Solució:** (a)

   **Resolució:** $\{X_1(t), X_2(t)\}$ és un conjunt fonamental de solucions de

$$X' = A(t)X \iff \left\{ \begin{array}{l} X_j'(t) = A(t)X_j(t) \\ W[X_1(t), X_2(t)] \neq 0 \end{array} \right\} \ \forall\, t > 0$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ és una solució de $X' = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ e^{2t} & 1 \end{pmatrix} X$; $\begin{pmatrix} t \\ (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}$ és una altra solució

$$W\left[ \begin{pmatrix} t \\ (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} t & 0 \\ (t-1)e^{2t} & e^t \end{vmatrix} = te^t \neq 0 \ \ \forall\, t > 0.$$

---

4. Considereu el problema $y'' = (x-1)(y')^2 + (x-1)^2 y$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. Usant el mètode d'Euler amb pas $h = 1$, calculeu l'aproximació de la derivada de $y$ en el punt $x = 5$.
   (a) 126. ☐ (b) 172. ☐ (c) 7. ☐ (d) 133. ☐

   **Solució:** (b)

   **Resolució:** $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $Y' = F(x,Y) = \begin{pmatrix} y' \\ (x-1)(y')^2 + (x-1)^2 y \end{pmatrix}$. Euler amb $h = 1 \longrightarrow$

$Y_0 = Y(1) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $Y_{n+1} = Y_n + F(n+1, Y_n)$, $n \geq 0$.

$$Y_1 = Y_0 + F\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \cdot 0^2 + 0^2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq Y(2)$$
$$Y_2 = Y_1 + F\left(2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cdot 0^2 + 1^2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq Y(3)$$
$$Y_3 = Y_2 + F\left(3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \simeq Y(4)$$
$$Y_4 = Y_3 + F\left(4, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \cdot 7^2 + 3^2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 172 \end{pmatrix} \simeq Y(5) \Longrightarrow y'(5) \simeq 172.$$

---

5. Donat el problema de valors inicials $y'' - 3y' + 2y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, l'aproximació de la solució obtinguda calculant la segona iteració de Picard és:

   (a) $y_2(x) = (x^2/2) - 2x$. ☐ (b) $y_2(x) = 1 - x^2 + (x^3/6)$ ☐
   (c) $y_2(x) = -2x - (5x^2/2) + (x^3/2)$. ☐ (d) $y_2(x) = x + x^2$. ☐

   **Solució:** (b)

   **Resolució:** $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $Y' = F(x,Y) = \begin{pmatrix} y' \\ 3y' - 2y + x \end{pmatrix}$. $Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Picard: $Y_0 = Y_0(x) \equiv Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Y_1(x) = Y_0 + \int_0^x F\left(s, Y_0(s)\right) ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ s-2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ (x^2/2) - 2x \end{pmatrix}$$
$$Y_2(x) = Y_0 + \int_0^x F\left(s, Y_1(s)\right) ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} (s^2/2) - 2s \\ (3/2)s^2 - 6s - 2 + s \end{pmatrix} ds =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - x^2 + (x^3/6) \\ -2x - (5/2)x^2 + (x^3/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ * \end{pmatrix} \Longrightarrow y_2(x) = 1 - x^2 + (x^3/6).$$